高等学校試用教科书

結构力学

JIEGOU LIXUE

下　册

金宝楨　楊式德　朱宝华合編
金宝楨主編

人民教育出版社

高等学校試用教科书

結　构　力　学

JIEGOU LIXUE

下　册

金宝楨　楊式德　朱宝华合編
金宝楨主編

人民教育出版社

本书是金宝楨、楊式德、朱宝华三位教师編写的，由金宝楨主編。全书上下两册已于1958、1960年先后出版。1961年4月間，經南京工学院、清华大学、同济大学、天津大学、湖南大学 唐山鉄道学院、华东水利学院等校的有关教师略加增、删、修改后再版。

上册內容包括：靜定結构的計算，彈性体系的基本定理，位移的計算以及用力法計算剛架。下册內容包括：用位移法、漸近法和近似法計算剛架，連續梁，超靜定拱和超靜定桁架的計算，以及极限荷載，稳定計算和动力計算等部分。本书討論了結构力学的基本理論，并且增加了一些結合我国实际情况和联系結构設計的材料。

本书可作为高等工业学校土建、水利类专业“結构力学”課程的試用教科书。亦可供有关工程技术人員参考之用。

本书的原編写分工为：金宝楨同志編写第1、5、10、11、13、14、21各章；楊式德同志編写第2、3、4、9、12、15、17、19、22各章；朱宝华同志編写6、7、18、20各章。

结构力学

下册

金宝楨 楊式德 朱宝华合編

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

民族印刷厂印装

新华書店北京发行所发行

各地新华書店經售

統一书号 15010·904 开本 850×1168 1/32 印张 14 10/16

字数 373,000 印数 17,001—20,000 定價(7)￥1.60

1960年7月第1版 1961年7月第2版 1961年10月北京第4次印刷

下册目录

第十三章　位移法的原理及其对于刚架的应用

§13-1. 前言

除前章所講的力法以外，位移法是解答一般超靜定剛架的另一基本方法。位移法也称为形变法，它与力法的根本区别在于：后者是以"內力"(軸力、剪力和弯矩)作为基本未知量，而前者是以"位移"(結点的綫位移和角位移)作为基本未知量。在力法中，須先求出各多余未知力，才能計算体系內任一截面的內力(M, N 和 Q)；在位移法中，一旦求出各結点的未知位移，則任一杆端的弯矩卽可迎刃而解。

为了具体表明位移法中所取的基本未知量，我們参看图 13-1，其中(a) 示一两层剛架在水平荷載作用下发生的形变情况。单就杆件 ab 来說，它发生了以下三个位移：結点 a 的角变 φ_a，結点 b 的角变 φ_b，和

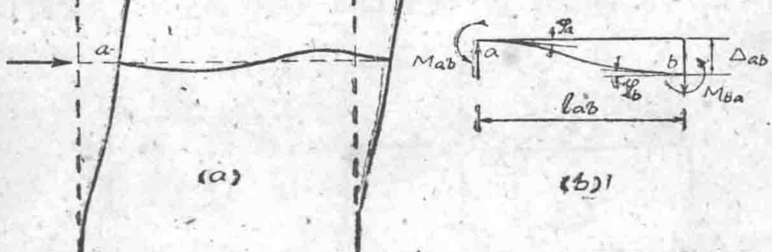


图 13-1

結点 b 对于結点 a 并与杆軸垂直的綫位移 Δ_{ab}，示如图 13-1, b。以后将要証明，杆端弯矩 M_{ab} 和 M_{ba} 均可表示为 φ_a, φ_b 和 Δ_{ab} 的函数。

应当指出，取結点的彈性位移作为未知量时，通常可以略去軸力和剪力对于結点位移的影响，而只考慮弯矩所引起的位移。实际上，这并非一个新的假定，因用力法計算剛架时也同样未曾考慮軸力和剪力对于結构形变的影响。同时，我們还假定直形杆件的原有长度等于其彈性曲綫的弦长，也就是当杆件弯曲时其两端結点之間所发生的接近可略而不計。

