

微积分卷

吴振奎高等数学解题真经

© 吴振奎 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研复习——跋涉艰难
名师大家——仙人指路

013038598

013-44

475

V3

微积分卷

吴振奎高等数学解题真经

◎ 吴振奎 编著



013-44
475
V3



北航

C1646494



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

802880810

内 容 简 介

高等数学是大学理工科及经济管理类专业的重要基础课,是培养学生形象思维、抽象思维、创造性思维的重要园地。

本书具有以下特点:广泛使用表格法,使有关内容、解题方法和技巧一目了然;从浩瀚的题海中归纳、总结出的题型解法,对同学们解题具有很大的指导作用;用系列专题分析对教材的重点、难点进行了诠释,对同学们掌握这方面知识起到事半功倍的效果。

本书是针对考研、参加数学竞赛的同学撰写的,对在读的本科生、专科生及数学教师同仁 also 具有很高的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

吴振奎高等数学解题真经.微积分卷/吴振奎编著.

—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.1

ISBN 978-7-5603-3448-6

I. ①吴… II. ①吴… III. ①高等数学-高等数学-题解 ②微积分-高等学校-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 258564 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 刘 瑶

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 35.25 字数 1039 千字

版 次 2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3448-6

定 价 68.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 前 言

怎样解题？这是一个十分沉重，而又不得不去面对的话题，尤其是对青年学子。

我们知道：干活不能光凭手巧，还要借助家什；做数学题也不能只凭借聪明，还要注意（掌握）方法。数学中的“方法”正如干活的“家什”、过河的“船”和“桥”。

面对浩瀚的题海，不少人（特别是初学者）会觉得茫无所措、叫苦不迭。要学好数学，除了掌握基础知识外，更重要的是做题，可关键是怎样去做。是就题论题、按部就班、多多益善？还是择其典型、分析实质、积累经验、掌握方法？当然应取后者。因为只有掌握了方法，才能做到融会贯通、举一反三；只有掌握了方法，才能学以致用、应付万变。

多年的学习与教学实践使我体会到：“方法”对于数学学习的重要，它像天文学中的望远镜，物理学中的实验设备，化学中的试剂、仪器等。应该看到：如果不掌握方法，即使你熟悉解答个别类型问题的手段，纵然是你似曾相识的题型，可一旦题目稍稍改动，你也将会一筹莫展——因为你没能了解问题的实质，没有掌握独立解决新问题的本领。

在学习数学的过程中你会发现：看十道题，不如做一道题；而做十道题，不如分析透一道题。只要细心、认真，你在求解任何问题过程中，都会有点滴体会，细微发现。把这些点点滴滴的东西积累起来，去分析、去筛选、去归纳、去总结，你也就得到了方法。

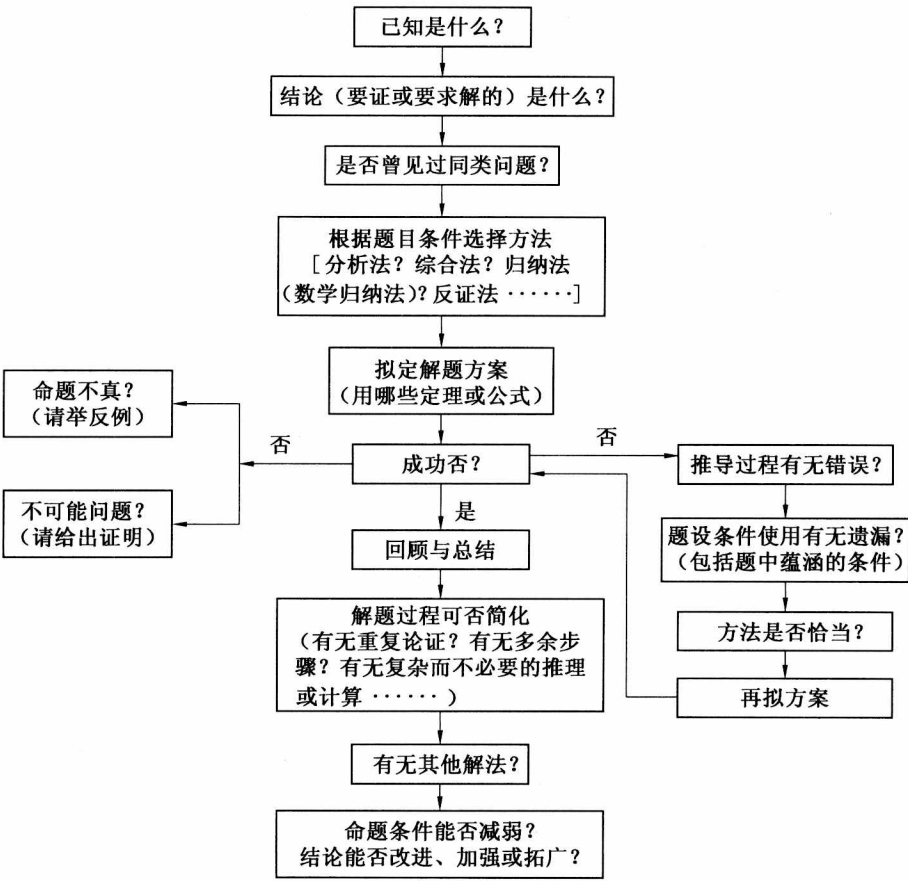
俗话说“熟能生巧”。在熟练掌握了方法的同时，你也就有了技巧。正是：方法源于实践，技巧来自经验。把经验的涓涓细流汇聚起来，便能涌出技巧的小溪——这恰是智慧江河的源头。

