

ISSN 0255-8297
CODEN YK XUD 4

应用科学学报

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

第 14 卷
VOL. 14

第 2 期
NO. 2

1996

《应用科学学报》编辑委员会编辑
上海科学技术出版社出版

ISSN 0255-8297



编辑委员会

主 编	黄宏嘉					
副 主 编	汤定元	邹世昌	方明伦	陈益新	吴鸿适	
	夏道行					
编 委	丁维钰	王乃粒	王生洪	韦 钰	严义埏	
	陈锡培	张美敦	林福成	欧阳邕	姚林声	
	郭本瑜	徐得名	龚振邦			

编辑部

主 任	陈锡培	姚林声				
编 辑	王启华	许新民	陈志良	吴国忠	林基青	
	曹培华					
特 约 编 辑	夏国智					

应用科学学报

第14卷 第2期

目次

在结构声研究中的力矩激励	邱树业 Jiang Jianzhong B M Gibbs	(127)
分数阶复宗量圆柱函数的数值计算	王锡良 冯永成 沈丽英 卿显明	(136)
二维介质体剖面重建的时域非线性优化方法	余文华 彭仲秋 任 朗	(141)
分形图形的面积效应与材料断口分维研究	何宗彦	(149)
CaLa_2S_4 的固体粒子冲蚀	高 桦 孙琦清 J E Field	(158)
自适应 FSK 解调方法	胡爱群 苏 杰	(167)
正态分布位置参数基于不完全数据的区间估计	朱 宏 吕 恕	(173)
模糊数学理论在复合材料中的应用——ARALL 层板性能影响因素的模糊数学 法综合评判	仲伟虹 陈昌麟 郑瑞琪 李宏运 胡宏军 强 伟 王玉璞	(179)
到达时间不同的工件作成组加工时的最大迟后问题	孙世杰	(186)
推力滑动轴承的加速磨损试验和可靠性研究	张祖明	(191)
缓磨时工件表层温度分布的计算机仿真研究	徐鸿钧 徐西鹏 许洪昌 张幼楨	(199)
磨抛工艺参数的微机测控及模糊控制	刘明远 冀春荣 方剑虹 杨林森	(208)
任意形状凸域保角映射成半平面域的方法	许立忠	(215)
铁磁膜的居里温度	吴雪原 顾世清 李惠生	(219)

研究简报

曲面积分法求解双曲线模轴对称拔制	赵德文 王国栋 钟 军 董希俭	(223)
低 ROS 选频滤波副反射面天线	冯 林 邓书辉 阮颖铮 胡玉兰	(229)
毫米波双极化网络研究	姚德森 蔡凌飞 毛钧杰	(233)
利用 UOT 仪检测套管变形	段方勇 屈万里 黄载禄	(239)
复合结构的静电感应器件	李思渊 刘 肃 刘瑞喜 杨建红	(243)
露点法测定 $\text{Hg}_{1-x}\text{O}_x\text{Te}$ 熔体平衡 Hg 蒸气压	桑文斌 于美云 吴汶海	(248)

JOURNAL OF APPLIED SCIENCES

Vol. 14, No. 2, June, 1996

CONTENTS

Moment Excitation on Studies of Structure-Borne Sound...	<i>Qiu Shuye Jiang Jianzhong B M Gibbs</i>	(135)
The Numerical Computation of Cylindrical Functions for Fractional Orders and Complex Arguments	<i>Wang Xiliang Feng Yongcheng Shen Liyin Qing Xianming</i>	(140)
Nonlinear Time-Domain Optimization of Two-Dimensional Lossless Dielectric Inhomogeneity Profile Reconstruction.....	<i>Yu Wenhua Peng Zhongqiu Ren Lang</i>	(148)
The Area Effect of Fractal Figure and the Research on the Fractal Dimension of Fractures.....	<i>He Zongyan</i>	(157)
Solid Particle Erosion of CaLa_2S_4	<i>Gao Hua Sun Qiqing J E Field</i>	(166)
An Adaptive Demodulation Metndod for FSK Signals	<i>Hu Aiqun Su Jie</i>	(172)
Confidence Interval Estimation for the Location Parameter of Normal Distribution from Incomplete Data	<i>Zhu Hong Lu Shu</i>	(178)
Application of Fuzzy Theory to the Study of Composite: Factors Influencing Properties of ARALL Analysed by Multi-Criteria of Fuzzy Theory	<i>Zhong Weihong Chen Changqi Zheng Ruiqi Li Hongyun Hu Hongjun Qiang Wei Wang Yuying</i>	(185)
The Maximum Lateness of the Jobs with Different Releasing Times and Processed in Batches	<i>Sun Shijie</i>	(190)
The Accelerated Wear Test and Reliability Research of Thrust Sliding Bearing	<i>Zhang Zuming</i>	(198)
A Study on Temperature Distribution in Workpiece Surface Layer During Creep Feed Grinding by Computer Simulation Technique.....	<i>Xu Hongjun Xu Xipeng Xu Hongchang Zhang Youzhen</i>	(207)
Microcomputer Detection and Fuzzy Control of Polishing Technological Parameters.....	<i>Liu Mingyuan Ji Chunrong Fang Jianhong Yang Linsen</i>	(214)
A Method Transforming the Semi-Infinite Domain of Arbitrary Shape Curve Boundary into the One of Straight Boundary Line	<i>Xu Lizhong</i>	(218)
The Curie Temperature of Ferromagnetic Films.....	<i>Wu Xueyuan Gu Shiwei Li Weisheng</i>	(222)

