上海市中等师范学校教材

数学

下册

（试用本）

上海教育出版社

目　　录

第六章　有理数和集合

第一节　有理数的认识

在上册中，我们已经研究了非负的整数和分数，以及它们的运算．这些数（通常就叫做**算术数**）只能表示量的大小，不能同时表示量的方向．仅有这些数还不能满足生产和生活的实际需要，这就要求引进新的数，数集也就进一步扩展了．

数集的扩展必须遵循以下几条原则：

(1) 增添了新的元素，新旧元素一起构成了新的数集，新的数集解决了旧数集所不能解决的矛盾．

(2) 在新的数集里，规定了一些基本关系和运算，使原有的一些主要性质仍旧能适用．

(3) 旧元素作为新数集里的成员，原有的运算关系仍保持．

一、具有相反意义的量

温度计上的零上 10 度和零下 10 度，虽然都是 10 度，但它们的意义却是相反的，我们把这样的两个量叫做**具有相反意义的量**．

客观世界中具有相反意义的量是大量存在的．例如，多余与不足，增加与减少，上升与下降，前进与后退，收入与支出，向东与向西等都是具有相反意义的量．

为了区别这些具有相反意义的量，我们把其中的一个量（通常是零上、增加、收入、前进、上升等）规定为正的，而把另

一个和它意义相反的量(通常是零下、减少、支出、后退、下降等)规定为负的.

正的量仍用算术数来表示，负的量就在算术数的前面添上符号“$-$”(读作负)来表示．例如,零上 10℃ 记为 10℃, 零下 10℃ 记为 -10℃.

算术数的前面添上“$-$”号的数(零除外)，叫做**负数**．如 -5, -1.5, $-1\frac{2}{3}$ 等都是负数．为了与负数相区别，不是零的算术数就叫做**正数**．例如 5, 1.5, $1\frac{2}{3}$ 等都是正数．有时为了强调正数对于负数的相反意义，在正数的前面添上符号“$+$”(读作正)来表示,例如 4 可以写成$+4$,但在一般情况下,写正数时,都把“$+$”号省略.

正数和负数是从数量这个侧面来反映客观世界中具有相反意义的量,它不仅反映了数值的大小,而且也反映了数值的方向.

零是一个特殊的数．零既不是正数,也不是负数,是唯一的中性数.

我们把正整数(自然数)、零、负整数统称为**整数**，把正分数和负分数都叫做**分数**．这样，所有的整数和分数就组成了一个新的数集——**有理数集**.

有理数集里的所有的数可以按整数和分数的区别进行分类:

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

有理数集里的所有的数还可以按正数与负数的区别进行分类：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

自然数集合、分数集合都是有理数集合的子集.

负数的引进，对学生来说已是数的概念的第三次扩展(前二次是引进零和分数)，这次扩展比前两次要困难得多，这是因为：

(1) 负数的应用与学生日常生活的联系，不象零和正分数那样密切. 例如，向东走 3 公里，向西走 3 公里，如果以向东的方向作为正方向，而向西走 3 公里说成走了 -3 公里，学生就会感到不习惯. 再如，利用正负数把“收入”和“支出”统一地说成“收入”(例如支出 3 元，改说成收入 -3 元)，“上升”和“下降”统一地说成“上升”(例如下降 3 度，改说成上升 -3 度)等等，与学生的已有常识不一致.

(2) 学生对于数的概念的扩展，还缺少体会. 引进零和分数学生感到很自然，引进负数，情况就有些不同. 那些必须用负数来解决的问题，他们认为用算术里的数同样可以解决，因此，容易产生为什么要引进这种新数的问题.

使学生体会引进负数的必要性，是有理数教学中的一个难点和重要关键. 解决这个问题，我们可以首先从整理学生已经学过的算术数着手，例如：

a. 指出算术数的产生与发展都是人类的实践（如测量等)的需要.

b．在自然数、零、分数之间可以进行加法、减法、乘法、除法等运算．

c．由于解决实际问题(如研究一些数值方向、小数减大数等)的需要，还要学习一种新的数．

接着，我们可以转到负数的学习．举出一些具有相反意义的量的实际问题，研究怎样用数来表示，引进负数的概念．

在引进负数并给出有理数的定义以后，为了使学生对有理数这一概念所包括的整数、分数、正数、负数、零等概念之间的关系有明确的认识，要对有理数进行分类．通过分类，应着重使学生弄清楚：