§13-2. 未知数总数的确定

位移法中所取的基本未知量是結点的角位移和綫位移。結点的角位移常被称为轉角或角变；其綫位移有时簡称为位移。用位移法分析超靜定剛架时，应先确定該剛架的未知位移的总数 n，即

$$n = n_y + n_\Delta, \tag{13-1}$$

其中 n_y——該剛架的未知角位移数；

n_Δ——該剛架的未知綫位移数。

数值 n_y 的决定非常簡单，因它直接等于剛架的剛結点数。只要数一下已知剛架中有几个剛結点，即可确定 n_y 的数值。应注意，数剛結点时不可包括具有已知零位移的結点，例如剛架固定于地面的那些結点。同时，还必須明确剛結点的概念，即在連到結点的所有杆件中至少要有两个杆件属于剛性接合；例如图 13-2, a 中的結点 *1*, *2*, *3* 和图 13

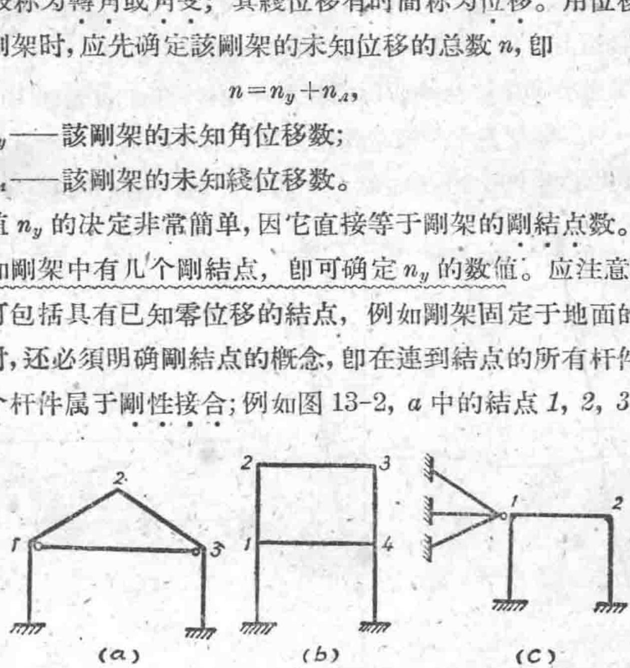


图 13-2

-2, *b* 中的結点 *1, 2, 3, 4*。如果剛架的任一結点包括两个或多个剛性接合，則此結点将具有与剛性接合数目相同的剛結点数；例如图 13-2, *c* 中的結点 *1* 就具有两个剛結点。

关于 $n_л$ 的数值，除簡单情况可用观察法直接看出外，一般可決定如下：将已知剛架所有的剛結点都变成鉸接而得出鉸接图，則此鉸接图的自由度数就等于已知剛架的結点綫位移数($n_л$)。例如在图 13-3 中，(*a*)示已知剛架，(*b*)示其鉸接图，由自由度公式可算得其結点綫位移为

$$n_л = w = 2y - c - c_o = 2\times4-3-3=2。$$

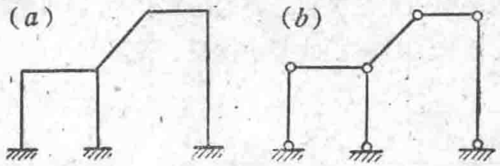


图 13-3

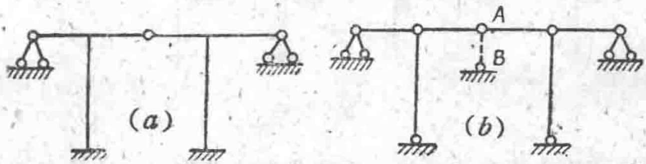


图 13-4

但是应該指出：在有些情况下，*w* 鉸接图的自由度数是不等于結点綫位移数($n_л$)的。例如在图 13-4, *a* 所示剛架中，其鉸接图(图 *b*)的自由度数为零，但事实上需要加上支杆 *AB* 以后体系才是几何不变的，亦卽其結点綫位移数应等于 1。由此可見：一个比較可靠的方法是，剛架綫位移数的計算应根据使其相应的鉸接图成为几何不变所必需加添的支杆数来确定。