RESEARCH NOTES

The Surface Integral to Solve Axisymmetric Drawing Through Hyperbolic Die.....	<i>Zhao Dewen Wang Guodong Zhong Jun Dong Xijian</i>	(228)
FSS Subreflector Antenna with Small RCS.....	<i>Feng Lin Deng Shuhui Ruan Yingzheng Hu Yulan</i>	(232)
mm-Band Dual-Polarized Network.....	<i>Yao Temiao Qi Lingfei Mao Junjie</i>	(238)
Case Form Checked with UCT.....	<i>Duan Fangyong Qu Wanli Huang Zailu</i>	(242)
The Static Induction Devices with Complex Structure	<i>S Y Li S Liu R X Liu J H Yang</i>	(247)
Pressures over the Melts of $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ Determined by Dew Point Measurement.....	<i>Sang Wenbin Yu Meiyun Wu Wenhai</i>	(252)

在结构声研究中的力矩激励*

邱树业 Jiang Jianzhong B M Gibbs
(汕头大学) (Liverpool University)

摘要 介绍一种由两根平行的磁致伸缩棒组成的力矩激振器,并提出了它的声学 and 磁学方面的设计.对三种不同结构的激振器分别以并行和串行磁路结构的磁偏置进行了分析和研究,为优化力矩激振器的设计提供了依据.

关键词 磁致伸缩棒 力矩激振器 弯曲波 互功率谱方法

机器和其它振动源,不仅能够激发平动的结构噪声(结构声),而且还能激发转动的结构声,进入支撑结构和与之相连接的结构.因此,结构声的发射是一个多自由度的问题.然而,转动自由度的结构声发射人们知道甚少,这是因为转动问题在理论上比较复杂,同时在实验上缺乏有效的、为人们所接受的试验方法.

1987年B A T Petersson提出了利用两根磁致伸缩合金棒构成的力矩激振器初型^[1],之后该激振器在英国利物浦大学声学研究单位得到改进并成功地用于转动自由度的导纳测量^[2~4].然而,一方面就激振器本身来说仍然存在许多不完善的地方,需要作进一步改进;另一方面,随着结构声研究的深入,对力矩的激励提出了更高的要求.例如,要求它在更高的频率区域工作和具有更大的功率激励能力等,这就要求对力矩激振器的设计以及激励的特性等作进一步的研究.

本文从声学和磁学方面对力矩激振器的设计进行了讨论,对激振器的不同磁路结构的表面磁场强度、电-机转换效率和非线性畸变进行了测量,从而对力矩激振器的优化设计提供了十分有意义的数据.

1 力矩激励

采用一个力矩激振器来进行力矩激励.

如图1所示,力矩激振器主要由两根完全相同的磁致伸缩合金棒(1)构成,在其周围绕上螺旋形线圈(2).当线圈加上一定频率的交变电流时,两棒在交变磁场的作用下,发生伸长形变,产生相位完全相反的运动,通过压板(3)向所要激励的结构施加力矩.该力矩同时作用在一个振动质量块(4)上,根据动量矩定理,由其转动的角加速度便可以近似计算出力矩大小.

四个永磁铁(5)构成了一对并行的磁路(或串行),以提供一个磁偏置,使伸缩棒工作

收稿日期:1994-12-25

第一作者邱树业:教授,汕头大学物理系,汕头 515063

*“英中学术交流计划”项目

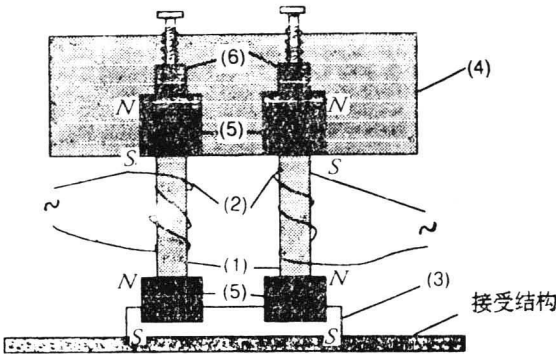


图 1 力矩激振器的结构图

在形变(S)~磁场强度(H)关系曲线的线性区域^[5](见图 3)。调节两个螺丝通过一个铜压块(6)分别向两棒施加一个预压力,以获得最理想的振动状态。

2 声学设计

从声学角度要求力矩激励的区域必须近似一个点。力矩激振器在平板结构中主要是激发弯曲波,为此,要求激振器压板的尺寸与弯曲波波长相比要小,这也就决定了激振器工作频率的上限。对于一个平板结构,弯曲波波长由下式^[6]决定

$$\lambda_B = C_B / f = (1.8 C_L h / f)^{1/2} \tag{1}$$

式中 C_B 和 C_L 分别为结构中弯曲波和纵波的波速度, h 和 f 分别为结构厚度和频率。如果力矩激振器用于机器的结构声实验,对于钢材的基板、厚度分别为 3mm 和 5mm,对应于不同频率的弯曲波波长和推荐的压板尺寸,列于表 1。

一般要求压板尺寸小于 $\lambda_B/2$, 现有的激振器压板尺寸为 40mm×40mm。对于厚度 5mm 的基板,可以工作到 5 kHz 频率,但对于 3mm 厚的基板却只能工作在 3kHz 以下。为此,必须根据不同的研究对象,设计力矩激振器的压板。

表 1 钢板中弯曲波波长和推荐的压板尺寸

$C_L \approx 5000 \text{ ms}^{-1}$					
$h=3 \text{ mm}$			$h=5 \text{ mm}$		
$f \text{ (Hz)}$	$\lambda_B \text{ (m)}$	推荐压板尺寸 (mm)	$f \text{ (Hz)}$	$\lambda_B \text{ (m)}$	推荐压板尺寸 (mm)
100	0.52	250	100	0.67	330
500	0.23	100	500	0.30	150
1000	0.16	80	1000	0.21	100
5000	0.074	35	5000	0.095	45
10000	0.0052	2.5	10000	0.067	32

压板的存在,使得作用于结构上的实际力矩小于作用于振动块的力矩,因而产生一定的测量误差. 如果前者用 M' 表示,后者用 M 表示,则它们的关系如下

$$M = M' + m \quad (2)$$

式中 m 是加在压板上使之转动的力矩. 假定力矩激励器运动时,压板和振动块具有相同的角加速度,那么 $m/M = i_m/I_m$, 其中 i_m 和 I_m 分别为压板和振动块绕其质心的转动惯量. 由此可以粗略估计一下这个误差大小. 现有的激励器,振动块体积为 $100\text{m} \times 40\text{m} \times 40\text{m}$, 由黄铜或铜材料制成的,而压板体积为 $40\text{m} \times 40\text{m} \times 5\text{m}$, 由铝材料制成的,所以有 $m/M \approx 1\%$. 在一般情况下,此误差是可以忽略的.