笔者几十年来的经历：学数学、练解题、读文章、做数学、教数学……无论成功与失败、经验与教训、顺利与挫折……它们都成了宝贵的财富。

本书奉献给读者的正是这些。

当然，解数学问题绝对没有什么普遍的、万能的模式，但它仍然存在着某些规律、方法和技巧，掌握了它们，至少可以在大的方向上有所选择，这势必会大大加快解题速度，这对学好数学无疑是重要的。但愿这些能给读者带来益处，这正是笔者撰写本书的目的与愿望。

话再讲回来，方法虽然千变万化、五彩缤纷，但解题步骤却大多雷同。下面给出一个解题步骤的框图——其实你在解题过程中正在或已经自觉不自觉地履行它，不是吗？



诚挚的批评与指教正是笔者所期待的，但愿多些，再多些。

吴振奎

2011 年 5 月于天津



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	36
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的五心	2009-06	28.00	51
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-1		162



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
数论入门	2011-03	38.00	99
解析数论引论	2011-03	48.00	100
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012-01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012-01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-01		159
同余理论	2012-01		163



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题集	2011—09	68.00	128

整函数	2012—1		161
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—02		165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2011—12	68.00	153
初等数学研究(Ⅰ)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009—05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
数阵及其应用	2012—01		164
不等式的秘密(上卷)	2012—01	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134,135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008—06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008—09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009—06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010—01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011—01	28.00	81

数学 我爱你	2008—01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008—09	48.00	39
数学史概论	2009—06	78.00	50
斐波那契数列	2010—02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010—07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011—01	28.00	160
数学的创造	2011—02	48.00	85
数学中的美	2011—02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009—02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009—08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007—04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009—08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010—01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010—01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011—03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010—01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011—07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011—07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011—07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011—10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011—10	78.00	140, 141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012—01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012—01		166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012—01		167
300 个日本高考数学题	2012—02		142



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16

方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从斡数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011-12	48.00	155

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn



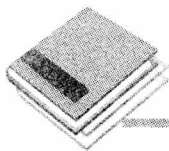
北航

C1646494

目 录

第 1 章 函数、极限、连续	1
一、函数表达式、定义域及某些特性问题的解法	1
二、求各类极限的方法	9
三、函数的连续性问题解法和利用函数连续性解题	43
习题	52
第 2 章 一元函数的导数与微分	56
一、一元函数的导数计算方法	56
二、导数、微分中值定理的应用及与其有关的问题解法	75
专题 1 方程根及函数零点存在的证明及判定方法	98
专题 2 不等式的证明方法	111
附录 从转化观点看几道数学考研不等式问题	155
习题	160
第 3 章 一元函数的积分	165
一、不定积分的基本算法	165
二、定积分的基本算法	188
三、定积分的应用和与定积分有关的某些问题解法	209
四、广义积分的判敛与计算方法	218
习题	234
第 4 章 多元函数的微分	237
一、多元函数的极限与连续性问题解法	237
二、多元函数的偏导数问题解法	241
专题 3 函数的极、最值问题解法	261
习题	282
第 5 章 多元函数的积分	285
一、重积分的计算方法	285
二、曲线、曲面积分的计算方法	304
三、多元函数积分的应用和与其有关的问题解法	324
习题	331