根据以上的討論，可得图 13-2 至图 13-4 中各剛架的未知位移总数如下：

从图 13-2, a, $n_y=3$, $n_\Delta=1$, $\therefore n=4$;

从图 13-2, b, $n_y=4$, $n_\Delta=2$, $\therefore n=6$;

从图 13-2, c, $n_y=3$, $n_\Delta=0$, $\therefore n=3$;

从图 13-3, a, $n_y=4$, $n_\Delta=2$, $\therefore n=6$;

从图 13-4, a, $n_y=2$, $n_\Delta=1$, $\therefore n=3$.

§ 13-3. 位移法的基本体系

用位移法計算剛架时，須将已知剛架变成一系列的单跨超靜定梁。只要在已知剛架中引用足够而必要的附加联系，即可实現上述情況。象这样形成的体系称为位移法的基本体系。

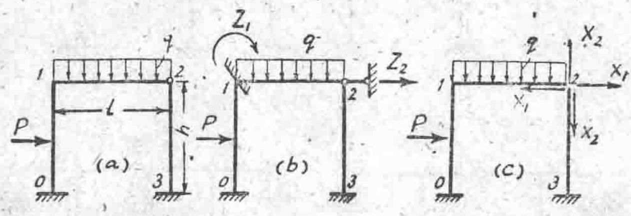


图　13-5

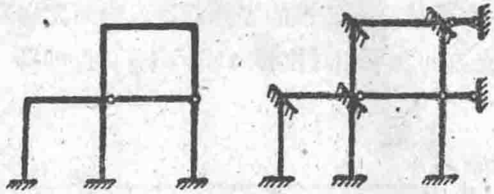
把位移法的基本体系和力法的基本体系作一比較是有意义的。今以图 13-5, a 所示剛架为例。此剛架具有一个未知結点轉角 ($n_y=1$) 和一个未知結点綫位移 ($n_\Delta=1$)。为了使此剛架变成一系列的单跨超靜定架，就需要在已知剛架上加上两个 (因 $n=2$) 附加联系 (图 13-5, b)：一是在剛結点 *1* 处加上一个固定联系，其作用为阻止該結点发生角变；另一是在結点 *2* 处加上一个支杆，其作用为阻止該結点发生綫位移。这样，就形成了位移法的基本体系。从“力”的观点来看，它是一个四次超靜定的体系。如用力法分析此一剛架，則所取的基本体系如图 13-5, c 所示。从图 13-5 中的 (b) 和 (c)，立可看出：

1) 位移法的基本体系是由已知剛架加上联系得出的，而力法的基

本体系是由已知剛架去掉联系得出的;

2) 由已知剛架变成位移法的基本体系时将增加其超靜定次数,但当它变成力法的基本体系时将使其超靜定次数降低为零。

一般說来,为了得出位移法的基本体系,就需要:(1)在剛架的所有剛結点处都安置固定联系,以阻止結点发生角变;(2)在已知剛架的适当地点加上足够的支杆,以阻止結点发生綫位移。图 13-6 示另一剛架及其基本体系。



(a) (b)

图 13-6

从靜力方面来說,位移法的基本体系与已知体系之間的区别在于:由于已知荷載或位移将使固定联系內产生反矩及在支杆內产生反力。

从机动观点来看,在位移法的基本体系中所加的每一个固定联系只相当于一个联系,它只起着阻止相应結点发生角变的作用,而并不妨碍它发生綫位移。因此,这种固定联系决不同于具有絕对剛性的固定端,因为后者是相当于三个机动联系的。对于已知剛架来說,固定联系內的反矩就是作用于所在結点的弯矩。

