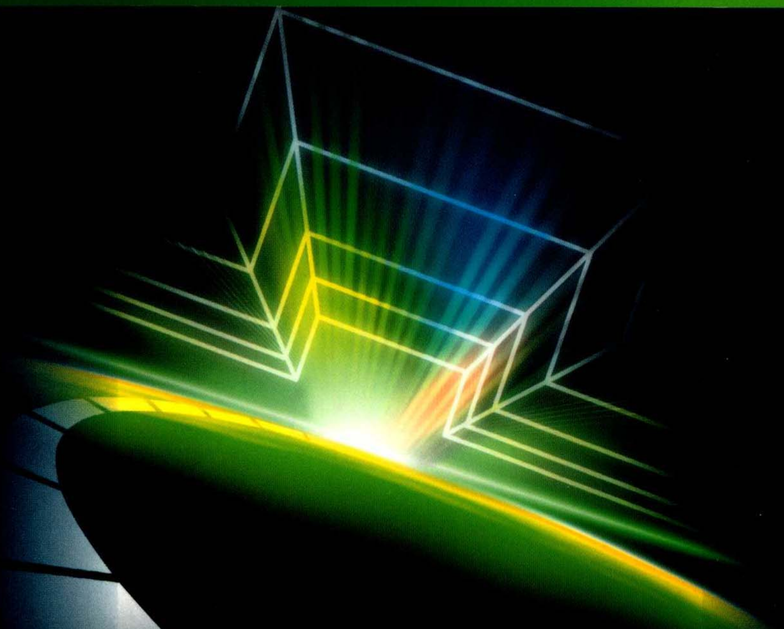
21世纪

高等职业教育创新型精品规划教材

计算机数学基础

JISUANJI SHUXUE JICHU



主　编　田文成

副主编　张丹阳　崔宝才

天津大学出版社

TIANJIN UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等职业教育创新型精品规划教材

计算机数学基础

主　编　田文成
副主编　张丹阳　崔宝才

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书共分五篇：第一篇为矩阵代数；第二篇为数理逻辑，介绍命题逻辑和谓词逻辑的基本概念和运算；第三篇为集合论，介绍集合的概念和运算、二元关系和函数等；第四篇为代数系统，介绍二元运算的基本性质以及半群、独异点、群、格、布尔代数、环和域等；第五篇为图论，介绍图的基本概念以及欧拉图、汉密尔顿图、平面图、树和它们的有关应用.

本书内容通俗易懂，例题丰富，各节均配有大量的习题. 本书是按照计算机及相关专业的高职高专的教学要求而编写的教材，也可作为相关专业大学本科、专科计算机数学基础教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/田文成主编. —天津：天津大学出版社，2010.4

21世纪高等职业教育创新型精品规划教材

ISBN 978-7-5618-3431-2

Ⅰ.①计… Ⅱ.①田… Ⅲ.①电子计算机－数学基础－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ.①TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第046030号

出版发行 天津大学出版社

出 版 人 杨欢

地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编：300072)

电　　话 发行部：022-27403647 邮购部：022-27402742

网　　址 www.tjup.com

印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司

经　　销 全国各地新华书店

开　　本 169mm×239mm

印　　张 13.25

字　　数 275千

版　　次 2010年4月第1版

印　　次 2010年4月第1次

定　　价 26.00元

前言

《计算机数学基础》课程是为适应高等职业院校计算机专业的教学需求而开设的一门课程.

计算机科学和技术是研究数据和信息的表示、处理、存储、控制和应用的学科.它已渗透到国民经济的各个领域，包括人类生活的各个方面.计算机技术的发展已成为科技进步的重要标志，成为知识经济社会的重要组成部分. 随着计算机科学技术的发展，需要研究的课题越来越广泛、深入.这些课题的研究，涉及一定深度的数学知识，如离散数学、数值分析、组合数学、概率论和语言设计等，而只有高等数学和线性代数的知识是不够的.

许多问题具有离散的结构，因为它们涉及的函数是定义在离散的点而不是连续的点的集合上的，即它们涉及离散的量，因而需要离散地求解这些问题.

离散地求解问题意味着当我们定量地分析问题时，不使用像微积分那样的连续数学模型，解题时不使用极限过程和连续性. 这种求解方式对此类问题而言比用微积分模型更为准确.

例如，数字计算机本身就是点量的机器，这涉及整数，而离散数学恰好提供点量的模型，于是它成为计算机学科的一个极其有用且容易理解的工具.