3 磁路设计

3.1 磁路分析

力矩激励器的磁路设计是获得一个高效、线性的电能-机械能转换的关键. 四个永磁铁(八个磁极)有两种排列:一种是如图 1 所示,两个一对构成了两支并行的磁路;另一种是四个磁铁排列成串行磁路. 磁路设计要求:磁路短、磁阻小、避免磁极“短路”现象发生. 因此必须视整个激励器的结构、形状、线度来选择磁路结构.

作为一个例子,我们对图 1 所示的激励器中两个完全相同的并行磁路中的一支用一个类比线路图来分析,如图 2 所示. 图中 R_1 为永磁铁的内磁阻, R_2 为磁致伸缩棒的磁阻, R_3 为振动块的磁阻,而 R_0 为空气磁路的磁阻. F_m 代表永磁铁的磁势.

整个磁路的总磁阻为 $R = 2R_1 + R_2 + R_3 + R_0$, 整个回路的磁通量为 $\phi = 2F_m/R$, 而磁致伸缩棒的两端的磁势为

$$F'_m = R_2\phi = 2F_m R_2 / (2R_1 + R_2 + R_3 + R_0), \quad (3)$$

因为 $F'_m = HL_2$, 式中 H 为磁场强度, L_2 为棒长,如果忽略 R_1 和 R_3 , 则

$$H = F'_m / L_2 = 2F_m R_2 / (R_2 + R_0) L_2, \quad (4)$$

再利用关系式 $R_2 = L_2 / A_2 \mu_2$, $R_0 = L_0 / A_0 \mu_0$, 式中 L_2 和 L_0 分别表示棒长和空气磁路长度, A_2 和 A_0 表示两者磁力线通过的横截面积,而 μ_2 和 μ_0 表示两者的磁导率. 若令 $A_2 \approx A_0$, 又考虑到 $\mu_2 \approx 5\mu_0$ ^[5], 则式(4)简化为

$$H = 2F_m / (L_2 + 5L_0) \quad (5)$$

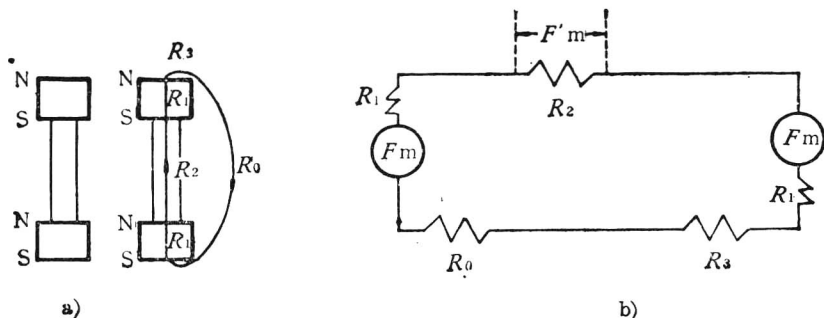


图 2 力矩激励器的磁路设计

a) 并行磁路结构 b) 磁路类比线路

由此可见,若要 H 大,则 L_2 和 L_0 要短;另一方面如果磁极短路, F_m 减小, H 也因此减小.

图 3 所示的是磁致伸缩合金棒 $\text{Tb}_{0.3}\text{Dy}_{0.7}\text{Fe}_{1.95}$ 的一组 $S \sim H$ 曲线^[5],其中以预压力

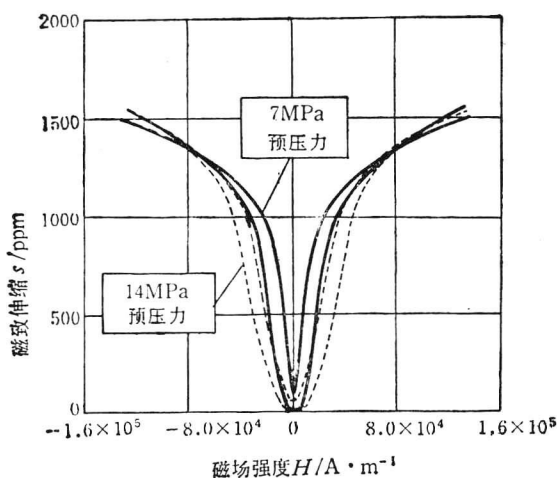


图 3 不同预压力下的一组 $S \sim H$ 曲线

测量,对不同的磁路结构进行了分析,为磁路设计提供了必要的实验数据. M_1 和 M_2 是同样的机械结构和尺寸,所不同的是振动块的材料: M_1 是钢, M_2 是黄铜. 在 M_3 结构中,两棒与永磁铁块间使用了半球状软铁接头以减小转动摩擦. 此外,为减少磁极短路,永磁铁没有埋入振动块内,因而增加了整个结构的长度. 它们的结构如图 4 所示.

磁致伸缩棒的表面磁场强度大致正比于棒内的磁场,因此棒表面磁场分布可以揭示棒内的磁场分布规律. 我们对以上三种激振器分别以并行和串行的磁路结构设计,测量其棒表面的磁场强度,部分结果示于图 5 和图 6.