§13-4. 等截面单跨超靜定梁的数据及角变位移方程

如前所述,位移法的基本体系是由一系列单跨超靜定梁构成的。这些单跨超靜定梁的支承情况一般可分为以下两种:一种是一端固定而另一端鉸接;另一种是两端均为固定。在位移法的計算中,我們要用到上述每一种梁的这样一些数据:由于已知荷載在梁端引起的弯矩和反

力；由于固定端的单位角变在梁端引起的弯矩和反力；由于梁的一端对于另一端并在梁軸垂直方向的单位位移在梁端引起的弯矩和反力；由于不均匀加热在梁端引起的弯矩和反力；等等。所有这些数据均可应用力法求出，在前一章中已經計算过一些情形。关于上述两种等截面超静定梁在各种影响下所引起的支座弯矩和支座反力，如表13-1所示。

显然，当梁上受有两种或多种影响时，则在梁端引起的总弯矩与总反力应等于由于每种影响个别作用时所得弯矩与反力的代数和。例如，对于一端固定而另一端鉸接的等截面梁，当固定端发生角变 φ_A 及两端在梁軸垂直方向发生相对位移 Δ(图 13-7)时，则得

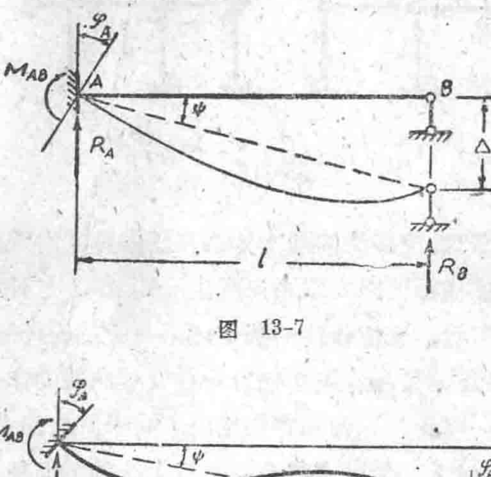


图　13-7

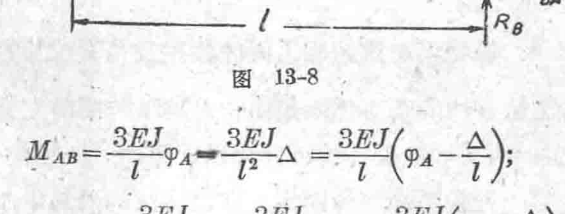


图　13-8

$$M_{AB}=\frac{3EJ}{l}\varphi_A-\frac{3EJ}{l^2}\Delta=\frac{3EJ}{l}\left(\varphi_A-\frac{\Delta}{l}\right);$$

$$R_A=-\frac{3EJ}{l^2}\varphi_A+\frac{3EJ}{l^3}\Delta=-\frac{3EJ}{l^2}\left(\varphi_A-\frac{\Delta}{l}\right);$$

