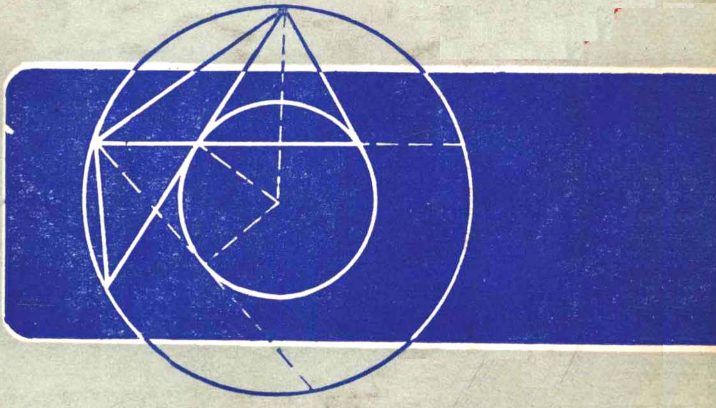
初中数学总结辅导

第二版

主编 翟连林



数学自学丛书

中国农业机械出版社

数学自学丛书

初中数学总结辅导

第二版

主编 翟连林

中国农业机械出版社

内容简介

本书是"数学自学丛书"之一。

本书出版后，深受广大读者欢迎，这是第二版。作者在第一版的基础上经过认真修改，充实了基础知识的内容，突出了能力的培养与训练。本书主要内容包括：正确理解与运用数学概念和性质；准确记忆、灵活运用定理、公式和法则；熟练掌握重要数学方法以及综合训练共四章。在综合训练部分除介绍如何运用分析综合法寻求解题思路外，还编拟了综合训练题组（共十组，并附答案或提示），供读者检查自己掌握初中数学的实际水平。为使读者，特别是补课职工了解高中、技校招生对数学的要求，还精选了近年来十个省、市或地区高中、技校的数学试题（附解答或提示）。

本书可供自学青年、职工、初中学生及中学数学教师参考。

初中数学总结辅导

（第二版）

主编　翟连林

编者　郝雨淋　林聚宝　艾友光

翟录红　甄颖华

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092 32开　16 3/4 印张　370 千字

1985 年 5 月北京第二版・1985 年 5 月第二次印刷

印数：320,001—510,000　定价：2.45 元

统一书号：7216・65

序

为适应我国“四化”建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急。从我国广大职工的实际出发，科学水平的提高尤感迫切。中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的。但是这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平，只是久缓的计议，不是当务之急，这样当然就谈不上有什么迫切感了。其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背。中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》(第一版)问世以来，受到极为广泛的读者热烈欢迎，很重要的一个因素，就是因为它适应了当前的迫切需要。

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础。当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学。要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎。所以这套丛书的出版具有极为深远的意义。

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面。

一、取材允当，适用面广泛

事实上，该丛书是根据中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和大专学生自修参考之用，以及中学数学老师进修提高之用。

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都按基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样。在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练题与综合训练题的配合，从而既能使读者牢固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节。

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学。还通过提示方式，启发读者自行解题。既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考。

以上是概括这套丛书的特点，当然不是说每一本书都一样，更不是说每一本书都是完美无缺。而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国"四化"建设中继续发挥它的根本性的作用。

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国数学学会副理事长，北京大学数学研究所所长。

前　言

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学低年级数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套“数学自学丛书”.

这套丛书包括：

一、初中部分

1.《初中代数双基训练》；

2.《平面几何双基训练》；

3.《初中数学总结辅导》.

二、高中部分

1.《高中代数双基训练》；

2.《立体几何双基训练》；

3.《平面三角双基训练》；

4.《平面解析几何双基训练》；

5.《高中数学总结辅导》.

三、大学专科部分

1.《一元微积分双基训练》；

2.《多元微积分双基训练》；

3.《线性代数双基训练》；

4.《概率统计双基训练》；

5.《复变函数双基训练》；

6.《逻辑代数与BASIC语言双基训练》.

为便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统

地归纳和总结数学基础知识；然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正常易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题（包括解答或提示）的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力.