图 5 表示了 M_1 和 M_2 激振器的并行磁路结构的棒表面磁场强度的分布情况. 图中横坐标 d 是距振动块下缘的距离,单位以 mm 计;纵坐标 H 表示棒表面的磁场强度单位

为参数. 磁偏置的作用在于使棒在一定的预压力下工作在某一曲线的线性区域的中心位置,再叠加上交变磁场,产生线性的、高效的振动. 限于图 1 的结构,一般磁偏置较小,因此注意增加棒内的磁场强度显得十分重要.

这里要指出,以上磁路分析同样适用于交变磁场. 磁路内磁阻增加,必将增加交变磁场的能量损耗,所以缩短磁路、增加磁导率将会提高电能-机械能转换效率.

3.2 磁场测量

我们对三种力矩激振器(定名为 M_1 、 M_2 和 M_3)的磁场强度进行了

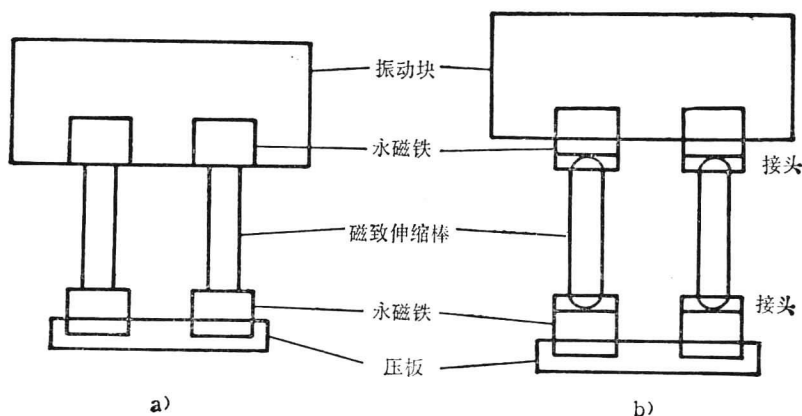


图 4 三种不同结构的力矩激振器

a) M_1 和 M_2 b) M_3

以 A/m 计。曲线呈马鞍形似表明：从磁极开始磁力线向外发散。比较曲线 a 和 b 可以清楚地看出： M_1 结构中由于两块永磁铁埋到钢振动块中，造成永磁铁的两极短路现象，减弱了棒的磁场强度。由曲线 M_2 可以估算出棒表面磁场强度约为 $10500 A/m$ ，这表明棒内磁场强度在适当的预压力下可以达到图 3 所示的一组曲线中某条的线性区域。图 6 的三条曲线分别表示了 M_2 并行和串行以及 M_1 的串行磁路结构的棒表面磁场强度分布情况，这些曲线在图中分别以 M_{br1} 、 M_{br2} 和 M_{st2} 表示之。比较 M_{br1} 和 M_{br2} ，发现很大范围内 M_{br2} 值降低，这显示了在串行磁路结构中，由于两个并排的磁铁相距很近，磁极间出现短路现象，而 M_{st2} 曲线在靠近振动块附近，磁场强度严重下降，是由于磁极的双重短路的结果，即不但同一磁铁两极短路而且并排的两磁铁磁极之间也发生短路，从而大大削弱了磁场强度。对激振器 M_3 的棒表面磁场强度测量结果表明，由于该结构中，磁铁只有一半进入软铁振动块，磁场强度比同样磁路结构的 M_1 略为提高。因此，在磁路设计中应该尽量避免各种磁场的短路现象发生。最后，将三种激振器的磁路状况作一评价，列于表 2。

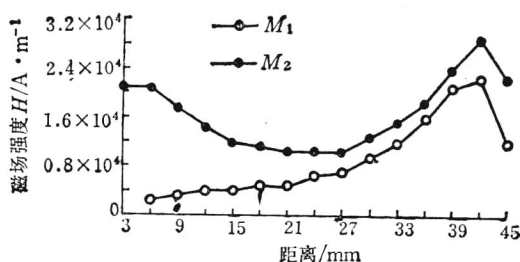
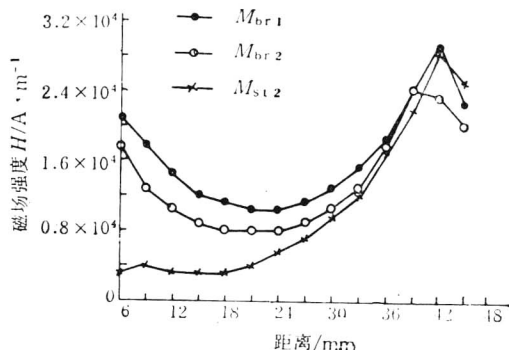
图 5 M_1 和 M_2 并行磁路结构的棒表面磁场强度分布

图 6 三种磁路结构棒表面磁场强度分布

表 2 几种磁路结构的评价表

激振器 (振动块材料)	磁路结构	同一磁铁 磁极短路	不同磁铁间 磁极短路	磁场强度	磁路磁阻
M_1 (钢)	并行	有	无	弱	较大
	串行	有	有	最弱	小
M_2 (黄铜)	并行	无	无	最强	大
	串行	无	有	强	较小
M_3 (软铁)	并行	部分	无	强	较大
	串行	部分	有	弱	最小

4 功率和电-机转换效率

力矩激振器可以用如图 7 所示的阻抗型类比电路图说明。其输入端为电流 i 和电压 V ，其输出端为力矩 M 和角速度 w ，显然 M 和 w 都受到外负载 R 的影响，因此其输出功率也同样受到被测结构(机械负载)的影响。被测结构常称之为接受结构。

动惯量有关. 式(7)和式(8)右边方括号内的值, 就是两个加速度差值的互功率谱. 本文利用一个双通道 FFT 分析仪来测量这个互功率谱, 最后的实功率谱是由一台 PO 机来计算获得的.