计算机的广泛使用，离不开计算机算法的研究. 数值分析主要解决数值计算问题，如求解方程(组)、函数逼近和计算积分等，主要研究适合于计算机使用的数值计算方法，它已成为继实验方法、科学方法之后科学研究的第三种方法，用来解决生产和科学实验中提出的各种计算问题.

因此，计算机数学基础是计算机科学与技术专业的学生必须掌握的课程，也是学习后续课程，如数据结构、数据库原理与应用、图形学和计算机网络等不可缺少的基础课程.

所以，在讲授本课程时，应该尽量选择那些在后续课程中要直接用到的数学概念和有关内容，此外，还应该选择少量的对培养学生的逻辑思维与提高抽象能力特别有益的内容. 因此，清楚地了解一些重要概念和模型如何从现实生活及各种不同的学科中抽象出来——即它们的现实原型，就显得十分重要了. 在本书中，对一些重要概念和定理尽量给出直观的或现实的背景，使读者明了这些抽象概念和理论产生的必然性.

本书在保留计算机数学基础知识系统性和完整性的基础上，力求深入浅出、通俗易懂. 在内容的选材上以“必须、够用”为基础，突出实用性. 结合本专业对新世纪人才的要求，培养合格的专业人才，也考虑到学科系统的完整性，因此，有些内容可作为选学内容. 基本教材约需讲授80学时. 很显然，要想在计算机科学的某个领域深造下去，还必须去读计算机数学基础中相应内容的更深论著.

在本书编写完成初稿后，天津理工大学陶惠民教授、南开大学郑仲三教授和北京科技大学杨炳儒教授仔细审评了原稿并提出了宝贵的意见,本书在编写过程中还得到了天津电子信息职业技术学院计算机软件学院的付连仲教授、宋国庆副教授的热情帮助和认真指导,同时张博、孙鸿飞等同志也做了很多工作. 对于他们所作的贡献，编者一并表示衷心感谢.

本书主要内容曾在有关院校多次讲授,并通过了教学实践检验，但限于作者的水平，难免会有错误和疏漏，望读者指正.

编　者

2010年1月

导读

《计算机数学基础》在计算机科学中的重要性是众所周知的，而它是由5部分组成的，包括矩阵代数、数理逻辑、集合论、代数系统和图论. 这5部分内容又是数学中的5个不同的分支，每一部分又都各自独立，并且具有很完备的理论体系. 初学者感到较为抽象，可能不是很清楚它到底有什么用途，为什么要学习计算机数学基础. 这些问题也是作者20多年来在教学过程中经常被问到的问题，这其中有学生，也有一些专家、教授等. 下面就《计算机数学基础》各部分内容在计算机科学中的具体作用，简单地作一说明.

第一，第一篇矩阵代数. 它是数学各分支不可缺少的工具，尤其是在数值计算中，它是非常重要的，另外与本书中附录一起我们可以看到简单数值逼近方法等内容. 它在具体实践工作中有着非常广泛的应用.

第二，第二篇数理逻辑. 这一篇有两章内容，即命题逻辑与一阶逻辑. 前者以原子命题为基本单位来研究逻辑运算，这里为逻辑运算给出了严格的数学定义，事实上可以定义16种不同的逻辑运算符，并且研究它的内在联系. 在现实工作中，尤其是计算机软件的设计中要经常使用这些逻辑运算. 而为什么在所有的计算机高级语言中仅仅定义了3个逻辑运算符，即“否定”、“并且”、“或者”（如在C语言中它们分别为“!”、“&&”、“||”），回答这个问题，应从以下两个方面考虑.

1. 由这3个逻辑运算符可组成一个所谓的完备集{“否定”，“并且”，“或者”}（本书中的符号是{“$\neg$”，“$\wedge$”，“$\vee$”}），也就是说，这3个运算符的组合可以表示全部16种逻辑运算中的任意一种逻辑运算. 应当指出的是，这个完备集{“$\neg$”，“$\wedge$”，“$\vee$”}不是所谓的最小联结词组. 其中，最小联结词组可以是{“$\neg$”，“$\wedge$”}或{“$\neg$”，“$\vee$”}等不同的形式. 而最小联结词组也是一个完备集，同样可以证明其也可以表示16种逻辑运算中的任意一种运算. 那么为什么在计算机的高级语言中要定义3种逻辑运算而不定义两种运算呢？要回答这个问题请看第2点.

