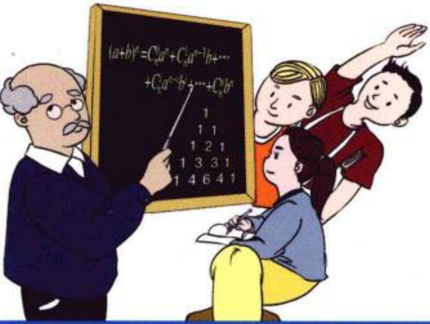


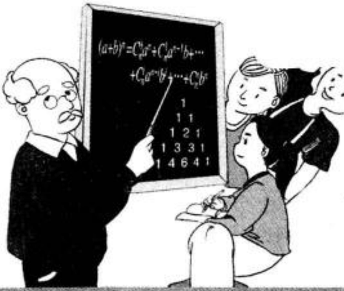
数林外传系列

跟大学名师学中学数学

数列与数集

◎朱尧辰　著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

数列与数集

◎ 朱尧辰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书在中等数学知识的基础上，以例题(50个)和练习题(60个)的形式，讲述了中学数学课程中没有涉及或较少提到的与数列和数集有关的一些知识．例如，与有限数列有关的排列组合、整除性、不等式和极值问题，数列的子列的特殊性质，等等．还讨论了与有限数集的子集和子集族有关的一些简单问题．由此适当扩大中学生的数学知识面，使他们掌握或进一步熟练某些数学计算和推理的方法或技巧．

本书可作为普通高中生的数学课外读物，也可供一般数学爱好者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

数列与数集/朱尧辰著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2013.1

(数林外传系列：跟大学名师学中学数学)

ISBN 978-7-312-03105-2

Ⅰ．数…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．代数课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.623

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第238160号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路96号，230026

http://press.ustc.edu.cn

合肥现代印务有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本：880 mm×1230 mm　1/32　印张：5.625　字数：116千

2013年1月第1版　2013年1月第1次印刷

印数：1—4000册

定价：13.00元

前　言

这本小册子涉及中等数学中两个看似关系不怎么紧密的主题: 数列与数集, 并以具有较好中等数学基础知识的中学生和数学爱好者为主要读者对象. 在中等数学中, 当引进集合概念时, 数集 (以某些数为元素的集合) 就已经成为我们熟知的事物. 数列的概念则在高中数学中才出现. 但早在小学数学中学习了零和正整数后, 实际上就已经用自然的方式 (依据大小顺序排列) 建立了自然数列; 在初中, 当我们用数轴上的点表示一组有理数时, 实际上也用同样自然的方式给出了某个有理数列. 中学数学中主要学习等差数列和等比数列. 在大学数学中则在更一般的框架下研究各种数列. 在这两个不同的学习阶段, 关于数列的知识存在某种"缺口", 也就是说, 某些与数列有关的知识在中学数学教材中较少涉及甚至从未出现; 在大学数学教材中这些知识由于具有初等数学的特征而被忽略. 我们试图在此给出一些这样的材料. 例如, 与有限数列有关的排列组合、整除性、不等式和极值问题, 数列的子列的特殊性质, 等等. 呈现上述这些知识, 多数不需要另行建立理论系统, 而且主要涉及某些推理和计算的技巧, 它们可以被我们的读者对象理解和

掌握. 另外, 如我们所知, 有限数列与有限数集的一个主要差别在于组成它们的数有没有位置 (顺序) 限制, 因此在研究有限数列的同时, 自然要考虑有限数集的某些性质, 在此主要涉及关于有限数集的子集和子集族的一些简单问题, 这构成这本小册子的另一部分内容. 这里关于子集族的问题乃是超图 (也称"有限集的组合") 中的最简单的结果, 它们是中等数学中排列组合知识的技巧性应用, 因此可被我们的读者对象接受.

