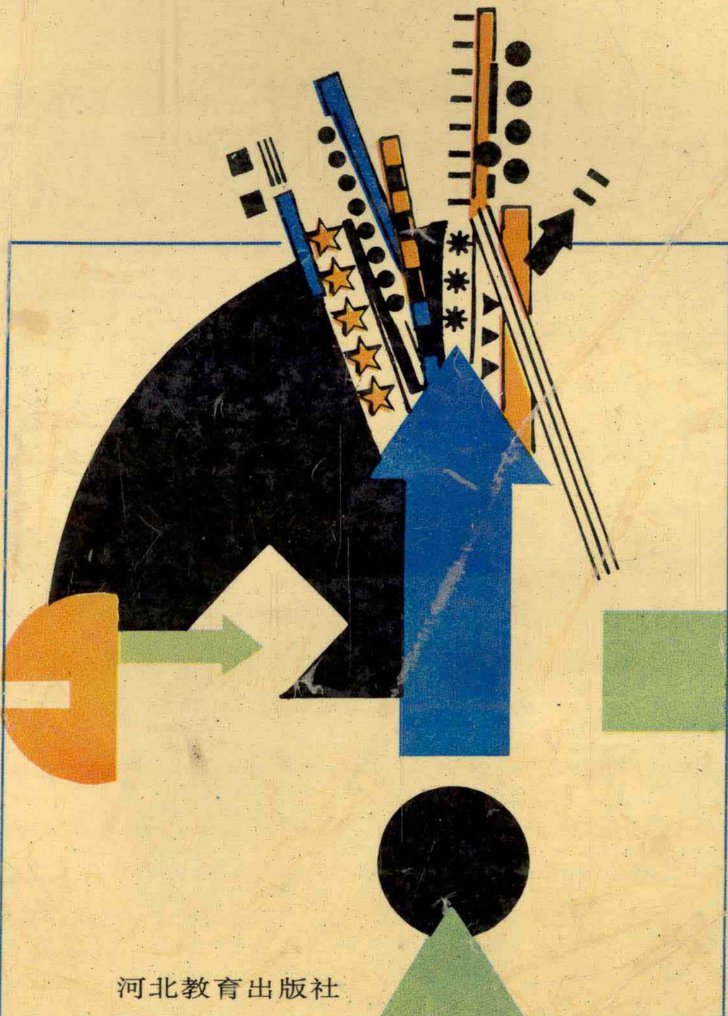
初中数学

中考·会考·高考　考法·考技·考题

主编　郑　廉



河北教育出版社

初中数学

中考·会考·高考　考法·考技·考题

编著　傅崇武　凌文伟
焦艳雪　束素玉
周春红　郑　廉

河北教育出版社

（冀）新登字 006 号

中考·会考·高考　考法·考技·考题丛书

主　编:张德政

副主编:程　迟

杨惠娟

郑致远

初中数学

中考·会考·高考　考法·考技·考题

主编　郑　廉

河北教育出版社出版（石家庄市城乡街 44 号）

石家庄市华闻彩印厂印刷　新华书店总店北京发行所发行

787×1092 毫米　1/32　13.75 印张　293,000 字　1994 年 4 月第 1 版

1994 年 4 月第 1 次印刷　印数:1—5,200　定价:9.50 元

ISBN 7—5434—2025—2/G·1718

前　言

本书依据《全日制中学教学大纲》的要求，紧密结合中考的实际，把知识加以系统梳理、归纳、总结，联系近几年中考的题型、范围、发展趋向进行编写.

主要内容有：〔导语〕、〔考法〕、〔技巧〕、〔题目〕. 简明扼要指出章、节重点难点，基本概念，基本定理；明确应掌握哪些关键知识点、易错点、多考点；从不同角度编写几套模拟练习题，既巩固所学知识，又紧扣中考题型及今后发展趋向；最后按易难程度附三套综合模拟试题.

初中数学撰稿人为傅崇武、凌文伟、郑廉、束素玉、焦艳雪、周春红，由郑廉担任主编.

