工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材立项项目

微积分

（经管类）

（下册）

顾聪 姜永艳 主编

王宁 李晓 卜维春 丁 何建营 副主编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育"十二五"立项项目

微积分

（经管类）

（下册）

顾聪 姜永艳 主 编
王宁 李晓 卜维春 丁箭飞 何建营 副主编

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

微积分 : 经管类. 下册 / 顾聪, 姜永艳主编. --
北京 : 人民邮电出版社, 2013.8
ISBN 978-7-115-32035-3

I. ①微… II. ①顾… ②姜… III. ①微积分—教材
IV. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第142398号

内 容 提 要

本套《微积分（经管类）》教材共有10章，分上、下两册．本书为下册部分，具体内容包括不定积分、定积分、二重积分组成的积分学的内容，还包括无穷级数、微分方程与差分方程，最后是微积分在经济学中的应用．

本书的主要特点是：突出专业的特点和特色，按照专业需要进行教学内容的组织和教材的编写，突出应用性，解决实际问题，着重培养应用型人才的数学素养和创新能力，本教材打破传统教材的编排特点，将一元函数和多元函数的微分学作为一个完整的体系编排在上册，而将一元函数和多元函数的积分学编排在下册，更加有利于学生对于微分学和积分学的学习方法和理论的延续和类比．

本教材可作为高等学校经济与管理等非数学本科专业的高等数学或微积分课程的教材，也可作为部分专科学校的同类课程教材使用．

◆ 主　　编　顾　聪　姜永艳
副 主 编　王　宁　李　晓　卜维春　丁箭飞　何建营
责任编辑　李海涛
责任印制　彭志环　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：12.75　　　　2013年8月第1版
字数：238千字　　　2013年8月北京第1次印刷

定价：35.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

Preface

《国家中长期教育改革与发展规划纲要（2010—2020）》指出，未来 10 年我国将在进一步提高高等教育大众化水平的基础上，全面提高高等教育的质量和人才培养质量．作为高等教育质量建设的重要组成部分，课程建设处于质量建设的首要位置．高等数学作为公共基础课程，在整个课程体系中处于核心地位．高等数学(微积分)是高等院校理工类、经管类、农林类与医药类等各个专业的公共基础课程．即使是以前对数学要求较低的某些纯文科类专业，也普遍开设了大学数学课程．在应用型人才培养中，高等数学是本科院校的一门重要的基础理论课，对培养和提高学生的素质、能力、知识结构、逻辑思维、创新思维等方面起着极其重要的作用，直接关系到未来建设者能否适应现代社会经济、科学技术等方面发展变化的要求．

目前应用型高等院校所使用的高等数学或微积分课程的教材大多直接选自传统普通高校教材，教学内容多为理工类专业高等数学教学内容的精简和压缩，在知识体系大体相同，教学时间却大幅压缩的情况下，普遍存在重结论轻证明、重知识轻思想、重应用轻推导的授课方式，无法直接有效地满足实际教学需要．另一方面，教学内容缺乏和经济管理知识的有机联系，难以达到“为经管类专业后续课程提供必要的数学工具”这一目标．根据当前经管类专业学生的人才培养方案和高等数学等课程的实际开设情况，为了更好地适应国家关于应用型高校本科层次的教学要求，更好地培养经济管理类复合型人才，以专业服务和应用为目的，亟需编写本套教材．

本教材以保证理论基础、注重应用为基本原则，在保证知识体系的科学性、系统性和严密性的基础上，有如下特点．

（1）当前中学数学教学改革力度加大，造成了现有高等数学教材内容与中学数学内容有不少脱节和重复．例如中学数学教学内容中未列入“极坐标”、“数学归纳法”、“反三角函数”等，却已讲过“极限”、“导数”等内容．因此，本教材的选取和编写更加注重中学数学与高等数学的教学衔接．

（2）强调数学工具为经管类专业知识学习服务，不过于强调数学理论的完整性，淡化纯数学的抽象性，突出专业的特点和特色，按照专业需要进行教学内容的组织和教材的编写，突出应用性，解决实际问题，从培养应用型人才的数学素养和创新能力角度来考虑．例如把微积分在经济学中的应用作为完整独立的一章，既可以不打破微积分学知识体系的完整性，又可以为经管类学生提供重新认识微积分的应用

价值的全新视角.

