(新编)

数学的内容方法与技巧

书

11

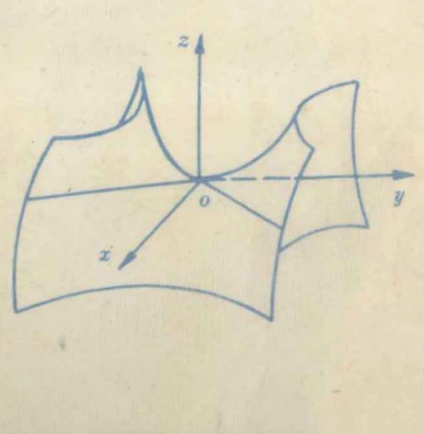
高等数学的内容、方法与技巧

（第三卷） 第一分册

GAODENG SHUXUE

高等数学（上）

主编 黄伟策 汪成伟
黄敬滔 肖新平



武汉测绘科技大学出版社

(新编)高等数学的内容、方法与技巧

——高等数学(上)

主　编　黄伟策　汪成伟　黄敬滔　肖新平
副主编　雷德秀　萧富生　刘昌伟　李鸿丽
主　审　钱吉林　穆汉林　柯　云
编　委　(以姓氏笔划为序)
张　林　肖兆武　杨　云　杨策平
徐炎山　赖湘麟　童丽珍

武汉测绘科技大学出版社

（鄂）新登字 14 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学　第一分册/黄伟策等主编．一武汉：武汉测绘科技大学出版社，1994．8
（新编数学的内容、方法与技巧丛书/黄光谷等主编；第三卷·新编高等数学的内容、方法与技巧/黄光谷等主编）
ISBN 7-81030-340-6

Ⅰ．高…
Ⅱ．黄…
Ⅲ．高等数学-内容-方法-技巧
Ⅳ．O13

武汉测绘科技大学出版社出版发行
（430070　武昌珞喻路 39 号）

丹江口市印刷厂印刷

1994 年 8 月第 1 版　　1995 年 3 月第 2 次印刷
开本 787×1092 毫米　1/32　印张 14　字数 330 千字
印数：6201—11200　定价：8.40 元

内 容 提 要

本书是《(新编)数学的内容、方法与技巧》丛书第三卷第一分册,其内容与通用教材《高等数学》(上册)同步,以提炼数学方法为主,包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何等几章,各章(或节)分为知识要点、释疑解难、范例分析、复习题与自测题几大部分,各章末专有一节小结与综合例题,书末专有一章总复习并配有期末试题三套,附有各类题目的答案及提示等。本书可供大学本科、专科学生和自学者作为学习《高等数学》课程的参考书阅读和教师教学参考。

《(新编)数学的内容、方法与技巧》丛书

名誉主编　陈森林

ⓒ总 主 编　黄光谷　陈传理　宋　阳　钱吉林

副总主编　(以姓氏笔划为序)

车新发　甘家炎　邱应麟　刘汉文

刘克全　陈　喜　张运权　张希舜

周世俊　周淑芳　黄伟策　彭启绵

第 三 卷　(新编)高等数学的内容、方法与技巧

主　　编　黄光谷　钱吉林　陈永娥

副 主 编　汪成伟　穆汉林　柯　云

序

我怀着喜悦的心情为《(新编)高等数学的内容、方法与技巧》一书作序。虽然近年来有关高等数学的教学参考书籍已有不少，但《(新编)高等数学的内容、方法与技巧》的出版，实不显多余和重复，因为该书集众家之长，并具有自己的特色，表现在如下三个方面。

一、此书的作者在高等院校从事高等数学教学多年，具有较丰富的教学经验。编写此书，可以说是他们耕耘在高等数学教学园地上辛勤劳动的结晶。

二、此书紧扣现行高等院校所使用的《高等数学》教材，是配合该教材的一本较好的教与学的辅导书。

三、此书考虑到不同层次的要求。由于该书是根据国家教委制订的高等工业院校《数学课程教学基本要求》及《1994年全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》的要求编写的，所以既能作为高等工业院校各专业的本(专)科学生学习高等数学的自学辅导或习题课教材，也能作为报考工科、理科及经济类硕士研究生的高等数学复习资料之用。

由于此书具备以上三大特点，我相信它的出版定能受到众多的大学生，自学者及大学教师，工程技术人员等的欢迎和青睐，它将为高等数学教材建设的百花园中又增添一株奇葩。

华中理工大学教授　林化夷

一九九四年三月　武汉

前　言

国家要实现四个现代化，关键在人才。而人才来自教育。数学教育是教育事业的重要组成部分。不少学生和自学者视学习数学为畏途，虽日夜苦学，然而不得要领。这套丛书就是为了帮助读者解决学习数学的困难而编写的，凝聚了160多位编审者多年的教学经验和良苦用心。