第 6 章 级 数	335
一、数项级数判敛方法	335
二、幂级数收敛范围(区间)的求法	354
三、级数求和方法	361
四、函数的级数展开方法	380
五、级数的应用及与其有关的问题解法	392
习题.....	402
第 7 章 微分方程	405
一、一阶微分方程的解法	405
二、高阶微分方程的解法	415
三、微分方程组的解法	428
四、微分方程(组)解的某些性质研究	430
专题 4 关于求 $f(x)$ 的问题	433
习题.....	447
第 8 章 各类几何问题	449
一、空间解析几何问题解法	449
二、微积分中的几何问题解法	461
习题.....	489
第 9 章 专题分析	492
专题 5 数学中的证明方法	492
习题.....	506
专题 6 高等数学课程中的反例	508
专题 7 高等数学课程中的一题多解列举	514
习题.....	536
专题 8 高等数学课程中的近似计算及误差分析	539
习题.....	548
编辑手记	549
参考文献	550



第 1 章

函数、极限、连续

一、函数表达式、定义域及某些特性问题的解法

函数是高等数学中的一个重要概念. 它是这样定义的:

已知 X, Y 是两个集合, 若对 X 中的每一元素 x , 通过法则 (映射) f 对应到 Y 中的唯一元素 y , 则称 f 为定义在 X 上 (可以是 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 也可以 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, 甚至 $\mathbf{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}$) 的一个函数, 记 $y = f(x)$, 见图 1.

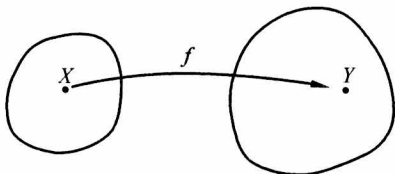


图 1

x 又称自变量, y 又称因变量, 变量也称为元.

X 称为函数定义域, $Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数的值域.

又若 Y 中每一个 y , 在 X 中均有唯一的 x 与之对应, 这个以 y 为自变量的新函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$.

函数按其内容或性质见表 1.

表 1

函 数	按内容	初等函数	代数函数	有理函数
				无理函数
		高等函数	超越函数	
	按表达式	显函数 (含参数式)		
		隐函数		
按变元个数	一元函数			
	多元函数			
按性质	奇、偶函数			
	周期函数			
	齐次函数			
				
.....				





函数 $y = f[\varphi(x)]$ 是由 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成, 则称其为复合函数(u 称为中间变量).

(一) 函数解析式及其定义域求法

1. 函数解析式(表达式)的求法

函数的解析式一般可分为显式、隐式和参数式三种, 见表 2.

表 2

函数种类	定义	表示方式
显函数	已解出因变量为自变量的解析表达式所表示的函数	$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
隐函数	用方程表示自变量与因变量间关系的函数	$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$
参变量函数	用参变量所表示的函数	$\begin{cases} x_i = \varphi_i(t) \\ y_i = \psi_i(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$

人们说的所谓“函数解析表达式”往往是指显式而言, 它的求法多是依据题设中的条件. 下面来看几个例子.

例 1 设 $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2}}$, 试求 $f[f(x)]$.

$$\text{解} \quad f[f(x)] = \sqrt{\sqrt{x + \sqrt{x^2}} + \sqrt{(\sqrt{x + \sqrt{x^2}})^2}} = \sqrt{2\sqrt{x + \sqrt{x^2}}} = \sqrt{2f(x)}$$

它的一般形式为

$$f\{f[f \cdots f(x)]\} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots \sqrt{2f(x)}}}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}} [f(x)]^{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

例 2 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 试求 $f(f(f(f(x))))$ 和 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ ($x \neq 0$ 且 $x \neq 1$).

解 由 $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$, 有 $\frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x}$. 则

$$f(f(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{f(x)}} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x$$

故

$$f(f(f(x))) = f(x)$$

从而

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{1 - \frac{1}{f(x)}} = x$$

而

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1 - x, \quad x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1$$

注 由解题过程不难发现

$$\underbrace{f(f \cdots f(x))}_{k \text{ 重}} = \begin{cases} f(x), & k \text{ 为奇数} \\ x, & k \text{ 为偶数} \end{cases}$$

严格地证明, 还要用数学归纳法去完成.

例 3 设 $f_1(x) = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 又 $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$ ($n \geq 2$), 试求 $f_n(x)$.