这套丛书是由北京、上海、福建、江苏、浙江、河北、河南等省、市的三十多位在大学讲授基础课的教授、讲师，在中学具有多年教学经验的数学教师和教研室的教研员共同编写的.

在这本《初中数学总结辅导》编写过程中，作者参阅了大量书报、杂志和一些省、市初中数学“双基训练”资料，特别是湖北省荆州地区教育局教研室、浙江省嘉善县教育局教研室的资料. 有的内容是直接选用的，在此特别说明，并向原作者表示衷心的感谢. 本书的问世，刘尚宽同志（北京市密云县北庄中学）付出了辛勤的劳动，帮助作者校核、抄写等作了大量工作，孙百茂、单雪琴二位老师帮助绘图，在此一并致谢.

由于我们的水平有限，编写时间也仓促，书中的缺点、错误在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　　者

1984年8月

目　录

第一章　正确理解与运用数学概念和性质

第一节　正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提

概念是思维的细胞．如果概念不清，就会思维混乱．概念也是学好定理、公式、法则和数学方法以及提高解题能力的基础，如果概念不清，计算、推理就会发生错误．因此，正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提．

不少同学无论是在平日的学习，还是在复习中，对正确理解和运用数学概念的重要性认识不足，因此在作业中以及考试的试卷中出现各种各样概念性错误．

例 1　若 $a<0$，化简 $|a-\sqrt{a^2}|$．

不少同学得 0，反映出他们对算术根和绝对值的概念都没有掌握．有的同学算术根概念清楚，绝对值概念不清楚会得到 $2a$ 的结果．只有这两个概念都清楚才能得到正确的结果：$-2a$．具体化简过程如下：

$$|a-\sqrt{a^2}|=|a-(-a)|\text{（算术根概念）}$$
$$=|2a|$$
$$=-2a.\text{（绝对值概念）}$$

例 2　求使函数 $y=\sqrt{-x^2}$ 有意义的 x 的实数范围．

这是 1982 年的高考题，不少同学由于在初中没有掌握算术根和完全平方数的概念而不会解答．有人竟答成“没有

使y有意义的x值”，错误地认为$-x^2$只能是负数，而忘记了还可能得0．有的同学尽管由算术根的概念知道$-x^2\geqslant 0\Rightarrow x^2\leqslant 0\Rightarrow|x|\leqslant 0$，但由于绝对值的概念不清楚，不知道这里的“<”号不成立，而得不出$x=0$的结论．

例3 将多项式x^5y-9xy^5分别在下列范围内分解因式：

（1）有理数范围；（2）实数范围．

有的同学由于有理数、实数的概念不清楚，在有理数范围内作这样的“分解”：

$$x^5y-9xy^5=xy(x^4-9y^4).$$

还有人在实数范围内作如下的“分解”：

$$\begin{aligned}x^5y-9xy^5&=xy(x^4-9y^4)\\&=xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2).\end{aligned}$$

正确解答应该是：

（1）在有理数范围：

$$xy(x^2+3y^2)(x^2-3y^2);$$

（2）在实数范围：

$$xy(x^2+3y^2)(x+\sqrt{3}\,y)(x-\sqrt{3}\,y).$$

例4 选择题：

本题共有4个小题，每小题都有A、B、C、D四个答案，其中有一个且只有一个答案是正确的，请你把正确的答案的代号，写在题后的括号内．

1．把$a\cdot\sqrt{-\frac{1}{a}}$中的$a$移入根号内，得

（A）$\sqrt{a}$；（B）$\sqrt{-a}$；（C）$-\sqrt{a}$；

（D）$-\sqrt{-a}$．（ ）

2．在$\triangle ABC$中，若$\cos A\cdot\operatorname{tg}B<0$，则这个三角形

是：

（A）锐角三角形；（B）直角三角形；

（C）钝角三角形；（D）不能确定．（　）

3．若 a、b 是实数，则下列四个命题中正确的命题是：

（A）若 $a\neq b$，则 $a^2\neq b^2$；（B）若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$；

（C）若 $|a|>|b|$，则 $a>b$；（D）若 $a^2>b^2$，则 $a>b$．（　）

4．当 $b<0$ 时，一次函数 $y=ax+b\ (a\neq 0)$ 与二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 在同一坐标系内的图象是：