全套丛书包括三卷，即(新编)初中、高中、高等数学的内容、方法与技巧，共12个分册(详见封底)。各分册与新编数学课本同步，可与新课本配套使用。各章(或节)按几大部分编写，力求做到：知识要点提纲挈领，便于读者简明扼要、系统地掌握有关基础知识；范例分析题型典型，有分析引导或注释说明，可培养读者的基本技能；教学要求与重点、难点便于指导教师教与学生学；释疑解难抓到要害，恰到好处，能解决读者在学习中遇到的疑难问题；精编习题等能覆盖并便于学生巩固所学的数学内容与方法；复习章便于教师与学生作为期末复习的教材。

编写这套丛书得到武汉测绘科技大学出版社，国家教委高校工科数学课程教学指导委员会委员、《应用数学》杂志副主编兼编辑部主任林化夷教授，华中师大一附中李水生校长，武汉市洪山区教委贺贤座副主任等人的关心和支持，在此我们对他们表示衷心的感谢！

由于我们的水平有限，加上时间仓促，书中可能有不妥之处，恳请读者多提宝贵意见，以便再版时修改。

编　者

1994年3月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函　数

知　识　要　点

一、　内容提要

1. 函数概念

1）函数的定义

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 这里符号 $f(\cdot)$表示 y 与 x 之间的对应法则，数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

当自变量 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域**.

定义 2　设 D 和 B 均为集合，从 D 到 B 的函数 $f: D \to B$ 是一个法则，它把 D 中的点 x 对应到 B 中的某点 y，记为 $y=f(x)$. 集合 D 称为 f 的**定义域**，$x \in D$ 的一切对应点 $f(x)$ 的集合记为$f(D)$，显然$f(D) \subseteq B$.

函数又称为**映射**、**映照**、**变换**.

函数关系中的两要素是:定义域和对应法则.

2) 单值函数与多值函数

若函数的自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总只有一个,这种函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**.

注意:以后如无特别说明时,函数都是指单值函数.

3) 有界函数与无界函数

设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$,如果存在正数 M,使得任一 $x\in X$ 都满足$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 X 上为**有界函数**,或者称 $f(x)$在 X 上有界. 如果这样的正数 M 不存在,则称 $f(x)$在 X 上为**无界函数**,或者称 $f(x)$在 X 上无界.

4) 单调函数与非单调函数

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则称$f(x)$在 I 上是**单调增加**(或**单调减少**)的.

如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$在 I 上是**非减少**(或**非增加**)的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**,不是单调的函数称为**非单调函数**.

5) 奇函数和偶函数

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点 O 对称,如果对于任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**,如果对于任一 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**.

6) 周期函数与非周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在数 $l\neq 0$，使得对任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，否则称为非周期函数，l 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常我们说周期函数的周期是指**最小正周期**.

7）反函数与直接函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，那么对任一 $y_0\in W$，必定有 $x_0\in D$，使 $f(x_0)=y_0$ 成立. 若把 y 当作自变量，x 当作函数，则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$（习惯上记为 $y=\varphi(x)$）称为 $f(x)$ 的**反函数**，其定义域为 W，值域为 D. $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形和直接函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

8）隐函数与显函数

如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内任取一值时，相应地总有满足这方程的确定的 y 值存在，那末就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间 I 内确定了一个**隐函数** $y=y(x)$，等号左端是因变量的符号，而右端是含自变量的式子. 相应地把 $y=f(x)$ 称为**显函数**，即把函数 y 解出，用一个仅含 x 的式子表示 y.

9）复合函数

设 $y=f(u)$ 为定义在 D_1 内的函数，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 W_2，如果 $W_2\subset D_1$，则对于域 D 内的每一个 x 值，由 $u=\varphi(x)$ 及 $y=f(u)$，有确定的 y 与之对应，于是在域 D 中定义了一个 x 的函数 y，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，而 u 称为中间变量，$f(u)$ 称为**外函数**，$\varphi(x)$ 称为**内函数**.

10）由参数方程所确定的函数

若参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 确定 y 与 x 间的函数关系，则称此方程所表达的函数 $y=y(x)$ 为由**参数方程确定的函数**.

11）基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

2. 双曲函数与反双曲函数

1）双曲函数的定义

双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$； 双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；

双曲余切 $\mathrm{cth}x=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$；

双曲正割 $\mathrm{sech}x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$；

双曲余割 $\mathrm{csch}x=\dfrac{1}{\mathrm{sh}x}=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$.