这本小册子分为 14 节. 第 1 节给出后文需要的基本概念和记号, 它们多数在中学数学教材中出现过, 这里只是一个简要的回顾和补充. 第 2~13 节借助例题 (50 个) 和练习题 (60 个) 的形式, 讲述上面提到的各项知识, 有些节开始部分首先补充该节需要的预备知识, 其中第 2~5 节、第 6~9 节、第 10~13 节各自形成一个相对独立的单元. 前两个单元涉及数列, 第三个单元讨论数集. 最后一节是第 2~13 节全部练习题的解答或提示. 所选例题和练习题与现行中学数学教材相比有一定的难度. 由于这本小册子的特殊性, 几经踌躇, 我们还是没有采用现行中学数学教材的呈现方式. 但我们力求讲清解题思路, 给出论证和计算的细节, 并引进某些与中学数学教材不同的表达方式. 如果读者通过阅读这本小册子, 开始接触并熟悉这些表达方式, 掌握或进一步熟练某些数学计算和推理的方法或技巧, 那么对于他们今后学习其他数学知识将是有所助益的.

限于笔者的水平和经验, 这本小册子在取材和表述等方面难免存在不足甚至谬误, 欢迎读者和同行批评指正.

朱尧辰

2012 年 10 月于北京

目　次

1　基本概念和记号

1.1　数列的定义

设 S 是一个有限或无限集合. 如果能将它的一些元素按某种方式编号, 依次记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 然后按它们的编号 (也称**下标**) 由小到大的顺序将它们排列为

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

那么我们将这列 (或这组) 元素称为一个 (这种元素的) **序列**, 组成它的每个元素称为它的一个**项**. 例如, 一个班的士兵按由高到矮的顺序自左向右排成一列, 就是一个 (士兵) 序列. 又如, 图书馆书架上的任何一排摆放整齐的书也形成一个 (书) 序列, 它们的顺序一般是按某种图书分类法确定的. 如果集合 S 由某些实数 (或复数) 组成 (即 S 是一个**数集**), 那么得到的序列称为**数列**. 如果数列只含有限多个项, 就叫作**有限数列**, 项的总数称为它的**项数**或**长度**; 否则叫作**无限数列**. 我们在此将主要研究有限数列.

1.2 数列的表示

表示一个数列的最直接的方法是列举出 (即按下标由小到大的顺序写出) 它的所有项. 在有限数列并且项数不大的情形下这是容易做到的. 但在不少情形 (例如无限数列或项数较大时) 下这种方法未必可行, 通常我们采用其他变通的 "列举" 方法. 例如, 正整数列和偶数列可分别表示为

$$1,2,\cdots,n,\cdots \quad 和 \quad 2,4,\cdots,2n,\cdots.$$

注意到数列的项可以看作它的下标的函数, 因此, 如果能用某个解析表达式给出这种函数关系, 那么也就给出了这个数列, 这种解析表达式称为数列的**通项公式**. 例如,

$$a_n = 3n+1 \quad (n \in \mathbb{N}_+)$$

表示无限数列

$$3\cdot 1+1,\ 3\cdot 2+1,\ 3\cdot 3+1,\ 3\cdot 4+1,\ \cdots,$$

即 $4,7,10,13,\cdots$; 而

$$a_k = 3k+1 \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

表示的是项数为 n 的有限数列

$$3\cdot 1+1,\ 3\cdot 2+1,\ 3\cdot 3+1,\ 3\cdot 4+1,\ \cdots,3\cdot n+1,$$

即 $4,7,10,13,\cdots,3n+1$. 当然, 上面的表达式中, 自变量 (下标) 的取值范围不一定总是从 1 开始的自然数, 它可以根据实际需

要而取定. 例如,

$$a_k = 3k+1 \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

表示的是项数为 $n+1$ 的有限数列

$$3\cdot 0+1,\ 3\cdot 1+1,\ 3\cdot 2+1,\ 3\cdot 3+1,\ \cdots,3\cdot n+1,$$

即 $1,4,7,10,13,\cdots,3n+1$. 还有一些数列是用递推的方式给出的. 例如, 我们熟知的 Fibonacci 数列的定义是

$$F_n = F_{n-1}+F_{n-2} \quad (n\geqslant 1), \quad F_0=1, \quad F_1=1,$$

这就是说, 数列的最初两项的值都是 1, 从第 3 项起, 每项都等于它的前两项之和. 它的前 10 项是 $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55$.