由于编写时间紧促，疏漏不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

1993 年 12 月

目　　录

第一章　实数与代数式

【导语】

数是数学中最重要、最基本的概念，而用代数式来表示数量之间的普遍关系又是中学数学的基本特征之一，因此掌握好数与式的有关概念、性质和运算，就成为学好整个中学数学的基础. 本章将分三个问题来复习实数和代数式的有关知识.

一、实数

（一）实数的分类

概念的分类，在数学学习中，有着非常重要的意义，无论是系统地学习新知识，还是总结复习一个阶段所学的知识，都需要进行正确的分类. 分类的结果，可以帮助我们提纲挈领地掌握系统的数学知识，巩固和扩大数学知识领域.

实数可以有两种不同的分类方法.

一种方法是：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

另一种方法是：

$$
\text{实}\quad\text{数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{正无理数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}
$$

第一种分类方法强调有理数区别无理数的性质，并给出整数与分数的完整概念．而第二种分类方法体现的是数的发展和扩充过程．学生可以根据不同的分类，加深对概念和法则的理解．

（二）实数的有关概念

1．有理数．

整数和分数统称有理数．

任何一个有理数都可以表示成$\frac{m}{n}$的形式，其中 m、n 为互质数，且 $n\neq0$．

2．无理数．

无限不循环小数叫做无理数．

3．实数．

有理数和无理数统称实数．

4．数轴．

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴．

实数和数轴上的点一一对应．这种一一对应的关系是数学中把数和形相结合的重要基础．

5．相反数．

实数 a 和 $-a$ 称为互为相反数，零的相反数仍是零．

a、b 互为相反数 $\Longleftrightarrow a+b=0$.

数轴上表示互为相反数的两个点，分别在原点的两旁，并且离开原点的距离相等.

6. 绝对值.

一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零.

即：

$$|a|=\begin{cases}a, \text{当 } a>0 \text{ 时},\\ 0, \text{当 } a=0 \text{ 时},\\ -a, \text{当 } a<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

一个实数的绝对值就是数轴上表示这个数的点到原点的距离.

一个实数的绝对值是个非负数.

7. 倒数.

1 除以一个数的商，叫做这个数的倒数，零没有倒数.

（三） 实数大小的比较

正数都大于零；负数都小于零；正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小.

在数轴上表示两个数的点，右边的点所表示的数较大.

（四） 有理数的运算

1. 运算法则(略).

2. 运算定律.

（1） 交换律 $a+b=b+a$， $ab=ba$.

（2） 结合律 $a+(b+c)=(a+b)+c$，

$a(bc)=(ab)c$.

（3） 分配律 $a(b+c)=ab+ac$.

3. 运算顺序.

(1) 先进行第三级运算,即乘方、开方运算;再进行第二级运算,即乘法、除法运算;最后进行第一级运算,即加法、减法运算.

(2) 如果只有同一级运算,就从右依次运算.

(3) 算式中有括号时,先进行括号内运算.

(五) 方根

1. n 次方根.

如果 $x^n=a$(n 是大于 1 的整数),那么 x 叫做 a 的 n 次方根.

当 $n=2$ 时,x 叫做 a 的平方根,也叫二次方根;

当 $n=3$ 时,x 叫做 a 的立方根,也叫三次方根.

正数的偶次方根有两个,它们互为相反数;负数没有偶次方根;零的偶次方根是零.

正数的奇次方根是一个正数;负数的奇次方根是一个负数;零的奇次方根是零.

(六) 近似计算与科学记数法

1. 有效数字.

一个数,从左边第一个不是零的数字起,到这一位数字止,所有的数字,都叫做这个数的有效数字.

2. 科学记数法.

把一个数记成 $\pm a\times10^n$ 的形式称为科学记数法(其中 $1\leqslant a<10$,n 为整数).

