刘吉佑 莫 骄◎编

XianXingDaiShu Yu JiHe

线性代数与几何

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

线性代数与几何

刘吉佑　莫　骄　编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 提 要

本书较为系统地介绍了线性代数与解析几何的基本理论和方法，特别注意代数与几何的结合与联系，加强了几何背景和线性空间与线性变换理论的教学．全书共分九章，内容包括：行列式、矩阵、矢量代数、平面与直线、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、空间曲面与曲线、线性空间与线性变换．本书每章后面配有一定量的习题，书末还附有习题答案或提示．

本书可作为高等工科院校非数学专业的教材和教学参考书，也可供自学读者及有关科技工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何/刘吉佑主编．--北京：北京邮电大学出版社，2012.8(2013.7 重印)

ISBN 978-7-5635-3141-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材②解析几何—高等学校—教材

Ⅳ.①O151.2②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 156580 号

书　　名：线性代数与几何
作　　者：刘吉佑　莫　骄
责任编辑：赵玉山
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京联兴华印刷厂
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：16.5
字　　数：358 千字
印　　数：3 001—6 000 册
版　　次：2012 年 8 月第 1 版　2013 年 7 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5635-3141-7　　定　价：33.00 元

前　　言

线性代数是理工科学生的一门重要基础课程，它主要讨论有限维空间的线性理论，具有较强的抽象性和逻辑性．线性代数是一门将理论、应用和计算融合起来的完善课程，它既是学习计算数学、微分方程等有关后续课程的必备基础，也是在自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具．随着计算机的日益普及，线性代数在理论和应用上的重要性越来越突出，从而对线性代数课程的内容从深度和广度上都相应提出了更高的要求．

从基本的理论体系来说，线性代数实际上产生于解析几何，线性代数的许多基本概念和方法都有很强的几何背景，从几何角度来学习线性代数比较容易理解，其效果比单纯从代数角度来学习更好，因此，将线性代数与解析几何统一为一门课程既有利于教学，也利于读者融会贯通；另外，为使学生在面向新世纪时与时俱进，提昌素质教育，在学到必要的数学知识的同时，减轻负担、减少课时，也要求适当整合线性代数与解析几何课程教学内容．

本书根据教育部高等学校线性代数教学的基本要求，结合作者长期从事线性代数和解析几何教学的经验和体会，并在参考其他教材的基础上，为适合各专业对线性代数的不同需要而编写．本书中不含“＊”标志的内容适用于理工科本科生约 48 学时的教学．内容符合教育部线性代数和空间解析几何教学的基本要求．每章后面附有丰富的习题，供对线性代数不同的教学要求的各专业选用．

根据近年来教学改革的需要，教学改革的经验和结果，我们在内容、结构等方面做了精心编排，以适应目前教学内容多、学时少和要求高的新形势．本书以矩阵理论为主线，注意应用矩阵方法处理问题，以矩阵的运算和各种等价关系等为重点，讲授一些基本的计算技巧和处理方法．矩阵的秩和矩阵的初等变换是很重要的概念，本书力求使初等变换的方法贯穿于向量组的线性相关性理论、线性方程组理论等相关理论中去．另外我们也适当强调了线性空间与线性变换的

教学.

线性代数课程具有概念多、结论多、内容抽象且逻辑性强的特点. 作为一门重要的基础课教材，我们首先注意保持数学学科本身的科学性、系统性，但我们尽量以提出问题或以通俗简单的实例引入概念，对于较为抽象的概念，尽量提供几何背景，并尽可能采用学生易于接受的方式叙述；对重点定理和方法，提供较多的例题加以分析，以使学生较好地理解、掌握和运用；并对一些重要方法进行简要总结. 书中少数定理的冗长、繁琐的证明过程或者直接略去，或者加以“*”标志，有兴趣的读者可选择阅读. 各章末都配有丰富的习题. 学好线性代数与几何必须有一定量的时间进行思考，同时做一定量的习题，希望读者通过对这些习题的练习，巩固和掌握所学基本理论和方法。

在编写和出版本书的过程中我们得到了北京邮电大学教务处、理学院、数学系的大力支持，在此一并表示诚挚的谢意.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不当和错误之处一定不少，敬请同行和读者批评指正.

编者

2012 年 7 月

目　　录

第1章 行列式

行列式是由解线性方程组产生的,是线性代数学中的一个重要基本概念,它作为一种重要的数学工具,在自然科学的许多领域内都有广泛的应用. 本章先介绍二、三阶行列式,然后介绍n阶行列式的定义、性质和计算方法,最后介绍用n阶行列式求解n元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1 二、三阶行列式

一、二阶行列式

设二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中x_1,x_2为未知量;$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$为未知量的系数;$b_1,b_2$为常数项. 当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时,由消元法得方程组(1.1)的唯一解为

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于叙述和记忆,引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

称D为二阶行列式,简记为$D=\det(a_{ij})$.

