高中立体几何

教法 学法 考法

曾广钦 龚祖倩 编著

三环出版社

一年一期卷

高中立体几何
重点难点疑点解析

隋福林　戴隆四　闫延坤
何　平　郑春华　　编著

长 春 出 版 社

新登(吉)字第10号

高中立体几何重点难点疑点解析

王英硕　马世一　主编

责任编辑：毕素香　王敬芝　　封面设计：王爱中

长春出版社出版　　新华书店总店北京发行所发行

（长春市建设街43号）　　冶金工业出版社印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　　1992年11月第1版

印张：11.75　　1992年11月第1次印刷

字数：263 000　　印数：1—10 000册

ISBN　7—80573—645—6/G·246　　定价：5.20元

《高中初中小学各科重点难点疑点解析》丛书

编　委　会

前　言

本书是根据教学大纲的精神，结合作者多年的教学实践，对高中几何教材作了较为细致的分析。对各单元重点知识内容进行了深入地挖掘，揭示了知识的全部蕴含，并指出了理解这些知识时应达到的程度；对难点知识的剖析，则着眼于抓准要害、把握规律，起到了化难为易的作用；对于疑点知识，侧重在认定其确切的含意及产生的原因，颇具澄清的功效，本书各单元选配了适量的例题，题型具有多样性及新颖性，各题均有解前分析指导和解后规律总结，还备有一定数量的练习题，因此本书不仅适用于高中一、二年级学生使用，更适合于高中毕业班学生总复习时使用，对于数学教师也具有较好的参考价值。

参加本书编学的有闫延坤（第一、二、三、四单元），何平（第五、六、七单元），戴隆四（第八单元），隋福林（第十、十一、十二单元），郑春华（综合练习题）。由于时间促，水平有限，缺点及错误恐所难免，诚望读者不吝指正。

编　者

1992 年 4 月 15 日

目　　录

第一单元　平面

一、重点

平面的基本性质

三条基本性质是立体几何的基本原则. 公理 1，它是判定直线在平面内的依据，是判定点在平面内的依据. 公理 2，它是判定两平面相交的依据，是确定直线的依据，是证明三点共线的依据. 公理 3，及三个推论（三点定面），它是确定平面的依据，是证明点共面，线共面，异面的依据，它是立几问题转化为平几问题的依据. 应强调的是不在同一直线上三点确定一平面. 这里“确定”指的是“有”且“只有”的意思，作题时常常忽视“存在性”的证明.

二、难点

平面基本性质的运用，直观图的画法

由于学生刚学完平面几何，又刚刚给出平面的概念，同学喜欢用处理平面几何问题的思维定势对待立体几何问题，这个转化首先表现在对三个公理及推论的使用上，表现为逻辑推理与写话. 当然斜二测，正轴测直观图的画法要求及画法也是一个难点，这里有个平面与空间观念转变问题.

三、疑点

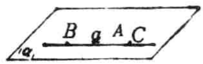
立体几何中第一个概念是平面. “几何里的平面是无限延

展的”，不易被初学者理解，这是一个疑点. 立体几何中的疑点可以用平面几何知识，用类比推理，用对比方法过渡过来. 如“你要问我平面有多大有多厚，就等于问你自己直线有多长又有多粗”. 点石成金，一语道破真情.

四、例题

例 1 叙述公理三的推论 1，并证明之.

经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.



已知：直线 a，点 A 且 $A\overline{\in}a$

求证：过 a，A 的平面有且只有一个.

解析 因为它是公理三之推论，要以公理三作依据来证明. “有”且“只有”一个平面，这里有两层意思，就是要证明其存在性和唯一性.

证明：(存在性) $\because A\overline{\in}a$，在 a 上任取两点 B、C，则过 A、B、C 有一个平面 α(公理三).

$\because B\in a, c\in a$，$\therefore a\subset\alpha$(公理一).

即平面 α 是过点 A 和直线 a 的平面

(唯一性)：假设过 A 和 a 还有一个平面 β，

$\because B\in a, C\in a$，$\therefore B, C\in\beta$，且 $A\overline{\in}a$

$\therefore$ 过不在同一直线上三点 A、B、C 有两个平面 α、β 与公理三矛盾.