正整数就是自然数；

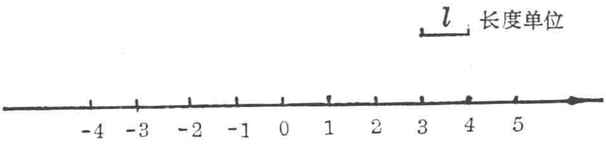
有理数不仅包括正数和负数，而且还包括数零，零既不是正数，也不是负数．

整数里不仅包括自然数和零(这是学生已有的知识)，还包括负整数．

二、数轴

在日常生活中，用直尺上的刻度表示物体的长度，用温度计上的刻度表示温度的高低，这就启发我们，可以把有理数直观地用一条规定了正方向的直线上的点表示出来．

规定了正方向(用箭头表示)**的直线叫做有向直线**．在有向直线上取一点 0 作为起点，表示数零，叫做原点；再取一个线段作为度量的单位．如图



这样，**规定了原点和长度单位的表示数的有向直线就叫**

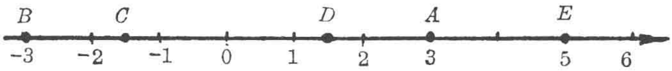
做数轴. 原点、方向和长度单位是数轴的三个要素.

建立了数轴以后，所有的有理数都可以用数轴上的点来表示.

例如，把下列各数用数轴上的点表示出来:

$$3 \qquad -3 \qquad -1.5 \qquad 1.5 \qquad 5$$

解: 先画出数轴，然后在数轴上找出相应的点



如图所示，A、B、C、D、E 各点分别表示 3、-3、-1.5、1.5 和 5.

注意: 任何一个有理数都可以用给定数轴上的唯一的点表示出来，但是数轴上的任意一点却不都表示有理数，也就是说，有理数与数轴上的点不是一一对应的.

选择的例题、习题既要全面(正整数、正分数、零、负整数、负分数都要涉及到)，同时又要学生容易画出；还可以指出，用数轴上的点表示有理数，通常只要求近似地表示出来.

三、相反数和绝对值

1. 相反数

把 3 与 -3, -1.5 与 1.5 在数轴上表示出来，就得到 A、B、C、D 四点(如上图所示)，A、B 两点与原点的距离相等，同样，C、D 两点与原点的距离也相等.

数轴上与原点距离相等的两点所表示的两个数，叫做互为相反的数.

3 与 -3 是互为相反的数，-1.5 与 1.5 也是互为相反的数.

相反数是对两个数的关系而言的，孤立地说"-3 是相反

数”是错误的，应指出 -3 是 $+3$ 的相反数，或 $+3$ 是 -3 的相反数．一般地，$+a$ 的相反数是 $-a$，$-a$ 的相反数是 $+a$.

2．绝对值

在数轴上表示一个数的点，它到原点的距离叫做这个数的绝对值．

一个数的绝对值，我们可在这个数的两旁各画一条竖线来表示，如表示 $+3$ 和 -3 的点到原点的距离都是 3 个单位．它们的绝对值都是 3，记作：

$$|+3|=3 \qquad |-3|=3$$

同理，$|+1.5|=1.5 \quad |-1.5|=1.5 \quad |0|=0$

由此可知，**正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零．**

例如，求下列各数的绝对值：

$$7 \qquad -1\frac{2}{3} \qquad 0.25 \qquad -0.01$$

解：$|7|=7 \qquad \left|-1\frac{2}{3}\right|=1\frac{2}{3}$

$|0.25|=0.25 \qquad |-0.01|=0.01$

一般地，如果用 a 代表任意有理数，则

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{如果 } a \text{ 是正数}) \\ 0 & (\text{如果 } a \text{ 是零}) \\ -a & (\text{如果 } a \text{ 是负数}) \end{cases}$$

记号 $|a|$ 就表示数 a 的绝对值．

从数轴上可以看出，越是右边的点，它所表示的数越大．由此可以得出有理数大小比较的法则：

正数都大于零，正数和零都大于负数；

正数中，绝对值大的数大；

负数中，绝对值大的数小.