表 13-1 等截面梁的反力

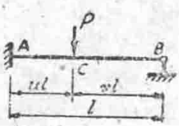
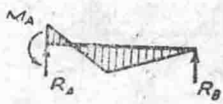
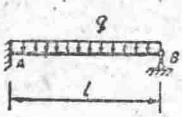
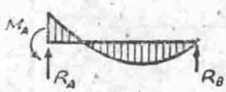
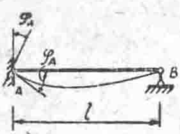
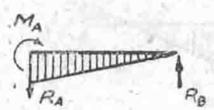
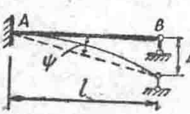
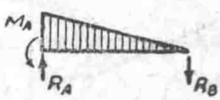
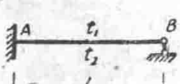
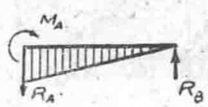
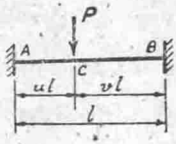
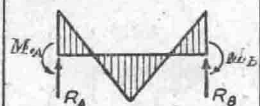
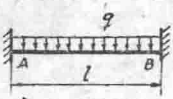
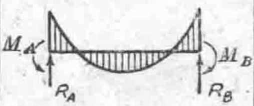
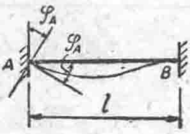
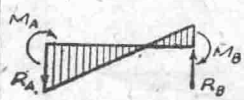
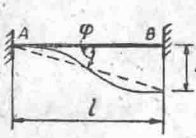
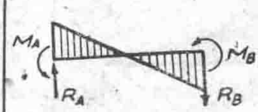
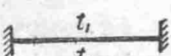
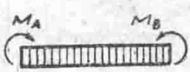
号碼	梁的計算簡图及其所受影响	弯矩图及反力	公式
		一端固定而另一端鉸接的梁	
1			$M_A=-\frac{Pl}{2}v(1-v^2)$ $M_C=\frac{Pl}{2}u^2v(3-u)$ $R_A=\frac{Pv}{2}(3-v^2)$ $R_B=Pu^2\left(1+\frac{v}{2}\right)=\frac{Pu^2}{2}(3-u)$
2			$M_A=\frac{ql^2}{8}$ $R_A=\frac{5}{8}ql$ $R_B=\frac{3}{8}ql$
3			$M_A=-\frac{3EJ}{l}\varphi_A$ $R_A=-R_B=\frac{3EJ}{l^2}\varphi_a$
4			$M_A=-\frac{3EJ}{l^2}\Delta=-\frac{3EJ}{l}\psi$ $R_A=-R_B=\frac{3EJ}{l^3}\Delta=\frac{3EJ}{l^2}\psi$
5	 $t_1>t_2$		$M_A=\frac{3EJ\alpha\Delta t}{2h}$, 其中 h—橫截面的深度; α—綫膨脹系数。 $R_A=-R_B=-\frac{3EJ\alpha\Delta t}{2hl}$

表 13-1（续）

号碼	梁的計算簡图及其所受影响	弯矩图及反力	公　　式
		两 端 固 定 梁	
6			$M_A=-uv^2Pl$ $M_B=u^2vPl$ $M_C=2u^2v^2Pl$ $R_A=v^2(1+2u)P$ $R_B=u^2(1+2v)P$
7			$M_A=-M_B=-\frac{ql^2}{12}$ $R_A=R_B=\frac{ql}{2}$
8			$M_A=\frac{4EJ}{l}\varphi_A$ $M_B=\frac{2EJ}{l}\varphi_A$ $R_A=-R_B=-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_A$
9			$M_A=M_B=-\frac{6EJ}{l^2}\Delta=-\frac{6EJ}{l}\psi$ $R_A=-R_B=-\frac{12EJ}{l^3}\Delta=$ $=-\frac{12EJ}{l^2}\psi$
10	 $t_1-t_2=\Delta t$		$M_A=-M_B=\frac{EJ\alpha\Delta t}{h}$, 其中　h—横截面的深度; α—綫膨脹系数。 $R_A=R_B=0$.

$$R_B=\frac{3EJ}{l^2}\varphi_A-\frac{3EJ}{l^3}\Delta=\frac{3EJ}{l^2}\left(\varphi_A-\frac{\Delta}{l}\right).$$

令 $\frac{J}{l}=K$ 及 $\frac{\Delta}{l}=\psi$，则得

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=3EK(\varphi_A-\psi),\\R_A&=-\frac{3EK}{l}(\varphi_A-\psi);\\R_B&=\frac{3EK}{l}(\varphi_A-\psi).\end{aligned}\right\}\tag{13-2}$$