（3）传统的教材在教学内容上基本都是将一元函数微积分学和多元函数微积分学分开安排在上、下册，造成了学生经过一个学期的时间学习了一元函数微积分学之后，第二个学期在学习多元函数微积分学时，许多概念和公式需要重新复习对比. 本教材打破传统教材的编排特点，将一元函数和多元函数的微分学作为一个完成的体系编排在上册，而将一元函数和多元函数的积分学编排在下册，更加有利于学生对于微分学和积分学的学习方法和理论的延续和类比.

（4）应用型本科院校的学生在中学阶段的数学基础不一样，进入大学后数学知识水平参差不齐，致使学生的接受水平和接受能力存在差异，因而需要实行分层次教学，因材施教. 本教材在编写上由浅入深，设置部分带*号的内容以适应分层次教学的需要，并在附录中加入预备知识等，供学生查阅. 同时在复习题的选取上，分为基本题（A 级）和提高题（B 级）两级，A 级以教学大纲为本，B 级则和考研的要求接轨.

全书共分 10 章内容，分上、下两册. 上册由第 1 章到第 4 章组成，包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理（作为一元函数微分学的组成部分），以及在此基础上的多元函数微分学. 下册由第 5 章到第 10 章组成，包括不定积分、定积分、二重积分（组成积分学的内容），还包括无穷级数、微分方程与差分方程，最后是微积分在经济学中的应用.

本书可作为应用型高等学校经济与管理等非数学本科专业的高等数学或微积分课程的教材，也可作为部分专科学校的同类课程教材使用.

编　者

2013 年 5 月

目录

Contents

第5章　不定积分

前面已经介绍了已知函数求导数，现在我们反过来做，怎么由已知导数求其函数，也就是求一个未知函数，使其导数恰恰是某已知函数，这种由导数或者微分求原函数的逆运算称为不定积分．定积分和不定积分构成了微积分学的积分学部分．

第1节　不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

定义1　**如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对 $x\in I$ 时，$F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的原函数．**

两点说明：

第一，如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数 $F(x)$，那么 $f(x)$ 就有无限多个原函数．$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数，其中 C 是任意常数．

第二，$f(x)$ 的任意两个原函数之间只差一个常数，即如果 $\Phi(x)$ 和 $F(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则 $\Phi(x)-F(x)=C$（C 为某个常数）．

定义2　**在区间 I 上，所有 $f(x)$ 的原函数称为 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，其中记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量．原函数与不定积分的关系如下．**

（1）原函数与不定积分是个别与全体的关系，或元素与集合的关系．

（2）如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$．

几何意义：由不定积分的定义，$f(x)$ 的不定积分 $F(x)+C$ 是一簇曲线，称之为积分曲线簇．只要作出其中一条曲线 $y=F(x)$ 的图，通过沿 y 轴的上下平移，即可得到所有的积分曲线 $y=F(x)+C$ 的图形．

例1　求 $\int 2x^2\mathrm{d}x$．

解　因为 $\left(\dfrac{2x^3}{3}\right)'=2x^2$，即 $\dfrac{2x^3}{3}$ 是 $2x^2$ 的一个原函数，

所以 $\int 2x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2x^3}{3}+C$．

例2　求 $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$．

解 $x>0$ 时，有 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以在 $(0,+\infty)$ 内 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln x$；

$x<0$ 时，有 $[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{x}$，所以在 $(-\infty,0)$ 内 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln(-x)$；

所以在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上，$\dfrac{1}{x}$ 的原函数是 $\ln|x|$.

所以 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

二、不定积分的性质

性质 1　和差的积分等于积分的和差，即

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x .$$

证　设 $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$，由定义得

$$\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x=\left(F(x)+c_1\right)\pm\left(G(x)+c_2\right)=F(x)\pm G(x)+C ,$$

$$\left[F(x)\pm G(x)\right]'=F'(x)\pm G'(x)=f(x)\pm g(x),$$

表明 $F(x)\pm G(x)$ 是 $f(x)\pm g(x)$ 的一个原函数，则

$$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=F(x)\pm G(x)+C=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x .$$

性质 2　非零常数因子可以从积分号中提出来，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 3　积分与微分（导数）的关系为

$$\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x),\qquad \int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C ,$$

$$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x ,\qquad \int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C .$$

注：① 在忽略任意常数的基础上，积分与微分互为逆运算；

② 对于性质 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$，不能写成 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$；

③ 性质 3 可由原函数与不定积分的关系直接推导出.