此外, 按确定次序排列的一组数 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 也称作**有序数组** (简称**数组**). 因此, 我们可将有限或无限数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 看作是 (或等同于) 一个有限或无限数组 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$.

1.3 数列的相等

数列

$$a_n = (-1)^n \quad (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n = \cos(n+1)\pi \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

是用不同形式的通项公式给出的, 但分别算出它们的项, 可以发现它们的排列位置相同的项 (称**对应项**) 都是相同的, 即它们

表示同一个数列:$-1,+1,-1,+1,\cdots$(偶数位置的项等于 $+1$, 奇数位置的项等于 -1). 一般地, 当且仅当两个数列所有对应项都相等, 这两个数列相等 (或重合).

1.4 子列

从一个数列中 (用任意方式) 抽取一些项并按它们原来的顺序将它们排列, 这样得到的数列称作原数列的**子列**. 例如, 上面所说的偶数列是正整数列的子列. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一个给定的数列, 它的含 $s(\leqslant n)$ 个项的子列可记作 $a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_s}$, 或 $a_{j(1)},a_{j(2)},\cdots,a_{j(s)}$, 其中 $j_1,j_2,\cdots,j_s$(或 $j(1),j(2),\cdots,j(s)$) 是下标数列 $1,2,\cdots,n$ 的子列. 例如, 对于数列 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的子列 x_2,x_3,x_5,x_9(其项数为 4), 有 $j_1=2,j_2=3,j_3=5,j_4=9$.

设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个数列, $k\leqslant n$. 从数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任意选取 k 个, 不计选出的 k 个数的次序, 则得到一个由这 n 个数中取 k 个的组合; 共有 $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$ 个这样的组合. 若将这样一个组合中的各个数按它们各自在数列 X 中的先后次序排列, 即得到 X 的一个长度为 k 的子列. 而且 X 的任何一个长度为 k 的子列都可以这样得到. 因此, 长度为 n 的数列共有 $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$ 个长度为 $k(\leqslant n)$ 的子列.

设 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是数列 X 的任意一项, 那么由 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中取 k 个并且含有 x_i 的组合共有 $\begin{pmatrix}n-1\\k-1\end{pmatrix}$ 个 (即由 $x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$ 中取 $k-1$ 个的组合数). 因此, 依上面所说, 数列 X 的含有项 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 且长度为 $k(\leqslant n)$

的子列总共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 个. 由此推出, 数列 X 的每一项在它的所有长度为 $k(\leqslant n)$ 的子列中出现的次数之和是相等的, 都等于 $\binom{n-1}{k-1}$.

1.5 循环置换

设

$$x_1,x_2,\cdots,x_n \tag{1}$$

是一个给定的有限数列, 在其中从第 1 项 x_1 开始, 依次将 x_1 换作 x_2(写作 $x_1\to x_2$), 将 x_2 换作 $x_3,\cdots$, 将 x_{n-1} 换作 x_n, 最后, 将 x_n 换作 x_1, 得到一个新数列

$$x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1. \tag{2}$$

它的第 1 项是原数列 (1) 的第 2 项 x_2; 第 2 项是原数列的第 3 项 x_3, 等等. 我们将此过程称作对原数列 (1) 实施 1 次**循环置换**. 对于上面得到的数列 (2) 仍然可以实施循环置换, 得到数列

$$x_3,x_4,\cdots,x_n,x_1,x_2, \tag{3}$$

它的第 1 项是数列 (2) 的第 2 项, 即原数列 (1) 的第 3 项 x_3; 第 2 项是数列 (2) 的第 3 项, 即原数列 (1) 的第 4 项 x_4, 等等. 因此数列 (3) 是通过对原数列 (1) 连续实施 2 次循环置换而得到的. 自然, 我们可以对原数列 (1) 连续实施任意次循环置换. 例如, 对于数列

$$2,0,3,-1,3,7,0,-5,9,10 \tag{4}$$

连续实施 4 次循环置换, 依次得到数列

$$
\begin{gathered}
0,3,-1,3,7,0,-5,9,10,2; \\
3,-1,3,7,0,-5,9,10,2,0; \\
-1,3,7,0,-5,9,10,2,0,3; \\
3,7,0,-5,9,10,2,0,3,-1.
\end{gathered}
$$

如果设想将原数列 (1)(比如按顺时针方向) 安放在一个圆周上, 那么以 x_1 为第 1 项 (按顺时针方向) 记下圆周上的数, 就可得到原数列 (1), 以 x_2 为第 1 项 (按顺时针方向) 记下圆周上的数, 就可得到数列 (2), 这相当于对数列 (1) 实施 1 次循环置换. 因此, 一般说来, 对数列 (1) 连续实施 n 次循环置换将回到原数列 (1).