二、代数式

（一）代数式的分类

- 代数式
  - 有理式
    - 整　式
      - 单项式
      - 多项式
    - 分　式
  - 无理式

（二）代数式的有关概念

1．代数式．

用运算（加、减、乘、除、乘方、开方）符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫代数式．

2．代数式的值．

用数值代替代数式中的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值．

3．有理式．

只含有加、减、乘、除、乘方运算（包含数学的开方运算）的代数式，叫有理式．

4．无理式．

含有字母开方运算的代数式，叫无理式．

5．整式．

没有除法运算或者虽有除法运算而除式中不含字母的有理式，叫做整式．

整式包括单项式和多项式．

6．分式．

除式中含有字母的有理式，叫做分式．

分式的分母取值如果为零，分式没有意义．

（三）整式的运算

1. 合并同类项法则.

把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母及字母的指数不变.

2. 去、添括号法则.

括号前面是"＋"号时，把括号和它前面的"＋"号去掉，括号里各项都不变；

括号前面是"－"号时，把括号和它前面的"－"号去掉，括号里各项都变号.

3. 正整数幂的运算性质.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

$(a^m)^n = a^{mn}$；

$(ab)^m = a^m b^m$；

$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$.

（其中 m、n 都是正整数）

4. 整式运算法则（略）.

5. 乘法公式.

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$；

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$；

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$；

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

（四）因式分解

1. 因式分解的概念.

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做多项式的因式分解.

2. 因式分解的方法.

(1) 提取公因式法

$$ma+mb-mc=m(a+b-c).$$

(2) 运用公式法

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

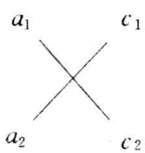
$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2).$$

(3) 十字相乘法

a) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$;

b) $a_1b_1x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.



以上按斜线交叉相乘的积的和就是 $a_1c_2+a_2c_1$.

(4) 分组分解法

分组后能提取公因式或运用公式进行因式分解.

(5) 求根法

如果 x_1、x_2 是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根,那么二次三项式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

3. 因式分解的步骤.

(1) 多项式的各项有公因式时,先提取公因式;

(2) 然后考虑能否用公式分解;

(3) 若上述方法均不能分解,再看能否用十字相乘法、求根法来分解;

(4) 对于三项以上的多项式一般考虑运用分组分解法来

进行分解因式；

(5) 分解因式，必须进行到每一个因式都不能再分解为止.

(五) 分式的运算

1. 分式的基本性质.

分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于零的代数式，分式的值不变.

2. 分式的符号法则.

分子、分母和分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变.

3. 分式的运算(略).

(六) 根式

1. 根式的有关概念.

(1) 根式

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式.

(2) 同次，异次根式

根指数相同的根式叫做同次根式，根指数不同的根式叫异次根式

(3) 最简根式

满足下列条件的根式称为最简根式：

a) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

b) 被开方数不含分母；

c) 被开方数的指数和根指数是互质数.

(4) 同类根式

几个根式化成最简根式后，如果被开方数都相同，根指数也都相同，这几个根式叫同类根式.

(5) 分母有理化

把分母中的根号化去,叫分母有理化.

2. 根式的性质.

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=a$,

(2) 当 n 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=a$;

当 n 为偶数时,$\sqrt[n]{a}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$

(3) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$ ($a\geqslant 0$,m,n,p 为正整数,$n>1$).

(4) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ ($a\geqslant 0$,$b\geqslant 0$,n 为大于 1 的整数).

(5) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($a\geqslant 0$,$b>0$,n 为大于 1 的整数).

(6) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ($a\geqslant 0$,m、n 正整数,$n>1$).

(7) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ ($a\geqslant 0$,m、n 为大于 1 的整数).

3. 二次根式的运算(略).

(七)指数

1. 幂的意义.

(1) 正整数指数幂:

$$a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdots a.}_{m\text{个}}$$

(2) 零指数幂:

$$a^0=1 \quad (a\neq 0).$$

(3) 负整数指数幂:

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m} \quad (a\neq 0),m\text{ 是正整数}.$$

(4) 分数指数幂:

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ （$a\geqslant 0$，m，n 为正整数，$n>1$）.

2. 有理数指数幂的运算性质.

（1）$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

（2）$(a^m)^n=a^{mn}$；

（3）$(ab)^m=a^m b^m$.

（以上各式中，$a>0$，$b>0$，m，n 为有理数）

正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提. 实数与代数式的有关概念都是最基本的概念，正确地理解和掌握这些概念，对学好本章内容，甚至对整个初中阶段的学习都将起着重要的作用.