其次，对于两端固定的等截面梁，当 A 端发生角变 φ_A，B 端发生角变 φ_B 及两端在梁軸垂直方向发生相对位移 Δ(图 13-8)时，则得

$$M_{AB}=\frac{4EJ}{l}\varphi_A+\frac{2EJ}{l}\varphi_B-\frac{6EJ}{l^2}\Delta=\frac{2EJ}{l}\left(2\varphi_A+\varphi_B-3\frac{\Delta}{l}\right);$$

$$M_{BA}=\frac{4EJ}{l}\varphi_B+\frac{2EJ}{l}\varphi_A-\frac{6EJ}{l^2}\Delta=\frac{2EJ}{l}\left(2\varphi_B+\varphi_A-3\frac{4}{l}\right);$$

$$R_A=-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_A-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_B+\frac{12EJ}{l^3}\Delta=-\frac{6EJ}{l^2}\left(\varphi_A+\varphi_B-2\frac{\Delta}{l}\right);$$

$$R_B=\frac{6EJ}{l^2}\varphi_B+\frac{6EJ}{l^2}\varphi_A-\frac{12EJ}{l^3}\Delta=\frac{6EJ}{l^2}\left(\varphi_B+\varphi_A-2\frac{\Delta}{l}\right);$$

即

$$\left.\begin{aligned}M_{AB}&=2EK(2\varphi_A+\varphi_B-3\psi);\\M_{BA}&=2EK(2\varphi_B+\varphi_A-3\psi);\\R_A&=-\frac{6EK}{l}(\varphi_A+\varphi_B-2\psi);\\R_B&=\frac{6EK}{l}(\varphi_B+\varphi_A-2\psi).\end{aligned}\right\}\tag{13-3}$$

式(13-2)中的第一式和式(13-3)中的前二式都是把梁端弯矩表示为結点角变和位移的函数，因而这些式子称为角变位移方程。如果梁

上受有荷載，还需要在各式的右边加一荷載項，这个荷載項是由于已知荷載在梁端引起的固端弯矩$\mathfrak{M}$。

应注意，式(13-2)和式(13-3)中的φ_A，φ_B和ψ都是指的正号。角变φ和ψ正負号是这样規定的：从杆軸原来位置量到发生角变后彈性曲綫的切綫为順时針方向时，此角变为正；反此，則为負。位移$\Delta(=\psi l)$的正負号和角变ψ一致。当φ或ψ为負号时，应将其負号代入角变位移方程。这样，如得出的杆端弯矩为一正号，这表示此端矩系在順时針方向；如得一負号，就表示它在反时針方向。

本节所提供的单跨超靜定梁的数据都是属于等截面梁。关于变截面杆件的角变位移方程，将在本章§13-11中討論。

§13-5. 位移法的概念及其典型方程

为了便于闡明位移法的物理概念，茲以图13-9，a所示剛架为例。先建立此剛架的基本体系（图13-9，b），其中在剛結点1置一固定联系，在結点2置一支杆。不难看出，在固定联系1內引起的反矩和在支杆2內引起的反力都是来自两方面的影响：一为单純由于已知荷載的影响，此时各結点旣无角位移又无綫位移；另一为在去掉已知荷載后由

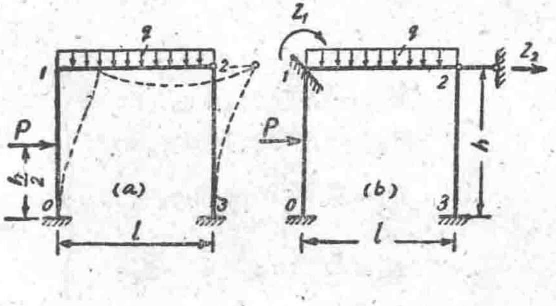


图　13-9

于剛結点1发生角位移Z_1和竖柱上端发生綫位移Z_2的影响。Z_1和