作为一个例子, 图 9a 和 b 分别表示了一个力矩激振器的力矩功率输出和相应的电功率输入. 在这个例子里, 机械负载是一个金属薄板结构的弹性支撑系统. 电复功率同样使用互功率谱法测量, 其电流是由一个串接在输入回路上的纯电阻获得的. 从图中可以知道: 力矩功率输出对于薄板结构来说约在 $10^{-8} \sim 10^{-7} \text{ W}$ 的数量级. 比较 a 和 b, 显然高频的电-机功率转换效率高于低频.

力矩激振器的电-机功率转换效率与内部能量耗散有关, 是检验激振器好坏的重要参量之一, 也可以用它来检验激振器内部结构和机械结构的合理性.

我们对上述的三种激振器分别以并行和串行磁路结构, 测量其电-机功率转换系数. 机械负载仍为金属薄板结构系统, 其结果表示于图 10. 图中 M_{3s} 表示了 M_3 激振器串行磁路结构的电-机转换系数, 在频率 1kHz 以上, 转换系数高达 10^{-2} 数量级, 而 M_{1p} 和 M_{2p} 分别表示了 M_1 和 M_2 激振器并行磁路结构的转换系数, 它们在高频区约在 10^{-3} 数量级. M_{1p} 与 M_{2p} 比较, M_{1p} 略高, 显然是由于使用了钢这种高导磁率材料, 减小了整个磁路的磁阻所致. M_{3s} 在整个频率范围内都比其它两条曲线高, 其原因有三: 1 振动块采用软铁(磁导率更高); 2 采用串行磁路结构减小磁阻; 3 螺旋管单位长度的线圈数在三者中最多.

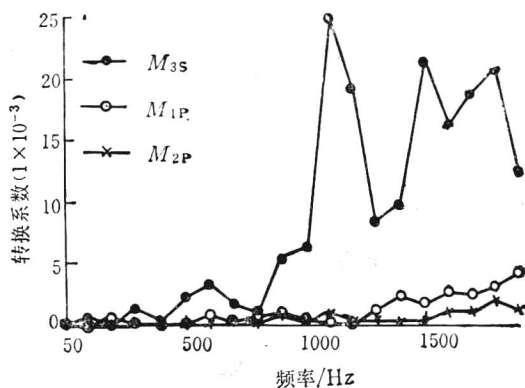


图 10 三种力矩激振器的电机转换系数

5 非线性畸变

对于一个力矩激振器来说, 其输出应忠实地反映输入的频率响应. 如果激振器内部的磁偏置不在 $S \sim H$ 曲线的线性区的中心位置(见图 3), 对于大的信号输入就会产生非线性畸变, 从而产生了高次谐波成分.

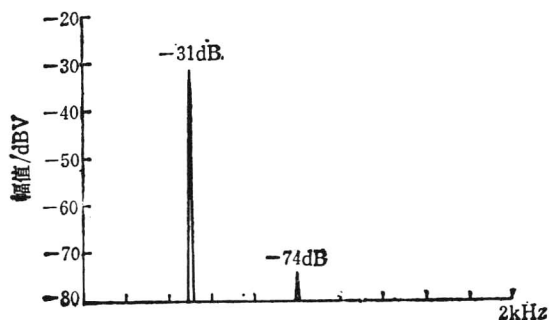


图 11 力矩激振器 M_1 并行磁路结构的非线性畸变情况

固然调节预压力可以作适当改善, 但这种改善是有限的. 为此, 我们对以上几种不同磁路结构的激振器进行了非线性畸变的测量以检验磁偏置的状况.

由于力矩输出受接受结构影响, 选择一个结构对称的水泥块弹性支撑系统作为测量标准系统, 测量装置可参照图 8, 其中只保留一对加速度计

a_3 和 a_4 , 并由一台双通道 FFT 分析仪的一个通道 (A 或 B 通道) 来测量. 力矩输出由式 (6) 的第一式表示. 力矩激振器输出的非线性畸变测量, 实际上就是对两个加速度信号差值 ($a_3 - a_4$) 的频率的响应测量. 我们选择 500 Hz 正弦电信号作为激振器的输入, 测量 ($a_3 - a_4$) 的频谱.

作为一个例子, 图 11 表示了激振器 M_1 并行磁路结构的 ($a_3 - a_4$) 谱, 这个结果是在输入电功率为 3.2 W 情况下获得的. 图中主波和二次谐波相差 43 dB, 即二次谐波幅值只占主波的千分之七左右, 这表明畸变是很小的. 部分测量结果列于表 3.

表 3 不同结构的激振器非线性畸变情况

激振器 (磁路结构)	输入电功率 (W)	主波 (500Hz) (dB)	最大谐波 (dB)	主谐波差值 (dB)
M_1 (并行)	3.22	-31.1	-74.0	42.9
M_1 (串行)	1.80	-32.7	-76.6	43.9
M_2 (并行)	1.94	-35.7	-84.3	48.6
M_2 (串行)	0.97	-36.1	-79.5	43.4

6 结束语

近年来对机器结构声发射研究表明^[2,3], 转动自由度的结构声发射随着频率的增加, 其重要性也随之增加, 因此设计和研制用于高频的力矩激振器成为当务之急. 另一方面, 机器的结构声发射强烈地受到接受结构的影响^[8], 因此研究接受结构的动态特性也是噪声控制的一个重要方面. 例如, 对厂地板 (钢筋混凝土) 这样厚的重的接受结构的研究, 这又要求研制出大功率、低频的力矩激振器.

从声学角度出发, 设计用于高频的激振器主要是压板的尺寸问题, 即压板尺寸与弯曲波波长相比较要小. 另一方面压板尺寸还与被测结构的材料和厚度有关. 也就是说如果测量对象是一个又轻又薄的机器基板 (如某些家用电器), 而又在高频工作, 那么压板尺寸必须做得很小.