例 3　已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{2x}+C$，求 $f(x)$.

解　对等式两端求导，即得

$$f(x)=2x(1+x)\mathrm{e}^{2x} .$$

三、基本积分公式

根据不定积分的定义，即若 $F'(x)=f(x)$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 以及已知的基本初等函数的导数公式，直接推出以下基本积分公式.

（1）$\int k\mathrm{d}x=kx+C$ (k 是常数).　　（2）$\displaystyle\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$.

（3） $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.　　（4） $\int e^x dx = e^x + C$.

（5） $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.　　（6） $\int \cos x dx = \sin x + C$.

（7） $\int \sin x dx = -\cos x + C$.　　（8） $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$.

（9） $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$.（10） $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$.

（11） $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$.　　（12） $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$.

（13） $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$.　　（14） $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

（15） $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$.　　（16） $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$.

（17） $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$.　　（18） $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

（19） $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$.　　（20） $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

（21） $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.　　（22） $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

（23） $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$.　（24） $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$.

注：① 利用基本积分公式时，必须严格按照公式的形式．如已知 $\int \sin x dx = -\cos x + C$，但 $\int \sin 2x dx \neq -\cos 2x + C$.

② $\frac{1}{x}$ 的原函数是 $\ln|x|$，即 $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$，为了书写简便，$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ 也常被写作 $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$.

③ 为了检验积分的结果是否正确，可利用 $F'(x) = f(x)$.

例 4 求 $\int \sqrt{x}\left(x^2-5\right)dx$.

解 $\int \sqrt{x}\left(x^2-5\right)dx = \int (x^{5/2} - 5x^{1/2})dx = \frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{10}{3}x^{3/2} + C$.

例 5 求 $\int (2^x+3^x)^2 dx$.

解 $\int (2^x+3^x)^2 dx = \int (2^{2x} + 3^{2x} + 2\cdot 2^x \cdot 3^x)dx$

$= \int (4^x + 9^x + 2\cdot 6^x)dx \ = \frac{1}{2\ln 2}4^x + \frac{1}{2\ln 3}9^x + \frac{2}{\ln 6}6^x + C$.

例 6 求 $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$.

解 因为 $\dfrac{1}{x^2(1+x^2)}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}$，

所以 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$.

例 7 求 $\displaystyle\int\frac{x^6}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\dfrac{x^6}{x^2+1}=\dfrac{(x^6+1)-1}{x^2+1}=x^4-x^2+1-\dfrac{1}{x^2+1}$，

所以 $\displaystyle\int\frac{x^6}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(x^4-x^2+1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x-\arctan x+C$.

例 8 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\sec^2 x+\csc^2 x$，

所以 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)\,\mathrm{d}x=\tan x-\cot x+C$.

例 9 求 $\displaystyle\int\tan^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$.

例 10 求 $\displaystyle\int\left(10^x+3\cos x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$·

解 $\displaystyle\int\left(10^x+3\cos x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 10}10^x+3\sin x+2\sqrt{x}+C$.

例 11 计算积分 $\displaystyle\int\sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 $\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$；在不定积分中，约定 $\sqrt{A^2}=A$，即 $\sqrt{1-\cos^2 x}=\sin x$，从而 $\displaystyle\int\sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C.$

习题 5-1

求以下不定积分.

1. $\displaystyle\int\frac{(1-x)^3}{x^2}\mathrm{d}x$；

2. $\displaystyle\int\frac{5^x-2^x}{3^x}\mathrm{d}x$；

3. $\displaystyle\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$；

4. $\displaystyle\int\frac{1+x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

5. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$；

6. $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx$；

7. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$；

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$；

9. $\int \frac{(2x-1)^2}{\sqrt{x}} dx$.

第2节 求不定积分的几种基本方法

不定积分 $\int \sin 2x dx$ 就不能直接用基本积分公式 $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 来计算，因此还必须介绍计算不定积分的一些方法.