例如，比较下列各组数的大小：

(1) $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ (2) -9 和 -1 (3) 4 和 -12

(4) 0 和 -100 (5) $-\frac{5}{6}$ 和 $-\frac{3}{4}$ (6) 8 和 0

解：(1) $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$

(2) $|-9|=9$

$|-1|=1$

$\because\ 9>1$

$\therefore\ -9<-1$

(3) $\because$ 正数大于负数

$\therefore\ 4>-12$

(4) $\because$ 零大于负数

$\therefore\ 0>-100$

(5) 先求绝对值，再通分

$\left|-\frac{5}{6}\right|=\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ $\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$

$\because\ \frac{10}{12}>\frac{9}{12}$ $\therefore\ -\frac{5}{6}<-\frac{3}{4}$

(6) $\because$ 正数大于零 $\therefore\ 8>0$

练 习 一

1. 用正数和负数表示下列具有相反意义的量：

(1) 货物进仓 100 吨，货物出仓 80 吨；

(2) 农业收入 1500 元，农业支出 1200 元；

(3) 向南行 8 公里，向北行 10 公里（以从南向北为正方向）；

(4) 最高温度零上 10 度，最低温度零下 2 度；

(5) 面积增加 5 平方米，面积减少 8 平方米；

(6) 比 100 斤少 3 斤，比 100 斤多 5 斤.

2. 下列数集里有没有最小数和最大数？

(1) 自然数集　　(2) 非负数集　　(3) 有理数集

3. 写出大于 -3 而小于 4 的所有整数.

4. 写出下列各数的相反数：

$$-\frac{1}{2} \qquad 0 \qquad -2\frac{1}{10} \qquad 0.1 \qquad 1$$

5. 把下列各数及其相反数分别在数轴上表示出来：

$$0.5 \qquad -1\frac{2}{3} \qquad 3.1 \qquad -5\frac{1}{4}$$

6. 什么数的相反数(1)是它本身？(2)比它自身大？(3)比它自身小？

什么数的倒数(1)是它本身？(2)比它自身大？(3)比它自身小？

7. (1) 已知 $|a|=|b|$，能否断定 $a=b$？为什么？试举例说明.

(2) 已知 $|a|>|b|$，能否断定 $a>b$？为什么？试举例说明.

(3) 已知 $|a|<|b|$，能否断定 $a<b$？为什么？试举例说明.

8. 把下列各数按照从小到大的顺序用不等号连接起来：

$$-76 \quad 3.6 \quad 2\frac{1}{3} \quad -4.8 \quad -4\frac{5}{6} \quad 0 \quad 12 \quad -1 \quad \frac{1}{2}$$

9. 不用绝对值的符号表示下列各式：

(1) $|x-2|$

(2) $|3-2x|$

第二节　有理数的运算

一、有理数的加法

1. 有理数加法的法则

有理数的加法法则如下:

同号两数相加,取原来的符号,并把绝对值相加;

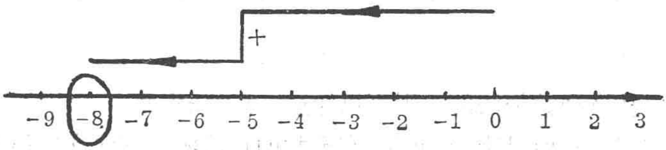
异号两数相加,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值;

互为相反数相加得零;

一个数和零相加,仍得这个数.

这个法则我们可以用从起点出发,经过两次运动(规定向东为正)所得的结果来加以说明.

例如,向西 5 公里,再向西 3 公里.



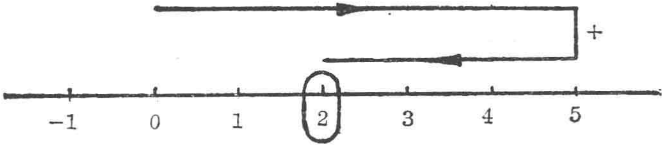
即

$$|-5|+|-3|$$

$$(-5)+(-3)=-8$$

取原来的符号

又如,向东 5 公里,再向西 3 公里.



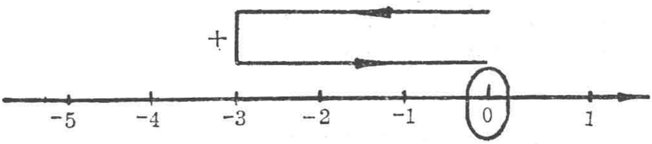
即

$$|+5|-|-3|$$

$$(+5)+(-3)=+2$$

取绝对值较大的数的符号

再如，向西 3 公里，再向东 3 公里.