数$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的元素. 元素a_{ij}的第一个下标i称为行标,表明该元素位于第i行;第二个下标j称为列标,表明该元素位于第j列.

上述二阶行列式,可用**对角线法则**来记忆. 二阶行列式是两项的代数和,第一项是从左上角到右下角的对角线上两元素的乘积,带正号;第二项是从右上角到左下角的对角线上两元素的乘积,带负号. 按此法则,记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

其中 $D_i(i=1,2)$表示把 D 中第 i 列换成(1.1)式右边的常数列所得到的行列式.

于是，当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1.1)的解就可唯一地表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}. \tag{1.4}$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=5, \\ 2x_1+5x_2=-3. \end{cases}$$

解 由于分母行列式即方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=2\times 5-(-3)\times 2=16\neq 0.$$

x_1 的分子行列式为

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=5\times 5-(-3)\times(-3)=16.$$

x_2 的分子行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-5\times 2=-16.$$

于是根椐二元一次方程组的求解公式(1.4)可得到方程组的唯一解：

$$x_1=\frac{16}{16}=1,\quad x_2=\frac{-16}{16}=-1.$$

二、三阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

可以由前两个方程消去 x_3，而得到一个只含有 x_1,x_2 的方程；同样，可由后两个方程消去 x_3，而得到一个只含有 x_1,x_2 的方程，对这两个新的方程，再利用求解二元一次方程组的方法消去 x_2，就可以解得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.$$

把 x_1 的系数记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

我们把式(1.6)中的记号 D 称为**三阶行列式**.

从这个定义可以看出,三阶行列式表示6项的代数和,每一项都是3个数的乘积冠以适当的正负号,这3个数取之于 D 中不同的行和不同的列. 反之,任意取之于 D 中不同的行和不同的列的3个数的乘积冠以适当的正负号后都是 D 的展开式中的某一项. 我们可以用**对角线法则**来记忆每一项前面的正负号的确定方法. 如图1-1所示,其中各实线联结的三个元素的乘积前面带"+"号,各虚线联结的三个元素的乘积前面带"−"号.

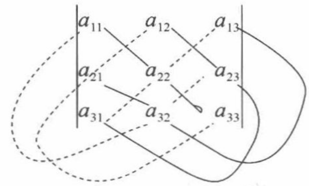

图1-1

称式(1.6)中的 D 为三元线性方程组(1.5)的系数行列式. 根据三阶行列式的定义,有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.$$

若 $D\neq0$,则 x_1 可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},$$

同理可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$D_i(i=1,2,3)$是把系数行列式 D 的第 i 列用线性方程组(1.5)右边的常数列替换后得到的行列式.

例2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=8, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1+2x_2+x_3=8. \end{cases}$$

解 用对角线法则计算行列式,得

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=-2,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&1\\6&1&1\\8&2&1\end{vmatrix}=-2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3&8&1\\1&6&1\\1&8&1\end{vmatrix}=-4,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}3&1&8\\1&1&6\\1&2&8\end{vmatrix}=-6.$$

因此线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

例 3 $\begin{vmatrix}a&*&*\\0&b&*\\0&0&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0&0\\*&b&0\\*&*&c\end{vmatrix}=abc.$

$\begin{vmatrix}*&*&a\\*&b&0\\c&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&a\\0&b&*\\c&*&*\end{vmatrix}=-abc.$

其中，$*$ 表示在这些位置上的元素可以任意取值，它们不影响行列式的值.

解 由对角线法则立得结果.

§1.2 全排列及其逆序数

用对角线法则计算行列式，虽然直观，但对于四阶及更高阶的行列式，该方法就不适用了. 为了求解四元及四元以上的线性方程组，需要把二、三阶行列式的概念进一步推广. 下面先介绍全排列及其逆序数的概念及性质.

一、排列的逆序数

自然数 1,2,3,…,n 按一定顺序排成一排，称为一个 n 元排列，记为 $p_1p_2\cdots p_n$. 排列 123…n 称为**自然排列**. n 元排列共有 $n!$ 个. 例如自然数 1,2,3 共有 $3!=6$ 个全排列. 它们是

$$123,231,312,132,213,321.$$

我们将自然排列规定为**标准次序**. 下面定义排列的逆序数.

定义 1　在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若一个大的数排在一个小的数的前面(即与标准次序不同时),则称这两个数形成一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数,记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如,在四元排列 4132 中出现的所有逆序为 41,43,42,32, 所以 $\tau(4132)=4$.