解 由题设 $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 故

$$f_2(x) = f[f_1(x)] = \frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

归纳地: 若设 $f_{n-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$, 则

$$f_n(x) = f[f_{n-1}(x)] = \frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{1+f_{n-1}^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

例4 若 $f(n) = 1 - n (n \in \mathbf{Z})$, 且对每个 n 有 $f[f(n)] = n$, 且 $f[f(n+2)+2] = n$, 同时 $f(0) = 1$. 试证: $f(n)$ 唯一.

证 由题设 $f(n) = 1 - n$, 则

$$f[f(n)] = f(1-n) = 1 - (1-n) = n$$

又 $f[f(n+2)+2] = f\{[1-(n+2)]+2\} = f[f(-n-1)+2] = f(1-n) = n$

且 $f(0) = 1$. 反之由

$$f\{f[f(n+2)+2]\} = f(n)$$

从而

$$f(n+2)+2 = f(n)$$

即 $f(n+2) = f(n) - 2$. 归纳地有

$$f(n) = \begin{cases} f(0) - n, & n \text{ 为偶数} \\ f(1) + 1 - n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

又 $f(0) = 1$, 从而 $f(1) = 0$, 即 $f(n) = 1 - n$.

由上面几例可以看出: 这类问题的实质是“复合”. 下面再来两个例子.

例5 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leq 1 \\ 2, & |x| > 1 \end{cases}$. 求 $f[g(x)]$.

解 由题设知: 当 $|x| < 1$ 时, 有

$$f[g(x)] = f(2-x^2) = 0$$

当 $|x| = 1$ 时, 有

$$f[g(x)] = f(1) = 1$$

当 $|x| > 1$ 时, 有

$$f[g(x)] = f(2) = 0$$

综上

$$f[g(x)] = \begin{cases} 0, & |x| \neq 1 \\ 1, & |x| = 1 \end{cases}$$

例6 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$. 求 $g[f(x)]$.

解 设 $u = f(x)$, $v = g(x)$, 由题设有

$$g[f(x)] = g(u) = \begin{cases} u-1, & u \geq 1 \\ 1-u, & u < 1 \end{cases}$$

但当 $x > 0$ 时, $u = 1$; 当 $x \leq 0$ 时, $u = 0$. 故

$$g[f(x)] = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

注 实际上 $g[f(x)] = 1 - f(x)$, 这只需注意到





$$1 - f(x) = \begin{cases} 1 - 1, & x > 1 \\ 1 - 0, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

例 7 若 $z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$, 且已知当 $y = 1$ 时, 有 $z = x$. 求 $f(x)$ 及 z 的解析表达式.

解 由设 $y = 1$ 时 $z = x$, 代入题设等式有

$$x - 1 = f(\sqrt[3]{x} - 1)$$

令 $\sqrt[3]{x} - 1 = t$, 则 $x = (1 + t)^3$, 代入上式有

$$f(t) = (1 + t)^3 - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t$$

故

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x, \quad z = \sqrt{y} + x - 1$$

下面的例子还涉及了函数的求导问题①.

例 8 已知 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f[f'(x)]$.

解 由 $f'(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$

则

$$f[f'(x)] = \frac{1}{1+f'(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2-1}$$

例 9 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 又对任意 $x > 0$ 有 $f(x^2) = f(x)$, 且 $f(3) = 5$. 求 $f(x)$.

解 当 $x > 0$ 时, 有

$$f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = \cdots = f(x_2^{\frac{1}{n}})$$

则

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_2^{\frac{1}{n}}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{\frac{1}{n}}) = f(1)$$

即

$$f(x) \equiv \text{const} \quad (\text{常数})$$

又由题设 $f(3) = 5$, 故

$$f(x) = f(1) = f(3) = 5$$

最后看一个二元函数的例子.

例 10 若 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 设 $x+y = u, \frac{y}{x} = v$, 解得 $x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$. 故

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{(1-v)u^2}{1+v}$$

即

$$f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

还有一批函数解析式的求法可见后面的“微分方程”一章内容.

这里我们想指出一点: 并非所有函数均可用解析式表达, 有的函数只能用语言文字描述, 比如:

• 符号函数:

$$y = \text{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

• 克罗耐克尔(Kronecker)函数:

① 鉴于本书的特点即是将问题综合叙述, 因而有些时候例子中涉及的内容会将通常教程章节或内容顺序稍加打乱, 这些以后不再一一说明.