$\therefore$ 过直线 a 和线外一点 A 只有一个平面.

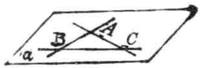
综上可知过 a，A 有且只有一个平面

解后 推论 1 是本书中第一个要证明的命题，并作为定理用，因此推理程序、书写格式都应是很严格的. 况且“存在

性”“唯一性”的证明都体现思维的严谨性．又如存在性证明过程中，在直线 a 上任取两点，“任取”十分重要，体现结论一般性，否则只写取两点就没有一般意义了．唯一性的证明用反证法．反证法理论根据是正命题与逆否命题的等效性．其过程是，否定结论，推出矛盾，还回结论．推去矛盾依据是：1．与公理抵触，2．与已学过定理不容，3．与本题条件（题设）冲突，4．与临时假定相违，5．自相矛盾．具备上述之一者即可推出矛盾．此题唯一性证明也可用“归一法”，“重合法”证明．

还应注意，应强调不共线三点确定一平面．

例 2　两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一平面内



已知：直线 AB、BC、CA 两两相交，交点分别为 A、B、C（如图）

求证：直线 AB、BC、CA 共面

解析　此题是课本上第一个例题．证共面、异面问题，是立体几何中一类典型问题，解题程序是通过点共面，得到线共面．其方法有：“归一法”和“重合法”书中是用“归一法”证明的，现用重合法证明如下：

证明：∵直线 AB 和 AC 相交于点 A，

∴直线 AB 和 AC 确定一个平面 α（推论 2）

且 $A、B、C\in\alpha$

又∵直线 AB、BC 相交于点 B，

∴直线 AB 和 BC 确定一个平面 β（推论 2）

且 $A、B、C\in\beta$

而 α、β 都是由不在同一直线上三点确定的平面，可知 α、β 重合，由公理一可知直线 AB、BC、CA 都在这个平面内即它

们共面.

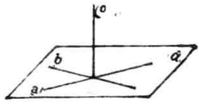
解后 此题用两种方法解答,要分析两种方法异同.应与下面二题配套.

例3 三条不共面的直线,两两相交,则必交于一点

已知:直线 a、b、c 不共面.

且两两相交.

求证:a、b、c 交于一点



解析 证不共面,利用共面证明问题,通常用反证法

证明:设 $a\cap b=0$ 则 a、b 确定平面 α,假设 c 不与 a、b 交于 o 点,则设 $c\cap a=P$

$c\cap b=Q$ 则有 $P\in\alpha$、$Q\in\alpha$ $\therefore c\subset\alpha$

与 a、b、c 不共面矛盾,结论成立.

解后 几何问题审题过程中,必须弄清:命题的条件与结论,数据;图形;符号语言.充分利用图形直观形象作题.

在作例3之后,可给出:

三条直线两两相交,它们的位置关系如何?(与例2联系起来思考).

例4 已知:a、b、c、d 是两两相交而不共点的四条直线,求证:a、b、c、d 在同一平面内

解析 证直线共面,常常通过点共面,得到线共面.此题 a、b、c、d 有两种不同的位置关系,因此要分两种不同的情况加以证明.

证明:分两种情况:

(1)四条直线中,没有三条直线过同一点.这时它们共有

六个交点 A、B、C、D、E、F，并且各不相同(如图)

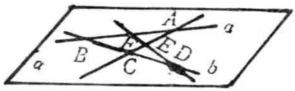
∵a、b 是相交直线，∴a、b 确定一个平面 α.

∵$F\in a$，$a\in\alpha$，∴$F\in\alpha$　同理 $D\in\alpha$

∴$c\subset\alpha$ 同理 $d\subset\alpha$　∴a、b、c、d 在同一平面内

(2)四条直线中有三条，例如 a、b、c 过同一点 A，而直线 d 不过点 A. ∵$A\in d$

∴A，d 确定一个平面 α

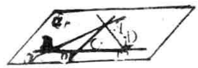


∵$B\in d$　$d\subset\alpha$

∴$B\in\alpha$　又 $A\in\alpha$

∴$a\subset\alpha$ 同理 $b\subset\alpha$　$c\subset\alpha$

∴a、b、c、d 在同一平面内



综合(1)、(2)得 a、b、c、d 在同一平面内.