从磁路分析, 压板过小, 必将产生严重的磁极短路现象, 从而减小了 $D \cdot O$ 磁场强度. 固然我们可以调节预压力来获取一条合适的 $S \sim H$ 工作曲线, 但有两个困难: (1) 这种调节是有一定限度的, 一旦超过限度, 调节将失去作用; (2) 过小的预压力会使激振器结构过松, 从而失去稳定性.

对于大功率工作在低频的力矩激振器, 设计方面要求可以总结如下:

- 1. 更大直径、更长的磁致伸缩棒以获得更大的幅度的振动;
- 2. 更强的永磁铁并采用并行的磁路结构, 以减小磁路的磁阻;
- 3. 更大的振动块, 使用高导磁率的材料制造, 以增大功率和提高效率;
- 4. 更多的单位长度线圈数以提高电-磁转换效率.

力矩激振器在低频转换效率降低, 如果要求有大的功率输出, 其结果应有双倍的电功率输入。这样就需要有更大的磁偏置以防止其非线性畸变, 这也将是研制低频大功率激振器的困难之处。

作者衷心感谢 B A T Petersson 教授的帮助和有益的讨论。本研究属“英中学术交流计划”项目, 作者对英国文化委员会的支持表示感谢。

参 考 文 献

- [1] B A T Petersson. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, 116: 191
- [2] Qiu Shuye, B A T Petersson, B M Gibbs. *Chinese Journal of Acoustics*, 1992, 11: 139
- [3] B M Gibbs, B A T Petersson, S Qiu. *Noise Control Engineering Journal*, 1991, 37: 53
- [4] B A T Petersson, B M Gibbs. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 168: 157
- [5] J L Butler. *Application Manual for the Design of ETREMA Terfenol-D Magnetostrictive Transducers*. EDGE Technologies, Inc 1988
- [6] L Cremer, M Heckl, E Ungar. *Structure-borne Sound*. Berlin: Springer-Verlag 1973
- [7] F J Fahy. *Journal of Sound and Vibration*, 1969, 10: 517
- [8] J M Mondot, B A T Petersson. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, 114: 507

MOMENT EXCITATION ON STUDIES OF STRUCTURE-BORNE SOUND

QIU SHUYE JIANG JIANZHONG B M GIBBS

(*Shantou University*)

(*Liverpool University*)

Abstract A prototype moment actuator is introduced. It consists of two parallel rods of giant magnetostrictive material. Some design considerations both on acoustics and magnetics are presented. Magnetic biases for three prototypes with parallel and series magnetic paths, respectively, are examined in order to optimize the design of the moment actuator.

Key words magnetostrictive rod, moment actuator, bend wave, cross-spectrum method

分数阶复宗量圆柱函数的数值计算

王锡良 冯永成 沈丽英 卿显明
(电子科技大学)

提要 提出了一种分数阶复宗量圆柱函数($J_v(z)$ 、 $Y_v(z)$ 、 $H_v^{(1)}(z)$ 、 $H_v^{(2)}(z)$ 、 $I_v(z)$ 、 $K_v(z)$), $0 \leq v \leq 1$)的精确数值计算方法。该方法根据复宗量 $|z|$ 的大小,对分数阶复宗量圆柱函数应用不同的计算公式进行数值计算,它不仅计算精度高,而且对复宗量 z 没有限制。该方法的程序编制已完成。

关键词 分数阶 复宗量 圆柱函数 数值计算

在电磁辐射、散射和导波问题的理论研究中,经常遇到分数阶复宗量圆柱函数的数值计算问题,虽然圆柱函数理论提供了各种计算分数阶圆柱函数值的基本公式,且它们在数学上都是严格的,但应用计算机计算时,这些公式有时却很难得到精确值。

近些年,复宗量圆柱函数的数值计算引起了不少学者的重视,已有很多有关论文发表^[1~4],但至今为止,还没有一种计算精度高、编程简单和适用范围广的精确数值计算方法。文献[1]只解决了整数阶复宗量 Bessel 函数 $J_n(z)$ 和 Neumann 函数 $Y_n(z)$ 的数值计算,文献[2]明确指出其计算精度随复宗量模值 $|z|$ 、圆柱函数阶数 v 的增加而下降,文献[3]的计算方法处理了整数阶复宗量 Bessel 函数的数值计算,文献[4]仅是对复宗量复阶数 Hankel 函数估算,且对复宗量 z 和复阶数 v 有限制,至于分数阶复宗量圆柱函数的计算目前还未见报道。

下面根据复宗量 $|z|$ 的大小,采用级数定义式、后推算法、大宗量展开式和超几何函数有理展开式计算 $J_v(z)$ 、 $Y_v(z)$ 、 $H_v^{(1)}(z)$ 、 $H_v^{(2)}(z)$ 、 $I_v(z)$ 和 $K_v(z)$ 。

1 分数阶复宗量圆柱函数的计算

由 $J_v(z)$ 、 $Y_v(z)$ 、 $H_v^{(1)}(z)$ 和 $H_v^{(2)}(z)$ 的大宗量近似展开式

$$\begin{cases} J_v(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_v(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ H_v^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{j\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\ H_v^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \end{cases} \quad z = x + jy, \quad 0 \leq v \leq 1 \quad (1)$$

可知, $J_\nu(z)$ 、 $Y_\nu(z)$ 有因子 $e^{\pm\nu}$, 而 $H_\nu^{(1)}(z)$ 、 $H_\nu^{(2)}(z)$ 一个有 $e^{-\nu}$, 另一个有 e^ν . 因此, 当 $|y|$ 很大时, $J_\nu(z)$ 、 $Y_\nu(z)$ 的模值很大, 而 $H_\nu^{(1)}(z)$ 、 $H_\nu^{(2)}(z)$ 的模值中一个很大, 另一个很小, 故在计算机计算大宗量分数阶圆柱函数时, 上半平面复宗量分数阶 $H_\nu^{(1)}(z)$ 和下半平面复宗量分数阶 $H_\nu^{(2)}(z)$ 不能应用 $J_\nu(z)$ 、 $Y_\nu(z)$ 计算, 否则, 其计算精度难以保证. 反过来, 任意大宗量 $J_\nu(z)$ 、 $Y_\nu(z)$ 则可以应用 $H_\nu^{(1)}(z)$ 、 $H_\nu^{(2)}(z)$ 计算. 因此, 分数阶复宗量圆柱函数高精度数值计算问题的关键是要解决分数阶复宗量 $J_\nu(z)$ 和上半平面分数阶复宗量 $H_\nu^{(1)}(z)$ 的计算.