在自然排列(标准次序)中如果没有逆序,则其逆序数为 0.

下面给出逆序数的计算方法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数为 t_i,全体元素的逆序数的总和就是这个排列的逆序数,即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i. \tag{1.7}$$

例 4　求下列排列的逆序数

(1) 31524;　　　(2) $n(n-1)\cdots21$.

解　(1) 在排列 31524 中:

3 排在首位,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有一个,它是 3,故逆序数为 1;

5 是最大数,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有两个,它们是 3,5,故逆序数为 2;

4 的前面比 4 大的数有一个,它是 5,故逆序数为 1.

因此这个排列的逆序数为

$$\tau(31524)=0+1+0+2+1=4.$$

(2) 同理可得

$$\tau[n(n-1)\cdots21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

二、逆序数的性质

定义 2　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如,自然数 1,2,3 的 6 个排列中,经计算可知偶排列为 123,231,312;奇排列为 321,132,213.

定义 3　将一个排列中的某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到了一个新的排列,称这样的变换为一次对换. 将相邻两个数**对换**,称为**相邻对换**.

定理 1　对排列进行一次对换则改变其奇偶性.

证 首先证明相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b 得到新的排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然，元素 a_1，$\cdots$，a_l；b_1，$\cdots$，b_m 的逆序数没有改变，只有元素 a 和 b 的逆序数改变了.

当 $a<b$ 时，对换后，a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变.

当 $a>b$ 时，对换后，a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1.

因此，对换后新的排列与原排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_s$，$a$ 和 b 之间相隔 k 个数，要实现 a 与 b 的对换，可先将 a 与 b_1 作相邻对换，再将 a 与 b_2 作相邻对换，照此继续下去，经 $k+1$ 次相邻对换，调换成

$$a_1\cdots a_l b_1\cdots b_k bac_1\cdots c_s,$$

然后再把 b 依次与 b_k，b_{k-1}，$\cdots$，b_1 作相邻对换，调换成

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_s.$$

这样，对换 a 和 b，可经过 $2k+1$ 次相邻对换而得到，所以这两个排列的奇偶性正好相反.

由定理 1 可得到下面的推论.

推论 1 奇排列调成自然排列的对换次数为奇数，偶排列调成自然排列的对换次数为偶数.

证 因为自然排列 $123\cdots n$ 是偶排列（自然排列的逆序数为 0），由定理 1 知，一次对换改变排列的奇偶性，当排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇（偶）排列时，必须作奇（偶）次对换才能变成自然排列 $123\cdots n$，故所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性.

推论 2 全体 n 元排列（$n>1$）的集合中，奇排列与偶排列各一半.

§1.3 n 阶行列式的概念

为了把二、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式，下面先研究三阶行列式的结构.

我们把三阶行列式写为

$$\begin{aligned} D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{1.8}$$

可以看出：

(1) 三阶行列式的每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积；

(2) 每一项的三个元素的行标排成自然排列 123 时，列标都是 1,2,3 的某一个排列，这样的排列共有 6 种，故三阶行列式共有 6 项；

(3) 带正号的三项的列标排列是

$$123,231,312,$$

经计算可知都是偶排列；

带负号的三项的列标排列是

$$132,213,321,$$

经计算可知全为奇排列.

因此，三阶行列式可写为

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}, \tag{1.9}$$

$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1 p_2 p_3$ 求和.

用式(1.9)，可以把行列式推广到一般情形.

定义 4　将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，在其左右两侧加两条竖线，按照下式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1.10}$$

计算得到一个数，称为 n **阶行列式**，简记作 $D=\det(a_{ij})$，其中 $\sum$ 表示对所有 n 元排列求和.

式(1.10)右边的每一项 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{1p_2} \cdots a_{np_n}$ 中的每一个元素取自 D 中不同的行和列，行标排成自然排列，相应的列标是 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个 n 元排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$. 若 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是偶排列，则该排列对应的项取正号；若是奇排列，则取负号，每一项的符号用 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 表示. 行列式 D_n 中共有 $n!$ 个乘积项.

定义 4 也适用于二、三阶行列式，按此定义的行列式与第一节中用对角线法则定义的二、三阶行列式是一致的. 对于一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，注意这里的 $|a_{11}|$ 不表示 a_{11} 的绝对值.

一般 n 阶行列式事实上是一个算式，定义 4 是给出了其计算规则.

对角线以下的元素全为 0 的行列式叫做**上三角形行列式**，对角线以上的元素全为 0 的行列式叫做**下三角形行列式**. 上三角行列式与下三角行列式统称为**三角形行列式**.

例 5　证明上三角形行列式