2. 若使用最小联结词组，它虽然是一个完备集，但有一个缺点，就是它不能将被表示的逻辑表达式规范地表示出来，其形式可能有多种多样. 而通过完备集{“$\neg$”，“$\wedge$”，“$\vee$”}可使被表示的逻辑表达式达到唯一性. 在本书中我们定义了“小项”和“大项”，并引出了一个主范式的概念. 这样表示逻辑表达式能做到唯一性. 这是一项很重要的工作. 对于程序设计的初学者或者一些软件爱好者，给出一个实际问题，如果组织若干并非很专业的人来完成同一问题的程序设计. 其结果，大家设计的程序各不相同，或者说他们的程序流程图均不相同；而对于非常专业的软件人员，若干人完成同一问题，其结果大家设计出的程序是完全一致的. 对于前者，设计的结果只能说是一种艺术品；而后者才是商品或软件产品，其特征是具有一致性，而这往往就是逻辑表达式的表示形式造成的. 因此，我们说这个主范式在命题逻辑一章中是很重要的

内容之一.

数理逻辑中的一阶逻辑主要研究命题与命题内部的某些联系. 它同时也是智能化语言的基础. 对原子命题再作分解,提出了谓词与客体等概念,同时也引出了量词的概念. 这对于计算机科学同样是很重要的内容.

第三,第三篇集合论. 这一篇是很重要的. 这里以"关系"为例作一简单的说明. 在计算机科学中,《数据结构》是一门很重要的课程,"数据结构"中的数学定义就是所谓带有结构的数据元素的集合,而"结构"就是数据元素之间的关系. 关系是如何定义的? 如数学上的"小于等于"关系,即"≤",这个"≤"是大家经常使用的,但往往我们并不对其进行深入的讨论,事实上"≤"是一个集合,或者说,任意序偶的集合就确定了一个二元关系. 在本书中我们会给出严格的定义,并对其进行深入研究. 我们日常生活中的"关系"概念实际上是一个集合,因此凡是集合中的一些性质、定理,在关系上都可以使用. 关于关系的表示,不仅仅是集合的一种形式,同时还有矩阵和图形,这在本书中称之为关系矩阵和关系图,它们仍有着非常良好的性质,对于研究关系的内部特点提供了方便.

另外,大家都经常使用"划分"这一名词,在本书中我们对其也给出了数学定义,即:给定一集合 S,而 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,其中 $A_i\subseteq S$ 且 $A_i\neq\varnothing(i=1,2,\cdots,n)$;且对于任意 $A_i,A_j\in A$,若 $A_i\neq A_j$,则 $A_i\cap A_j=\varnothing$;同时有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$,则称集合 A 对 S 构成一个"划分". 实际上对于任意划分必须满足定义中的 3 个条件,就是我们日常生活中的划分概念,它与关系中的一个重要的等价关系有着很紧密的联系. 而计算机的内存的划分等等,都应严格遵守这个定义. 如果我们日常生活中的划分不能满足这个定义,将会引出很多无法解决的严重后果.

当然,本篇还有很多很多有趣的问题,希望大家学完本书后自己去总结,这更加有意思.

另外,关于映射(函数)大家都很熟悉. 实际上,函数是一种特殊的关系,而关系是一个集合. 显然函数 f 也应该是一个序偶的集合. 正是由于函数 f 是一个特殊的关系,因此表示它的形式用了一种特殊的符号,即 $y=f(x)$,而我们要研究的正是这个 f. 实际上我们对 f 已经做了很多工作,如 C 语言的程序是由函数组成的. 具体函数的概念本书进行了专门讨论.

第四,第四篇代数系统. 代数系统的研究成果被广泛地应用于计算机科学中,它是计算机所有算法语言的理论基础. 当然,在理论物理学、生理学及社会科学中也得到广泛的应用. 它的方法和结果渗透到那些与它相关的各个不同的数学分支中,因此代数系统对全部数学的发展有着显著的影响. 更重要的是,对于计算机科学工作者以及计算机软件的研制人员来说,代数系统的某些基本概念、方法和结果也成为其必备的知识.