1.1 分数阶复宗量 $J_\nu(z)$ 的数值计算

原则上可以应用后推算法计算任意模值的复宗量 $J_\nu(z)$ 值, 实际上, 当 $|z|$ 很大时, 这种计算方法消耗的 CPU 较多. 因此, 本文根据 $|z|$ 的大小, 采用了后推算法和大宗量展开算法相结合.

(1) 复宗量模值 $|z| \leq 30$

当 $\nu=0$ 或 1 时, 直接应用整数阶 Bessel 函数的后推算法^[1] 计算 $J_\nu(z)$.

当 $0 < \nu < 1$ 时, 需寻找适合分数阶的后推算法公式, 由文献[5]公式[9.2.2] (简称: [5, eq.9.2.2]) 和[9.10.3.14] 得

$$\left(\frac{z}{2}\right)^v e^{-jz} \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+\nu)\Gamma(k+2\nu)}{k!} (-j)^k J_{k+\nu}(z), \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi \quad (2)$$

式(2)虽然在第四象限也成立, 但为了确保数值计算结果的精确性, 要求 $\operatorname{Re}(-jz) > 0$. 因此对式(2), 实际上宗量 z 的计算机适用范围是上半平面 ($0 \leq \arg z \leq \pi$). 至于下半平面复宗量 $J_\nu(z)$, 可先计算其共轭复宗量 $J_\nu(\bar{z})$ 值, 然后应用公式 $J_\nu(z) = \overline{J_\nu(\bar{z})}$ 计算.

(2) 复宗量模值 $|z| \geq 30$

对 $|z| \geq 30$ 的复宗量, $J_\nu(z)$ 直接应用大宗量展开式计算, 不必应用后推算法. 因为后推算法所需的 CPU 正比于 $|z|$, 而大宗量展开算法的 CPU 反比于 $|z|$. 当 $\nu=0$ 或 1, $|z| \geq 20$ 时, 大宗量展开算法的相对误差小于 10^{-16} ^[1]. 所以, 在 $|z| \geq 30$ 时, 应用大宗量展开算法计算精度就足够了. 下面是 $J_\nu(z)$ 的大宗量展开式^[6]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} [P_\nu(z) \cos w - Q_\nu(z) \sin w] \quad (3)$$

$$w = z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad |z| \gg 0 \quad (4)$$

$$P_\nu(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\prod_{r=1}^{2k} [4\nu^2 - (2r-1)^2]}{(2k)! (8z)^{2k}} \quad (5)$$

$$Q_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\prod_{r=1}^{2k+1} [4\nu^2 - (2r-1)^2]}{(2k+1)! (8z)^{2k+1}} \quad (6)$$

1.2 分数阶复宗量 Hankel 函数的数值计算

首先解决上半平面复宗量 $H_\nu^{(1)}(z)$ 的数值计算, 然后应用开拓公式计算全平面复宗量 $H_\nu^{(1)}(z)$ 、 $H_\nu^{(2)}(z)$.

当 $|z| \leq 2$ 时, 应用公式

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + jY_n(z), \quad n=0 \text{ 或 } 1 \quad (7)$$

$$H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + j \frac{J_v(z) \cos(v\pi) - J_{-v}(z)}{\sin(v\pi)}, \quad 0 < v < 1 \quad (8)$$

其中 $J_v(z)$ ($0 \leq v \leq 1$)、 $Y_n(z)$ 由其级数展开式计算。

当 $|z| \geq 2$ 时, 应用公式^[6]

$$H_v^{(1)}(z) = -j \frac{2}{\pi} e^{-j\frac{v\pi}{2}} K_v(-jz) \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi \quad (9)$$

其中 $K_v(z)$ 由超几何函数有理展开式^[6]

$$K_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [E_i(z) + R_i(z)] \quad (10)$$

获得。

$$E_i(z) = \varphi_i(z)/f_i(z) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(z) = & \sum_{k=0}^i \frac{\left(\frac{1}{2}-v\right)_k \left(\frac{1}{2}+v\right)_k (-i)_k (i+1)_k}{\left(\frac{3}{2}-v\right)_k \left(\frac{3}{2}+v\right)_k (1)_k k!} \\ & \times {}_3F_3 \left[\begin{matrix} -i+k, & i+1+k, & 1 \\ 1+k, & \frac{3}{2}-v+k, & \frac{3}{2}+v+k \end{matrix} \middle| -2z \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$f_i(z) = {}_2F_2 \left[\begin{matrix} -i, & i+1 \\ \frac{3}{2}-v, & \frac{3}{2}+v \end{matrix} \middle| -2z \right] \quad (13)$$

${}_2F_2, {}_3F_3$ 是超几何函数, $\varphi_i(z)$ 、 $f_i(z)$ 满足递推公式

$$\varphi_i(z) + (P_1 - Q_1 z) \varphi_{i-1}(z) + (P_2 - Q_2 z) \varphi_{i-2}(z) + P_3 \varphi_{i-3}(z) = 0, \quad i > 2 \quad (14)$$

$$\begin{cases} P_1 = -\frac{(2i-1)(12i^2-20i-a_0)}{(2i-3)a_i}, & P_1 + P_2 + P_3 + 1 = 0 \\ P_2 = \frac{12i^2-28i+8-a_0}{a_i}, & Q_1 = Q_2 = \frac{16(2i-1)}{a_i} \\ P_3 = -\frac{(2i-1)a_{i-3}}{(2i-3)a_i}, & a_i = (2i+1)^2 - 4v^2 \end{cases} \quad (15)$$