一、凑微分法（第一换元法）

定理1 设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数，且 $u=\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x) dx = F\left[\varphi(x)\right] + C .$$

证 因为 $F'(u) = f(u)$，而 $F\left[\varphi(x)\right]$ 是由 $F(u)$、$u=\varphi(x)$ 复合而成，故

$$\left\{F\left[\varphi(x)\right]\right\}' = F'(u)\varphi'(x) = f(u)\varphi'(x) = f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x),$$

由不定积分的定义，得

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x) dx = F\left[\varphi(x)\right] + C .$$

注：① $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x) dx \xlongequal{u=\varphi(x)} \int f(u) du = F(u) + C = F\left[\varphi(x)\right] + C$，称此法为第一换元法，其特点是将被积函数中的部分函数视为一个新的变量.

② $\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x) dx = \int f\left[\varphi(x)\right] d\varphi(x) = F\left[\varphi(x)\right] + C$，因此，第一换元法也称为凑微分法.

③ 如果利用了第一换元法，积分完成后应当变量回代.

例1 求 $\int e^{3x} dx$.

解 因为 e^{3x} 是一个复合函数，中间变量 $u = 3x$，

$du = d(3x) = 3dx$，所以 $dx = \frac{1}{3} du$，有

$$\int e^{3x} dx = \int e^u \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x} + C .$$

例 2 求 $\int \cos 2x\mathrm{d}x$.

解 令 $u=2x$，显然 $\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$，

则 $\int \cos 2x\mathrm{d}x=\int \cos u\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sin u+C=\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

例 3 求 $\int (3x-2)^5\mathrm{d}x$.

解 如将 $(3x-2)^5$ 展开很复杂，不如把 $3x-2$ 作为中间变量，由 $\mathrm{d}(3x-2)=3\mathrm{d}x$，有

$$\int (3x-2)^5\mathrm{d}x=\int (3x-2)^5\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x-2)=\frac{1}{18}(3x-2)^6+C.$$

例 4 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

例 5 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-12}$.

解 因为 $\frac{1}{x^2-x-12}=\frac{1}{7}\cdot\frac{(x+3)-(x-4)}{(x+3)(x-4)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+3}\right)$，

所以 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-12}=\frac{1}{7}\int \frac{\mathrm{d}(x-4)}{x-4}-\frac{1}{7}\int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+3}\right|+C$.

例 6 求 $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$，

所以 $\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x=-\int \sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+C$.

例 7 求 $\int \mathrm{e}^x\cos \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解 $\int \mathrm{e}^x\cos \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int \cos \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\sin \mathrm{e}^x+C$.

例 8 求 $\int \frac{6^x}{4^x+9^x}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{6^x}{4^x+9^x}\mathrm{d}x=\int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}=\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\arctan\left(\frac{3}{2}\right)^x+C$.

例 9 求 $\int \tan^3 x\mathrm{d}x$.

解 $\int \tan^3 x\mathrm{d}x = \int \tan x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = \int \tan x\sec^2 x\mathrm{d}x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int \tan x\mathrm{d}(\tan x) + \int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

另解 $\int \tan^3 x\mathrm{d}x = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}(\cos x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$.

例 10 求 $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int (\arctan x)^3\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{4}(\arctan x)^4 + C$.

由以上例题可以看出，第一换元法是一种非常灵活的计算方法，始终贯穿着“逆向思维”的特点，因此对初学者较难适应，学生应熟悉这些基本例题. 当然也有一些题，它们不属于这些基本题型，但我们也可以通过观察找到解题的途径.

二、变量代换法（第二换元法）

在第一换元法中，代换 $u=\varphi(x)$，使得积分由 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 变为积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$，从而利用 $f(u)$ 的原函数求出积分. 但是对于这样一类积分如 $\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，若仍然采用代换 $u=\varphi(x)$，则总是无法完成积分的计算，因此必须寻求新的积分方法.

定理 2 **设函数 $x=\varphi(t)$ 单调、可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，函数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数为 $F(t)$，则有**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F\left[\varphi^{-1}(x)\right] + C.$$

事实上，$F\left[\varphi^{-1}(x)\right]$ 由函数 $F(t)$ 与 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成，故

$$\left\{F\left[\varphi^{-1}(x)\right]\right\}' = F'(t)\cdot\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

注：$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C = F\left[\varphi^{-1}(x)\right]+C$，相当于作了代换 $x=\varphi(t)$，称此换元的方法为第二换元法，其特点是将积分变量 x 视为某个新的函数.

第二换元法常用于如下基本类型.

类型 1 被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$（$a>0$），可令 $x=a\sin t$ $\left(\text{并约定}t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，可将原积分化作三角有理函数的积分，利用基