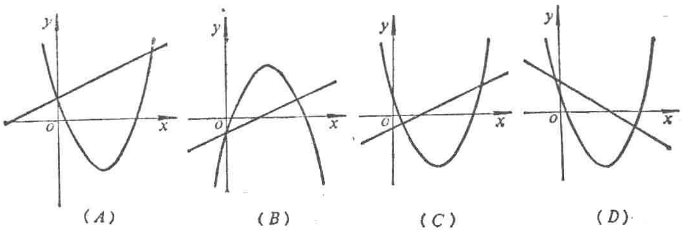


图 1-1

对于1．有的同学由于算术根的概念不清，由 $\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 不知 $a<0$，致使不能正确选择（D）．

对于2．有的同学由于对三角形中，最多有一个钝角的概念不清，而不能正确选择（C）．

对于3．有的同学由于对相反数的概念、绝对值的概念、算术根的概念以及实数的比较大小不清楚，而不能正确选择（B）．

对于4．有的同学由于对当 $b<0$ 时，一次函数 $y=ax+b\ (a\neq 0)$ 的截距在 y 轴负半轴，且当 $a>0$ 时，$y=ax$

$+b$ 随着 x 的增大而增大以及二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象开口向上等概念不清楚，而不能正确选择（C）。

例 5 当 a 为何值时，方程 $3x^2+(a^2-3a-10)x+3a=0$ 的两根互为相反数？

有的同学求解如下：

根据题设，由韦达定理，有

$$-\frac{a^2-3a-10}{3}=0.$$

解之，得 $a_1=5$，$a_2=-2$。

∴ 当 $a=5$ 或 -2 时，两根互为相反数。

把 $a=5$ 代入原方程，得 $x^2+5=0$，无实根。

可见 $a=5$ 不合题意。

我们说上面的解答是错误的。错在只看到互为相反数的二数之和为 0，而忽视了它们的积小于 0。

正确的解答应该是：根据题意，由韦达定理，得

$$\begin{cases}-\dfrac{a^2-3a-10}{3}=0,\\[2ex] \dfrac{3a}{3}<0.\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a=5\text{ 或 }a=-2,\\ a<0,\end{cases}\quad\text{即 }a=-2.$$

例 6 设 A 为三角形的一个内角，化简：

$$\sqrt{\frac{1}{\sin^2 A}-1}.$$

有的同学求解如下：

$$原式=\sqrt{\frac{1-\sin^2 A}{\sin^2 A}}=\sqrt{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}=\frac{\cos A}{\sin A}=\operatorname{ctg} A.$$

这是由于算术根的概念不清造成的错误．正确的解法是：

$$原式=\sqrt{\frac{1-\sin^2 A}{\sin^2 A}}=\sqrt{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$=\frac{|\cos A|}{\sin A}=\begin{cases}\operatorname{ctg} A\ (当0^\circ<A<90^\circ时), \\ 0\ (当A=90^\circ时), \\ -\operatorname{ctg} A\ (当90^\circ<A<180^\circ时).\end{cases}$$

例 7　解方程　$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$.

如果对非负数的概念和性质不清楚，就会按通常解无理方程的步骤得出如下的繁琐过程：

移项，得$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}=-\sqrt{x^2-3x+2}$，

两边平方，并整理，得

$$\sqrt{(x-1)^2(x+1)}=2(1-x).$$

两边再平方，得

$$(x-1)^2(x+1)=4(1-x)^2,$$

即　$(x-1)^2(x-3)=0$.

则　$(x-1)^2=0$，$\therefore\ x_1=1$，

$x-3=0$，$\therefore\ x_2=3$.

经检验，$x_1=1$是原方程的根；$x_2=3$是增根，舍去．

如果非负数的概念清楚，一眼就看出$\sqrt{x^2-1}$，$\sqrt{x-1}$，$\sqrt{x^2-3x+2}$都是非负数，而且熟悉非负数的性质："若有限个非负数之和等于零，则每一个非负数必为零"，可由方程组

$$\begin{cases} x^2-1=0, \\ x-1=0, \\ x^2-3x+2=0, \end{cases}$$

立得原方程的根是 $x=1$.