误差函数近似表达式

$$R_i(z) \sim \exp[-\xi(z) |N^2 z|^{1/3}], \quad |\arg z| \leq \pi \quad (16)$$

$$\begin{cases} \xi(z) = 6 \cos \frac{\pi}{6} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{|\arg z|}{3} \right) \\ N^2 = i(i+1) \end{cases} \quad (17)$$

很显然, 当 $|z| \geq 2$ 时, 误差函数 $R_i(z)$ 随 i 的增加迅速收敛至零。

至此, 解决了上半平面复宗量 $H_v^{(1)}(z)$ 的数值计算。对于下半平面复宗量 $H_v^{(1)}(z)$ 和全平面复宗量 $H_v^{(2)}(z)$, 可以应用下列公式将其转化为 $J_v(z)$ 和上半平面复宗量第一类 Hankel 函数的计算,

$$H_v^{(2)}(z) = 2J_v(z) - H_v^{(1)}(z), \quad 0 \leq \arg z \leq \pi \quad (18)$$

$$H_v^{(1)}(z) = 2J_v(z) - \overline{H_v^{(1)}(\bar{z})}, \quad -\pi \leq \arg z \leq 0 \quad (19)$$

$$H_v^{(2)}(z) = \overline{H_v^{(1)}(\bar{z})}, \quad -\pi \leq \arg z \leq 0 \quad (20)$$

解决了 Bessel 函数 $J_v(z)$ 、Hankel 函数的数值计算后, Neumann 函数 $Y_v(z)$ 可简单

表 超几何函数有理展开算法与其它算法计算的 $H_v^{(1)}(z)$ 值的比较

$v=0.0$ $z=-0.5+j0.3$	$-0.552095266042133E+00-j0.421905265166408E+00$ $-0.552095266042132E+00-j0.421905265166402E+00$	A C
$v=0.0$ $z=30+j10$	$-0.459299174773110E-05-j0.450458858511944E-05$ $-0.459299174773113E-05-j0.450458858511942E-05$	A B
$v=0.0$ $z=-1500+j500$	$0.124487265428950E-218-j0.702810005455839E-219$ $0.124487265428954E-218-j0.702810005455837E-219$	A B
$v=0.25$ $z=-0.5+j0.3$	$-0.694136743215821E+00-j0.166384350489304E+00$ $-0.694136743215823E+00-j0.166384350489308E+00$	A C
$v=0.25$ $z=30+j10$	$-0.596690563492873E-05-j0.241035314881352E-05$ $-0.596690563492871E-05-j0.241035314881350E-05$	A B
$v=0.25$ $z=-1500+j500$	$0.881143029342823E-219-j0.112572747910504E-218$ $0.881143029342826E-219-j0.112572747910502E-218$	A B
$v=0.50$ $z=-0.5+j0.3$	$-0.753725984224546E+00+j0.176313183085530E+00$ $-0.753725984224543E+00+j0.176313183085533E+00$	A C
$v=0.50$ $z=30+j10$	$-0.644150592800770E-05+j0.386848406792999E-07$ $-0.644150592800771E-05+j0.386848406792995E-07$	A B
$v=0.50$ $z=-1500+j500$	$0.383202490541874E-219-j0.137728281305980E-218$ $0.383202490541873E-219-j0.137728281305982E-218$	A B
$v=2/3$ $z=-0.5+j0.3$	$-0.711610163218883E+00+j0.450675261867040E+00$ $-0.711610163218880E+00+j0.450675261867044E+00$	A C
$v=2/3$ $z=30+j10$	$-0.622318068272623E-05+j0.168831583926663E-05$ $-0.622318068272621E-05+j0.168831583926660E-05$	A B
$v=2/3$ $z=-1500+j500$	$0.135950515884958E-220-j0.142956175621034E-218$ $0.135950515884955E-220-j0.142956175621030E-218$	A B

A——超几何函数有理展开, B——大宗量展开^[6, eq.9.2.7], C——级数定义式展开

地应用公式 $Y_v(z) = j[J_v(z) - H_v^{(1)}(z)]$ 计算。至于分数阶修正复宗量 Bessel 函数 $I_v(z)$ 、 $K_v(z)$ 由公式 [6, eq.9.6.3] 和 [6, eq.9.6.4] 解决。

2 数值计算结果的检验和结论

由于分数阶复宗量圆柱函数值(除 $v=1/2$ 外)无表可查,因此,对本文算法进行检验十分必要。因为本文算法是以计算 $J_v(z)$ 和上半平面复宗量 $H_v^{(1)}(z)$ 为基础,其它分数阶复宗量圆柱函数的计算都是建立在这两个函数上,所以,只需检验 $J_v(z)$ 和上半平面复宗量 $H_v^{(1)}(z)$ 的数值计算精度。 $J_v(z)$ 是采用后推算法和大宗量展开算法计算,其计算精度已有详细论述^[1],这里不再重复。对于上半平面复宗量 $H_v^{(1)}(z)$,本文是按 $|z|$ 大小分为 $|z| \leq 2$ 和 $|z| \geq 2$ 两个区域计算。当 $|z| \leq 2$ 时, $H_v^{(1)}(z)$ 是由级数定义式计算,收敛快精度高;当 $|z| \geq 2$ 时,本文是采用超几何函数有理展开式计算,由于展开式误差函数 $R_i(z)$ 随 $|z|$ 的增加而减小,即计算精度随 $|z|$ 的增加而提高,因此,对超几何函数有理展开式只要检验