2）双曲函数的基本公式

$$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y;$$

$$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y;$$

$$\mathrm{th}(x\pm y)=\frac{\mathrm{th}x\pm\mathrm{th}y}{1\pm\mathrm{th}x\,\mathrm{th}y};$$

$$\mathrm{cth}(x\pm y)=\frac{1\pm\mathrm{cth}x\,\mathrm{cth}y}{\mathrm{cth}x\pm\mathrm{cth}y};$$

$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$；$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$；$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$.

3）反双曲函数

双曲函数的反函数称为反双曲函数，双曲函数 $y=\mathrm{sh}x$，$y=\mathrm{ch}x$，$y=\mathrm{th}x$，$y=\mathrm{cth}x$ 的反函数依次为

反双曲正弦　$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$|x|<+\infty$；

反双曲余弦　$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$x\geqslant 1$（主值）；

反双曲正切　$y=\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$|x|<1$；

反双曲余切　$y=\mathrm{arcth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，$|x|>1$.

二、 基本要求与重点，难点

理解函数的概念；了解函数的单调性、周期性、奇偶性；了解反函数、分段函数和复合函数的概念；熟练掌握基本初等函数的性质和图形；能列出简单实际问题中的函数关系.

重点：函数定义域的确定；函数符号的使用；函数的性质.

难点：复合函数的分解.

释　疑　解　难

1.　怎样求函数的定义域？

答　在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如果函数是由公式法给定的.而此函数又没给出实际意义时，函数的定义域就是使算式有意义的自变量的一切实数值，通常应注意如下几点：

1）分母不能为零；

2）开偶次方时，被开方式的值非负；

3）对数式中的真数必须大于零，底数大于零且不等于1；

4）复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $u=\varphi(x)$ 定义域的子集，在此子集上函数 $u=\varphi(x)$ 的值域必须是函数 $y=f(u)$ 的定义域的子集，等等.

2. 什么样的函数有单值反函数？

答 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，若函数的对应法则 f 使 D 与 W 之间构成一一对应的关系，即 $\forall x_1,x_2\in D$，且 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，那末 $y=f(x)$ 必有单值反函数 $x=f^{-1}(y)$（通常记为 $y=f^{-1}(x)$）.

例如函数

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1), & -1\leqslant x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

有单值反函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}-(x+1), & -1<x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

显然，单调函数的对应法则是一一对应的，所以单调函数必有单值反函数，例如函数 $y=\sin x$ 在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 内单调增加，有反函数 $y=\arcsin x$.

3. 如何判断一个函数是否为周期函数？

答 一般是用周期函数的定义去找周期 T，其步骤如下：

1）列出方程 $f(x+T)-f(x)=0$；

2）以 T 为未知量解此方程，这时若：

1° 解出 T 是与 x 无关的正数，则 $f(x)$ 为周期函数；

2° 解出的 T 与 x 有关，或者利用一些熟知的运算法则推出矛盾的结果，就可断定函数为非周期函数.

例如函数 $f(x)=\sin x^2$，设存在与 x 无关的正数 T，使得 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$，则当 $x=0$ 时，有 $\sin T^2=0$，故得 $T^2=n\pi$，即 $T=\sqrt{n\pi}$ $(n\in\mathrm{N})$. 令 $x=\sqrt{2}T$，得 $\sin[\sqrt{2}+1)^2n\pi]=$

0，所以$(\sqrt{2}+1)^2 n\pi=k\pi(k\in N)$，则$(\sqrt{2}+1)^2=k/n$ $(n,k\in N)$. 因为k/n为有理数，而$(\sqrt{2}+1)^2$不是有理数，矛盾，所以$f(x)=\sin x^2$不是周期函数.

或者将函数分解成我们熟知的周期函数的代数和，再求这些周期函数的周期的"最小公倍数".

例如$y=\sin^2 x$，因为$\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$，且$\cos 2x$是以π为周期的函数，所以$y=\sin^2 x$是以π为周期的函数.

4. 周期函数是否一定有最小正周期?

答 不一定，例如**狄里赫勒**(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时,}\end{cases}$$

是一个以任何正有理数为周期的函数，因为正有理数没有最小正数，所以狄里赫勒函数没有最小正周期.

范 例 分 析

例 1 求下列函数的定义域:

1) $f(x)=\sqrt{x-5}-\dfrac{1}{x-7}+\lg(9-x)$;

2) $g(x)=\sqrt{x^2+3x-28}+\arcsin\dfrac{2x-1}{9}$;

3) $h(x)=\ln(1-2\sin x)$.

解 1) 函数$f(x)$的自变量应满足:

$$\begin{cases}x-5\geqslant 0,\\ x-7\neq 0,\\ 9-x>0,\end{cases}$$

即
$$x\geqslant 5,\quad x\neq 7,\quad x<9,$$

于是$f(x)$的定义域为

$$D=\{x\,|\,5\leqslant x<7 \text{ 或 } 7<x<9\}.$$