例 8 解方程：$\lg(x-3)^2=2$.

有的同学求解如下：

原方程变为

$$2\lg(x-3)=2$$
$$\Rightarrow \lg(x-3)=1,$$
$$\therefore \quad x-3=10 \Rightarrow x=13.$$

经检验：$x=13$是原方程的根.

这种解法丢根. 这是由于对方程同解的概念不清楚造成的. 把原方程化为$2\lg(x-3)=2$，这两个方程已不同解. 方程 $\lg(x-3)^2=2$ 中的 x 的取得范围是 $x\neq 3$，而方程 $2\lg(x-3)=2$ 中的 x 的取值范围却是 $x>3$.

正确解法是：

$$\lg(x-3)^2=\lg 100$$
$$\Rightarrow (x-3)^2=100.$$

解之，得 $x=13$，或 $x=-7$.

经检验：$x=13$或 $x=-7$ 都是原方程的解.

通过上面几个例子我们看到，正确理解和运用数学概念是非常重要的，概念是进行正确思维的前提和依据. 因此，同学们在复习中要把正确理解和运用数学概念放在重要地位.

练　　习

指出下列求解（证）过程中的概念性错误：

一、化简：

1. $|1-\sqrt{2}|+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$.

解：原式$=1-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=1-\sqrt{3}$.

2. $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$.

解：原式$=\sqrt[6]{(2-\sqrt{5})^2}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}$

$$=\sqrt[6]{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}$$

$$=\sqrt{81-80}=1.$$

二、回答：

1. $\dfrac{x^2}{x}=x$是恒等式吗？为什么？

2. 在条件$\dfrac{x-2}{x+1}<1$下，结论$x-2<x+1$对吗？为什么？

答：1. 不是. 因为若恒等，等式两边的字母不论用什么值代入，两边的值应该相等，而这个式子当$x=0$时，左边没有意义，右边却有意义，所以它不是恒等式.

2. 不对. 因为当$x+1<0$时，$x-2>x+1$.

三、解不等式$\dfrac{1-3x}{x-2}<2$.

解：两边同乘以$x-2$，得

$$1-3x<2x-4,\quad -5x<-5,$$

$\therefore \qquad x<1$.

四、设n边形的内角和为s，则$s=(n-2)\cdot180^\circ$，问n、s构成什么函数关系？

答：n、s构成正比例函数，其中n是自变量.

五、a是什么实数时，$\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{2x+a}{x(x-2)}=0$只有一个实数根？并求出这个实根.

解：原方程可变为

$$\frac{2x^2-2x+4+a}{x(x-2)}=0 \qquad ①$$

要使原方程只有一个实根，只要使方程

$$2x^2 - 2x + 4 + a = 0 \qquad ②$$

的判别式 $\Delta = 4 - 8(4 + a) = 0$，

解之，得 $a = -\frac{7}{2}$.

把 $a = -\frac{7}{2}$ 代入②，解得

$$x = \frac{1}{2}.$$

∴ 当 $a = -\frac{7}{2}$ 时，原方程只有一个实根 $x = \frac{1}{2}$.

六、如图 1-2，在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 AB 边上的高，$\angle ACE = \angle B$，

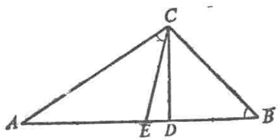


图 1-2

求证：$AB = AE$.

证明：∵ $\angle ACE = \angle B$，$\angle A = \angle A$，则

$$\triangle ABC \backsim \triangle ACE$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ACE} = BC^2 : CE^2.$$

又 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ACE} = AB : AE$（∵ CD 是同高）.

于是 $BC^2 : AB = CE^2 : AE$ ①

由余弦定理，得

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC\cos A$$
$$= AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD,$$
$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AE \cdot AC\cos A$$
$$= AC^2 + AE^2 - 2AE \cdot AD.$$

代入①式，得

$$\frac{AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD}{AB} = \frac{AC^2 + AE^2 - 2AE \cdot AD}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AC^2}{AB} + AB - 2AD = \frac{AC^2}{AE} + AE - 2AD$$