所谓代数系统,就是由一个集合 S 及定义在 S 上的若干个代数运算组成的一个

系统. 如果用符号“+”,“·”表示其中的运算,则在集合 S 上具有代数运算,“+”,“·”的代数系统就记成$(S,+,\cdot)$. 其中的代数运算可以是二元运算、一元运算,也可以是 n 元运算. 而对于运算本身在计算机中如何实现,这在代数系统中有着严格的定义,即设有两个集合 A,B 及另一个集合 D,一个 $A\times B$ 到 D 的映射叫做一个 $A\times B$ 到 D 的代数运算.

因此,一个代数运算只是一种特殊的映射.

事实上,$\forall a\in A$ 和 $\forall b\in B$,可以通过这个代数运算得到一个 D 中的元素 d,也可以说,所给代数运算能够对 a 和 b 进行运算,而得到一个结果 d,这正是普通计算的特征. 比如说,普通加法是把任意两个数加起来,而得到另一个数.

代数运算既是一种特殊的映射,表述它的符号也可以特殊一点. 一个代数运算用“∘”来表示,用以前的符号,就有

$$\circ:(a,b)\to d=\circ(a,b)$$

我们说过,$\circ(a,b)$完全是一个符号,现在为方便起见,不写$\circ(a,b)$而写成 $a\circ b$,于是,描写代数运算的符号就变成

$$\circ:(a,b)\to d=a\circ b$$

反过来,在我们的日常生活中一个 $3+2=5$,那么正是这个加号“+”,它的本来面目应该是一个映射(函数),即

$$5=+(3,2)$$

加法运算在计算机科学中若要实现,就应该以一个具体的函数来完成它. 而在以后的《数据结构》课程中,具体完成的一些运算都是以算法即程序来实现的.

在本书中将介绍的半群、群等就是一些具有一个二元运算的代数系统,环、域、格等就是具有两个二元代数运算的一些特殊系统,而布尔代数则是具有两个二元运算及一个一元运算的特殊系统.

应该注意的是,在代数系统的学习中,要严格地遵从概念所规定的含义及公理的形式进行推理和运算,概念和公理是出发点,不能利用初等代数中的已知概念、公式、规则. 当遵从这个方法时,你会发现,你已有的初等代数的知识中的某些,只是知道如何运算,而不知为什么这样算,为什么它是真的;逐渐你会清楚它们的理论基础,从而大大加深你对它的认识——本质的认识.

第五,第五篇图论. 本篇中分为三章,有图的概念、特殊图和树等,其应用范围很广,诸如在物理学、化学、社会科学、运筹学、信息学和经济管理等方面都有卓有成效的应用. 所以图论受到数学界和工程技术界广泛重视.

图论中所说的图与通常的几何图形,如圆、三角形等是不同的,它是描述事物之间关系的一种手段,是拓扑学意义中的图. 所谓拓扑学,即数学的一门分科,研究几何图形在一对一的双方连续变换下不变的性质,这种性质称为“拓扑性质”. 例如,画在橡皮膜上的图形,当橡皮膜受力变形但不破裂或折叠时,有些性质还是保持不变,如曲线的闭合性等. 平面图中的四色问题也是一个拓扑学问题. 有关“着色”问题的应

用请看下面的举例.

例 学生选课时间安排问题.

假设某学院学生选课,共设6门课程,即课程1、课程2、课程3、课程4、课程5、课程6. 而现有500名学生选课,规定每一名学生至多选择其中3门课程. 学生所选课程如表1所示.

表1 选课表

学生	科目1	科目2	科目3
一组	课程1	课程2	课程5
二组	课程3	课程4	
三组	课程3	课程5	课程6
四组	课程4	课程6	课程1
五组	课程2	课程6	

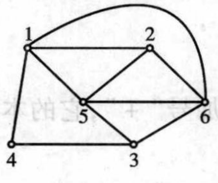


图1 课程安排的数据结构模型

现要求设计一课程表,使得在尽可能短的时间内安排完授课内容. 为了能较好地解决这个问题,首先应该选择一合适的图形(数据结构)表示它. 设图的顶点代表课程 $i(i=1,2,\cdots,6)$,在所有两门不能同时开的课程之间连上一条线,显然同一个学生选择的几门课程不能同时上课,因此这个学生选择的课程中应该两两有线相连. 由此得到如图1所示的图形(数据结构模型).

注意:图中结构点1至6代表6门课程的序号.