对于某些与数列 (1) 有关的表达式, 当我们对数列 (1) 实施循环置换时, 这个表达式将相应地发生变化, 也就是说, 原表达式中的 x_1 将换成 x_2, 同时 x_2 将换成 x_3, 等等, 但这样得到的新表达式与原表达式相等. 例如, 表达式

$$S=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|+|x_1-x_n|$$

在对数列 (1) 实施 1 次循环置换后, 相应地变成

$$S_1=|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+\cdots+|x_1-x_n|+|x_2-x_1|.$$

显然 $S=S_1$. 这种特性可用来解决某些数学问题 (见后文第 4 节、第 5 节等).

除循环置换外, 还可对数列 (1) 实施一般置换: 令 $x_1 \to x_{s(1)}, x_2 \to x_{s(2)}, \cdots, x_n \to x_{s(n)}$, 其中下标 $s(1), s(2), \cdots, s(n)$ 组成的集合恰好就是 $\{1,2,\cdots,n\}$, 也就是说, 这些下标取自 $\{1,2,\cdots,n\}$, 两两互异. 置换后得到的数列

$$x_{s(1)}, x_{s(2)}, \cdots, x_{s(n)}$$

实际上是数列 (1) 的元素的一个排列. 例如, 对数列 (4) 作置换 $x_1 \to x_2, x_2 \to x_5, x_3 \to x_9, x_4 \to x_8, x_5 \to x_6, x_6 \to x_3, x_7 \to x_1, x_8 \to x_4, x_9 \to x_7, x_{10} \to x_{10}$, 得到数列

$$0,3,9,-5,7,3,2,-1,0,10,$$

它与数列 (4) 的差别只在于元素的排列顺序. 特别地, 当 $s(i) = i+1 (1 \leqslant i \leqslant n-1), s(n) = 1$ 时, 就得到循环置换. 上述一般置换也可用来解决某些数学问题 (见后文练习 4.1、练习 5.1 等).

1.6 周期数列

设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 是一个无穷数列. 若存在正整数 m 使得对于任何下标 i 有 $x_{i+m} = x_i$, 则称 X 是一个**周期数列**或**循环数列**, 正整数 m 称作它的一个**周期**. 由此可知 $x_{i+2m} = x_{(i+m)+m} = x_{i+m} = x_i$; 一般地, 对于任何整数 $q \geqslant 0, x_{i+qm} = x_i$. 此外, 若下标 $i > m$, 则将它表示为 $i = qm + r$, 其中整数 $q \geqslant 1$, $r \in \{1, \cdots, m\}$(例如 $m+1 = 1 \cdot m + 1, 2m = 1 \cdot m + m$), 于是 $x_i = x_{qm+r} = x_r$. 因此, 在上面周期数列的定义中, 可以将条件

$x_{i+m}=x_i$(对所有 i) 换为 $x_{r+qm}=x_r$(对所有整数 $q\geqslant 0$ 及所有 $r\in\{1,\cdots,m\}$).

周期为 m 的周期数列 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 可看成由有限数列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 无限次重复而得到. 这就是说, 设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是一个有限数列, 令

$$x_{1+qm}=x_1, x_{2+qm}=x_2, \cdots, x_{m+qm}=x_m \quad (q=1,2,\cdots),$$

那么 $x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_{2m},\cdots$ 就是一个周期为 m 的周期数列. 如果我们将有限数列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的各项 (按原顺序沿顺时针或逆时针方向) 排列在一个圆周上, 然后让 x_{1+qm} 与 x_1 重合, x_{2+qm} 与 x_2 重合 $\cdots\cdots x_{m+qm}$ 与 x_m 重合, 那么通过在圆周上排列的有限数列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 就表示了相应的周期为 m 的周期数列.