解后　确定平面方法可用不共线三点确定一平面，一条直线以及直线外一点确定一平面，两条相交直线确定一平面或两条平行线确定一平面. 再根据两点在平面内，这条直线所有点都在平面内；由点在此平面内，得到直线在平面内，这种方法叫"归一法". 也可利用上面方法确定几个平面，再证这些平面重合，这种方法叫"重合法".

例 5　若不在同一平面内的两个三角形的三对对边分别相交于一点，则这三点共线

已知：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不共面，AB 与 $A'B'$ 交于 P，BC 于 $B'C'$ 处于 Q　AC 与 $A'C'$ 交于 R

求证：P，Q，R 共线

解析　公理二可以解决点共线问题和线共点问题，利用两平面的交点在交线上这一性质.

证明：设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 所确定的平面分别为 α 和 β，

$\alpha \cap \beta = l$

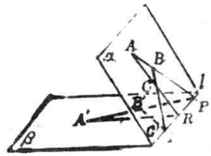
$\because AB \subset \alpha \quad P \in AB \quad \therefore P \in l$

又 $\because A'B' \subset \beta \quad P \in A'B'$

$\therefore P \in \beta \quad \therefore P \in l$

同理可证 $Q \in l \quad R \in l$

$\therefore P、Q、R$ 三点共线.



解后 只要掌握了点共线，点共面的基本方法，就可以解决线共点，线共面较复杂的问题.

五、单元练习

C

1. 选择题(1)下列命题中，正确命题的个数为 (~~D~~)

①两平面重合的重要条件是两平面有三个不在同一直线上的公共点.

②直线 a、b 共面，直线 b、c 共面，则直线 a、c 共面.

③不共面的四个点中，任何三点不在同一直线上.

④一组平行线 l_1、l_2……l_n 都与直线 l 相交，则这 $n+1$ 条直线共面.

上述命题正确的是

A. 1 个　B.　2 个　C.　3 个　D.　4 个

(2)三条直线两两相交，这三条直线可确定平面的个数为 (D)

A.　一个平面　　B.　三个平面

C.　六个平面　　D.　一个或三个平面

2. 填空题

(1)不共面的四个点可确定 1个，4个 个平面.

(2)共点的三条直线最多可确定 3 个平面. 0

(3)不相交的三条直线可确定 1个 或 3个 或 无数 个平面.

(4)两条异面直线和这两条异面直线外的三个点最多可确定____个平面,最少可确定____个平面.

3. 三条腿板凳和四条腿的板凳放在地成哪个稳定?为什么?

不在同一直线三点确定一个面

4. 若四边形 $ABCD$,两邻边夹角分别为 90°、90°、90°、60°,这四边形是平面四边形吗?不是 为什么?

内角和为360°

5. 一条直线与两直线都相交,可能确定 (D)

A. 一个平面　　B. 两个平面

C. 三个平面　　D. 非上述答案

6. 空间四边形 $ABCD$ 中. E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 上的点. 已知 EF 和 HG 相交于 Q,则 EF、HG、AC 三直线必过定点.

7. 空间四边形 $ABCD$ 中,AB、CD 中点分别为 PQ,当对角线 AC、BD 与 PQ 满足关系式:

$AC^2+BD^2=4PQ^2$ 时,求证 $AC\perp BD$

8. 若四边形四个内角均为直角,则此四边形为平面四边形.

第二单元　空间两条直线

一、重点

异面直线、两条直线平行和垂直关系.

异面直线有关知识有：

1.定义：我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.显然，两条异面直线是既不平行又不相交的.

2.画法，(平面衬托法).

3.判定：①用定义，不相交又不平行；

②用判定定理，平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

4.成角，直线 a、b 是异面直线，经过空间任意一点 O，分别引直线 $a' \parallel a$、$b' \parallel b$，因为两条相交直线和另外两条相交直线分别平行时，两组直线所成的锐角(或直角)相等，所以直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)的大小，只由直线 a、b 相互位置来确定，与点 O 的选择无关.我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)，叫做异面直线 a 和 b 所成的角.

5.公垂线：我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线.

6.距离：两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度叫做两条异面直线的距离.