因此,上课时间问题可以抽象为对该无向图进行"着色"问题(具体方法详见本书12.3节),即用尽可能少的颜色去给图中每个顶点着色,使任意两个有边相连不同的顶点着上不同颜色,每一种颜色表示一个上课时间,着上同一颜色的顶点可以安排在同一时间内上课. 如图中顶点1和3不相邻(没有相连的边),可以选取颜色 A 为它们着色. 同理,顶点2和4可着同一颜色 B;顶点5和6有边相连(它们是相邻的),则分别着上颜色 C 和颜色 D. 也就是说,只要安排4个不同的时间段讲这6门课程即可. 问题的结论见表2.

表2 课程表

时间段	应开课程
时间1	课程1和课程3
时间2	课程2和课程4
时间3	课程5
时间4	课程6

总之,为了学好《计算机数学基础》这门课程,编者提出以下几点建议.

(1)应清楚地掌握每个概念及其含义,了解其现实背景,不仅要掌握正面定义,而且要正确地理解其否定.

(2)熟练掌握基本的推理方法,学会使用概念和公理进行正确的逻辑推理. 这实际上就是训练分析问题和解决问题的能力. 对于知识的积累和能力的训练,在数学上能力的训练比起单纯的知识积累要重要得多.

(3)学会把抽象的理论和方法运用到具体的实际问题中去. 华罗庚老先生在其名著《数论导引》的序中曾指出:"从具体到抽象是数学发展的一条重要大道. 因此,具体的例子往往是抽象概念的源泉,而所用的方法也往往是高深数学里所用的方法的依据,仅仅熟读了抽象的定义和方法而不知具体来源的数学工作者,是没有发展前途的,这样的人要搞深刻研究可能会遇到无法克服的难关. 数学史上也屡见不鲜地刊载着实际中来的问题和方法,促进了数学发展的事实."

编者

2010 年 1 月

目　录

第一篇　矩阵代数

第二篇　数理逻辑

第三篇　集合论

第四篇 代数系统

第五篇 图论

第一篇　矩阵代数

矩阵的研究来源于一般线性方程组，它的应用之一也是解线性方程组，其中，在概率和统计、图论、二元关系等数学分支中都有重要的应用. 它是数学各分支不可缺少的工具. 矩阵代数既有离散的成分又包含了连续的成分，它们之间的界限不是很严格. 这里着重介绍它离散的方面，当然它在计算机科学中也有着重要的作用.

第 1 章　矩　　阵

1.1　矩阵运算

定义 1（矩阵（Matrix））　如果把 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个形如下述的矩形：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

这 $m\times n$ 个数连同其相对位置，加上长括号的这个整体叫做一个 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记做 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_{m\times n},(a_{ij}),(a_{ij})_{m\times n}$ 等，其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素.

当全体 $a_{ij}=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为零矩阵，记为 $\boldsymbol{Z}$. 如果 $m=n$，则称它为 n 阶方阵. 在 n 阶方阵中，$a_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为单位矩阵（或幺矩阵），记为 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$.

例 1　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.5\\ 2\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=[2\quad -1\quad 4\quad 5]$ 分别是 $2\times 2,3\times 1,1\times 4$ 矩阵.

定义 2（矩阵相加）　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则把它们对应位置的元素相加而得的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之和，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，其中，

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n).$$

例 2　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 5\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\ -4 & 3 & 7\end{bmatrix}$，则

$$A+B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 8 & 1\\ -4 & 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10 & 0\\ -3 & 3 & 12\end{bmatrix}$$

定义 3(数乘矩阵) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，c 是任意一个数，则用 c 去乘矩阵的每一个元素而得到的一个矩阵称为 c 与 $\boldsymbol{A}$ 之积，记做 $c\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}c$，其中 $c\boldsymbol{A}=c(a_{ij})=(ca_{ij})(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$.

定义 4 矩阵的乘法：设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times k$ 的矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{C}$ 是一个 $m\times k$ 的矩阵，记做 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，其中，

$$(c_{ij})=(a_{ij})(b_{ij})=(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj})=(\sum_{p=1}^{n}n_{ip}b_{pj})$$

$$(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant k).$$

例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-6 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 6\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 6\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}* & 1\times 2+(-1)\times 3+0\times 4 & *\\ * & * & *\\ * & * & *\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}* & -1 & *\\ * & * & *\\ * & * & *\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}-9 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

注：在计算矩阵积时，先确定积的行数和列数，不妨先写成 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mk}\end{bmatrix}$，再计算 $c_{11},c_{12},\cdots,c_{1k},\cdots,c_{m1},\cdots,c_{mk}$. 另外，注意 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

定义 5(矩阵相等) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，且对每个 $1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$ 而言，$a_{ij}=b_{ij}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是相等的.