即 $$(-3)+(+3)=0$$

从有理数加法的法则可以知道，对于任意两个有理数，它们的和存在而且唯一；同时，有理数的加法满足加法交换律和结合律. 但是，算术数具有的两数之和大于或等于加数的特点不再永远存在.

根据加法的交换律和结合律可以推出，三个以上有理数相加，可以任意交换加数的位置，也可先把其中几个数相加.

2. 有向线段求和

在有向直线上，线段也有方向. 有方向的线段，叫做**有向线段**. 有向线段可以用它的两个端点来表示. 例如，A、B、C 表示某有向直线 l 上的三个点，那末，由这三个点组成的有向

线段有六条. 即

$$AB、BC、AC、BA、CB、CA$$

AB 代表以 A 为起点，以 B 为终点的有向线段；以由 A 到 B 的方向作为有向线段 AB 的方向.

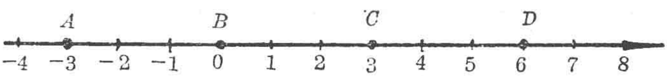
上图所示，有向线段 AB、BC、AC 的方向与有向直线 l 的正方向一致，叫做**正线段**；有向线段 BA、CB、CA 的方向与有向直线 l 的正方向相反，叫做**负线段**；起点与终点重合的有向线段叫做**零线段**. 它的方向可以是任意的，所以它既不是正线段，也不是负线段.

有向线段既有方向也有长度. 有向线段的起点与终点之间的距离就是有向线段的长度，也叫做**有向线段的绝对值**，有向线段 AB 的绝对值记作：$|AB|$.

这样，有理数就可以用有向线段来表示.

通常，我们规定绝对值相等，方向也相同的有向线段是**相等的有向线段**；而绝对值相等，方向相反的有向线段叫做**互为相反的有向线段**. 这样，一个有理数可以用绝对值相等，方向也相同的有向线段来表示.

例如，我们可以用有向线段 AB 表示有理数 3. 也可以用有向线段 BC 或 CD 表示有理数 3.

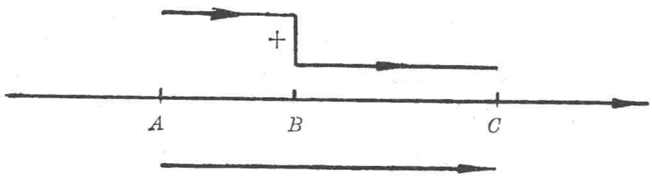


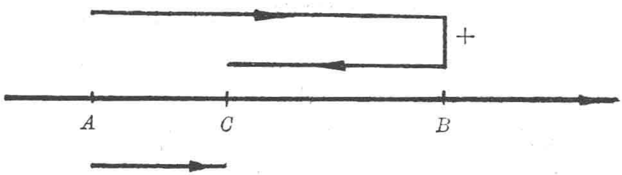
同样，我们可以用有向线段 BA 表示有理数 -3，也可以用有向线段 CB 或 DC 表示有理数 -3.

有理数加法运算的意义，可以用直线上两次运动为例加以说明，也可以用水库水位两次变化或温度两次变化为例加以说明．通过这些实例，我们可以看出，有理数加法的理论基础，就是直线上有向线段求和．

有向线段求和，是以各有向线段首尾相接的方式实现的．

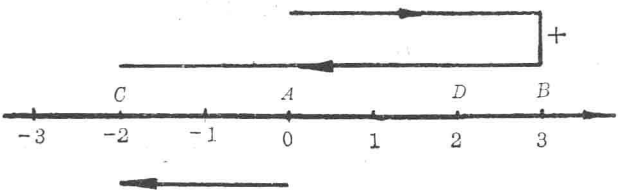
如图所示，有向线段 AC 就是有向线段 AB 与 BC 的和．





用有向线段表示有理数，我们就可以用有向线段求和来导出有理数加法的法则．

例如，
$$(+3)+(-5)=-2$$



即
$$AB+BC=AC$$

有向线段 AB 表示有理数 $+3$，有向线段 BC 表示有理