7.两条直线平行的判定：

(1)定义：在同一个平面内的不相交两条直线叫平行直线.

(2)平行公理:平行于同一条直线的两条直线平行.

(3)直线和平面平行的性质定理:如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行.

(4)线面垂直的性质定理:如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行.

(5)面面平行的性质定量,如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线平行.

8. 两条直线垂直的判定:

(1)定义:如果两条异面直线所成的角是直角,我们就说这两条异面直线互相垂直.

(2)线面垂直定义:如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂,我们就说这条直线和这个平面垂直.当一直线与一平面垂直时,由定义可知这直线和这个平面内的任何一直线垂直.

(3)三垂线正定理和逆定理:三垂线定理:在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直.三垂线定理的逆定理:在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线的射影垂直.

(4)三个两两垂直的平面的交线两两垂直.

线线平行、线线垂直问题,在同一平面内时,归结到平面几何知识来研究.而立体几何中,主要是研究异面直线有关问题.在线线平行中,还有等角定理及推论,在理论上和应用上都有重要价值,不容忽视.

二、难点

异面直线概念，异面直线所成的角是本单元的难点.我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线，在研究这个概念时，应强调“任何”两个字.两条异面直线是既不平行又不相交的，这个命题的逆命题就是两条异面直线的判定方法.判定两直线异面的重要方法是反证法，根据异面直线定义作出判断.

异面直线所成的角是经过空间任意一点，分别引两异面直线的平行线时，两组直线所成的锐角（或直角），把这个角叫做异面直线所成的角.这个概念给出与空间这个点的位置选择无关，它是用线线平行关系定义的，理论依据是等角定理.

应该指出线线成角和以后学的线面成角都指的锐角或直角，也可以是零角，而异面直线成角，只能是锐角或直角.

在线线关系这一单元复习时，必须注意知识的沟通与转化，注意方法的灵活运用，平行间转化，垂直间转化，平行与垂直间互相转化，转化的思想贯穿教材通篇，用转化观点研究问题，将开阔解题路子.

求异面直线距离是教材中难点但在教学大纲中，指出：“只要求会计算已给出公垂线时的距离”，显然降低了难度.

三、疑点

异面直线是客观存在的，教材中，从实例引出，异面直线所成角的概念，以等角定理为依据给出这一概念是容易接受的.而异面直线公垂线的存在性，教材中，只从正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中棱 AA' 和 $B'C'$ 所在直线是两条异面直线，直线 $A'B'$ 和它们都垂直相交，我们把和两条异面直线都

垂相交的直线叫做两条异面直线的公垂线，进而给出：两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做两条异面直线的距离．这里是否任何两异面直线都有公垂线，教材中并没有对存在性给予严格的论述这是疑点，事实任何两条异面直线都存在公垂线，现在知识不够．以后学完线面位置关系后给出异面直线公垂线的画法后，可以完满解决存在性问题．

平面几何里的几何概念、定理等，对于非平面图形，需要经过证明才能应用，有些仍然成立，有些不成立，如平行公理、等角定理，在空间图形中，仍然成立，而象两条直线同时垂直于第三第直线，这两条直线不一定平行．平面图形中的结论和空间图形中的结论是不同的．在学生形成空间观念的过程中，成为学生学习过程中的，诸一解决的疑点．

四、例题

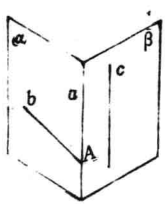
例 1　已知：（如图）$\alpha\cap\beta=a$

$b\subset\alpha$　$a\cap b=A, c\subset\beta$　$a\,//\,c$

求证：b　c 异面

解析　证异面直线重要方法是反证法．

证明：设 b　c 共面于 r



$\because A\in b$　$a\,//\,c$　$a\cap b=A$　$\therefore A\overline{\in}c$

过 A、c 确定平面 β

而 $A\in r$、$c\subset r$　$\therefore\beta$、r 为同一平面

$\therefore a\subset\beta$ 且 $b\subset\beta$，α 为 a、b 确定的平面

$\therefore\alpha$、β 重合与 $\alpha\cap\beta=a$ 矛盾

$\therefore b$、c 异面

解后　证异面问题，用反证法设共面用公理三及三个推