例 1 在实数 0.4、$-\sqrt{3}$、-1.732、π、3.14159、0、$\frac{22}{7}$、$0.\dot{3}$中哪些是无理数?

解 在以上实数中，$-\sqrt{3}$、π 是无理数.

说明 要想准确而迅速地解答此题，就要求我们对实数的分类及其有关概念十分清楚. 特别需要指出的是，凡能表示成即约分数$\frac{m}{n}$的形式的数都是有理数.

例 2 下列各数中，哪些互为相反数? 哪些互为倒数? 哪些互为负倒数?

$$\sqrt{5}+2,3,0.875,2\sqrt{2}-1,-\frac{1}{3},-0.2,$$

$$\sqrt{5}-2,3\frac{1}{3},1\frac{1}{7},1-2\sqrt{2},\frac{1}{5},-0.3,5.$$

解 互为相反数：$2\sqrt{2}-1$ 和 $1-2\sqrt{2}$，-0.2 和$\frac{1}{5}$；

互为倒数：$\sqrt{5}+2$ 与 $\sqrt{5}-2$，0.875 与 $1\frac{1}{7}$，$\frac{1}{5}$与

5.

互为负倒数：3与$-\frac{1}{3}$，-0.2与5，$3\frac{1}{3}$与-0.3.

说明 搞清相反数、倒数、负倒数的概念不要混淆三者的关系.

例3 化简下列各题：

①若$a<0$，化简$|a-\sqrt{a^2}|$；

②$\sqrt{\sin^2x-2\sin x+1}$.

解 ①∵ $a<0$，

∴ $|a-\sqrt{a^2}|$

$=|a-(-a)|$

$=|2a|$

$=-2a$.

② $\sqrt{\sin^2x-2\sin x+1}$

$=\sqrt{(\sin x-1)^2}$

$=|\sin x-1|$.

∵ $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，

∴ 原式$=1-\sin x$.

说明 算术根和绝对值是两个重要概念，含有绝对值式子的化简，关键在于正确地判断绝对值符号内代数式的值的符号，再根据绝对值的意义去掉绝对值的符号，算术平方根和绝对值都是非负数，通常可利用公式$\sqrt{a^2}=|a|$把算术根的问题转化成绝对值的问题来解决.

例4 计算

$$1\frac{2}{3}-\left\{5\frac{3}{4}-2^2\div\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{1}{8}\right\}.$$

解 原式$=1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{4}-4\div\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\times\frac{1}{8}\right]$

$$=1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{4}-4\div(-2)\times\frac{1}{8}\right]$$

$$=1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right]$$

$$=1\frac{2}{3}-6$$

$$=-4\frac{1}{3}.$$

说明 有理数的综合运算是学生非常容易出错的一类计算题. 对于此题,学生易错的地方有三个:其一,把 -2^2 按照 $(-2)^2=4$ 进行计算;其二,在计算 $4\div(-2)\times\frac{1}{8}$ 时,没有注意运算顺序,先做 $(-2)\times\frac{1}{8}$;其三,当括号前是"$-$"号时,去括号忘记变号,以上是学生在进行计算时,存在较普遍的一些问题.

例 5 计算 $(x+y-z)(x-y-z)-(x-y-z)^2$.

解 原式 $=(x-z)^2-y^2-[(x-z)^2-2y(x-z)+y^2]$

$$=(x-z)^2-y^2-(x-z)^2+2y(x-z)-y^2$$

$$=2xy-2yz-2y^2.$$

说明 拿过一道题,不要急于解答,要先通过观察、分析、找出最佳解题方法,有时利用一些解题技巧,可以大大提高解题速度,避免解题出错. 在以上的计算中,把 $(x-z)$ 看成一个整体使计算过程简化.

例 6 当 x 取何值时,分式 $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-x-2}$ 的值是零?无意义?

解 原式 $=\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)(x+1)}$,

$\therefore$ 当 $x=5$ 时分式值为零.

当 $x=2$ 或 $x=-1$ 时分式无意义.