1.7 数集的表示

我们通常用 $S=\{x\,|\,\mathscr{P}(x)\}$ 给出数集 S, 其中符号 $\mathscr{P}(x)$ 一般表示对集合 S 中的元素 (实数或复数)x 的性质的一个陈述, 也就是集合 S 中的数 x 所满足的条件. 例如, 在 $S=\{x\,|\,x\in\mathbb{Q},0\leqslant x\leqslant 1\}$ 中, $\mathscr{P}(x)$ 是 “$x\in\mathbb{Q},0\leqslant x\leqslant 1$”, 因此集合 S 由满足不等式 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的有理数组成.

如果数集 S 是有限的, 那么用 $|S|$ 表示它所含元素的个数 (自然, 对于空集 $\emptyset$, 其所含元素个数为 0), 并且常用列举它的所有元素的方式来表示. 例如 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 表明 S 由从 1 到 n 的所有正整数组成. 类似于上面子列的

记法, 若 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 则用 $T=\{x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_s}\}$ 或 $\{x_{j(1)},x_{j(2)},\cdots,x_{j(s)}\}$ 表示它的一个含 $s(\leqslant n)$ 个元素的子集. 这里下标集合 $\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}$ 或 $\{j(1),j(2),\cdots,j(s)\}$ 是集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集. 因此, 若 $J=\{j_1,j_2,\cdots,j_s\}$ 是 I 的一个子集, 那么 S 的子集 $T=\{x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_s}\}$ 也可表示为 $T=\{x_j\,(j\in J)\}$. 特别地, 若 $J=\{1,2,\cdots,s\}$, 则记 $T=\{x_j\,(1\leqslant j\leqslant s)\}$ 或 $T=\{x_j\,(j=1,2,\cdots,s)\}$.

对于数集 S, 我们用 $\max S$ 及 $\min S$ 分别表示 S 的元素中的最大者及最小者 (若它们存在). 例如 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 和 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 分别表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大数和最小数. 又如, 若 $\{x\,|\,\mathscr{P}(x)\}$ 是一个数集, 则 $\min\{x\,|\,\mathscr{P}(x)\}$ 表示满足条件 $\mathscr{P}(x)$ 的数 x 中的最小者.

1.8 全排列

对于一个数列, 项的排列顺序 (在数列中的位置) 是确定的. 在一个有限数集中, 元素的排列顺序则是任意的, 一般没有限制. 另外, 数列中各项未必互异, 即下标不同的项可以相等, 因而 $x_i=x_j$ 未必蕴含 $i=j$. 但数集中的数一般是互不相等的 (除非特别说明元素可以重复). 因此, 任何一个从 n 个数中取 m 个的排列表示一个确定的数列, 而从 n 个数中取 m 个的组合, 产生原 n 个数组成的集合的一个含 m 个数的子集. 如果数集 S 由 n 个两两不等的实数组成, 那么可得到这些数的 $n!$ 个全排列, 因为数的排列次序不同, 从而产生 $n!$ 个不同的项数都

为 n 的数列. 因此, 我们在下文中, 对于一个全排列及由它产生的数列, 一般不加区分.

1.9 求和记号

最后, 我们补充一个求和记号. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是给定的 n 个数, 那么简记

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

如果 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_s\}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n)$ 是一个下标集, 那么

$$\sum_{i\in I} a_k = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}.$$

还有多种比较复杂的记法, 下面的一种将在后文用到:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j = a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_1a_n \\ +a_2a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_2a_n \\ +\cdots \\ +a_{n-1}a_n.\end{aligned}$$

例如, 设 $n=4, a_1=3, a_2=-2, a_3=0, a_4=8$, 则

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = 3-2+0+8=9,$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} a_i a_j &= \big(3\cdot(-2)+3\cdot 0+3\cdot 8\big)+\big((-2)\cdot 0+(-2)\cdot 8\big)+0\cdot 8 \\ &= 18-16+0=2.\end{aligned}$$