定义 6(对角矩阵) 如果 $\boldsymbol{D}$ 是一个 m 阶方阵，且当 $i\neq j$ 时，$d_{ij}=0$，则称 $\boldsymbol{D}$ 是一个对角矩阵. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 均是对角矩阵，其中 $\boldsymbol{Z}$ 是零矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵. 读者可验证 $\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{ZA}=\boldsymbol{AZ}=\boldsymbol{Z}$.

定义 7(逆矩阵) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果存在另一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异矩阵，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，将 $\boldsymbol{B}$ 记做 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

由上述定义可见，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是对称的，若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异，则 $\boldsymbol{B}$ 亦为非奇异；$\boldsymbol{A}$ 之逆为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 之逆为 $\boldsymbol{A}$.

性质 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为矩阵，上述定义加法、乘法和数乘矩阵，符合下述矩阵运算规律.

(1) $A+B=B+A$

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$

(3) $c(A+B)=cA+cB$ (其中,c 为实数域 $\mathbf{R}$ 中元素)

(4) $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$ (其中,$c_1,c_2\in\mathbf{R}$)

(5) $c_1(c_2A)=c_1c_2A$ (其中,$c_1,c_2\in\mathbf{R}$)

(6) $0A=Z$ (其中,0 是数零,Z 是零矩阵)

(7) $ZA=Z$

(8) $A+Z=A$

(9) $A+(-1)A=Z$

(10) $A(B+C)=AB+AC$

(11) $(B+C)A=BA+CA$

(12) $A(BC)=(AB)C$

证明(略).

定理 1 如果 A 是非奇异矩阵,则它有唯一的逆矩阵.

证明: 设 A 是 n 阶方阵且非奇异. 假设 A 有两个逆矩阵 B 和 C(切记 $B\neq C$),则

$B=BI$ (单位矩阵 I 的性质)

$=B(AC)$ (假设 C 是 A 的逆矩阵)

$=(BA)C$ (性质(12))

$=IC$ (假设 B 是 A 的逆矩阵)

$=C$ (I 的性质)

可见,A 有逆矩阵时,仅有一个逆矩阵.

现在,本节还留下一个问题,即如 A 有逆矩阵 A^{-1},在求解 A^{-1} 的过程中将涉及矩阵的初等变换. 关于 A^{-1} 求法,留到后面去学习.

1.2 矩阵的初等变换

在介绍矩阵的初等变换之前,先介绍与矩阵关系密切的线性方程组的初等变换.

我们已从初等代数学中知道,所谓线性方程组就是形如下述的有 n 个未知数和 m 个方程的方程组合.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{matrix}$$

其中,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知数,是变元,而 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{mn}$ 是 $m\times n$ 个常数,$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是 m 个常(实)数. 该方程组的解集是由 $1\times n$ 矩阵 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 组成,其中 a_i 是实数,且 $a_i=a_j$ $(i=1,2,\cdots,n)$,上述方程组用矩阵表示如下:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

定义 1(方程组等价)　如果两个线性方程组有相同的解集,则它们被称为是等价的.

例 1　线性方程组 $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2+x_3=4, \\ 2x_1+2x_2+x_3=3. \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -1, \\ \qquad x_2 \qquad = -1, \\ \qquad\qquad x_3 = 7. \end{cases}$ 是等价的,或称线性方程组 $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ 是等价的. 它们的解集为$(-1,-1,7)$.

定理 1(方程的初等变换)　对任一方程组实施下述三种初等变换得到的新方程组与原方程组等价:

(1)交换方程的次序;

(2)用一个非零的实数乘某个方程的等式两边;

(3)用一个非零的实数乘某个方程的等式两边,而后加到另一个方程的等式两边.

证明(略).

注意:方程的初等变换在本质上是用加减消元法解方程的过程,读者可自己解例 1.

如:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3=1, & (1) \\ 2x_1+x_2+x_3=4, & (2) \\ 2x_1+2x_2+x_3=3, & (3) \end{cases}$$

将式(1)$\times\frac{1}{4}$得

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{4}x_3=\frac{1}{4}, & (4) \\ 2x_1+x_2+x_3=4, & (2) \\ 2x_1+2x_2+x_3=3, & (3) \end{cases}$$

将式(4)$\times(-2)$再与式(2)相加,得