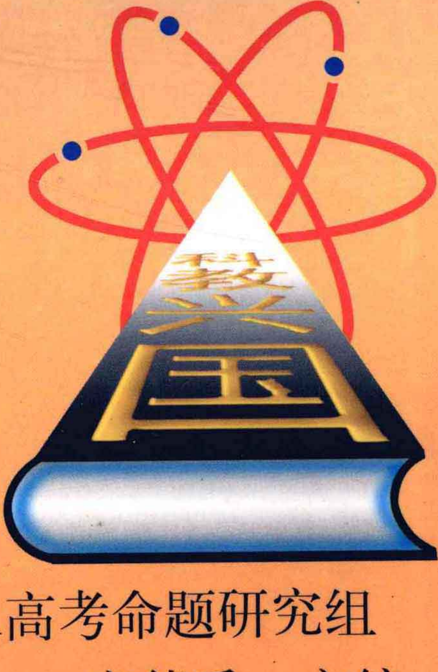
（本书是根据最新考试大纲编写的权威教材）

# 最新全国成人高考
# 实用教材
## 数学
（文史财经类）




成人高考命题研究组　编审
童德舜　主编

世界知识出版社

最新全国成人高考实用教材

# 数　学

（文史财经类）

成人高考命题研究组　编审
童德舜　主编

世界知识出版社

责任编辑:黄绪励
责任出版:车胜春

**图书在版编目(CIP)数据**

数学:文科/童德舜主编 . - 北京:世界知识出版社,1998.9
最新全国成人高考实用教材
ISBN 7 - 5012 - 1039 - X

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 童…　Ⅲ. 数学课 - 成人教育:高等教育 - 教材　Ⅳ. G723.46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 25592 号

世界知识出版社出版发行
(北京东单外交部街甲 31 号　邮政编码:100005)
北京美通印刷厂印刷　新华书店经销

787 × 1092 毫米　16 开本　印张:18　字数:209 千字
1998 年 9 月第 1 版　1998 年 9 月第 1 次印刷　印数:1 - 5000 册
ISBN 7 - 5012 - 1039 - X/G·251　　定价:25.00 元

# 前　　言

《全国各类成人高等学校招生考试实用教材》丛书，是由成人高考命题研究组组织成人教育界对历年成人高考有专门研究的专家、教授，中学特级、高级教师及长期从事成人高考辅导工作、具有多年教学经验的第一线教师，根据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》精心编辑而成。

这套丛书紧扣新大纲，针对性更强，它对中学各科课程进行了精选和提炼，更适合成人在短期内更快更好地掌握各科基本知识、基本技能和提高综合运用知识解决问题的能力，满足成人通过短时间业余学习达到适应全国统考的要求，并取得较好成绩的目的。它是目前成人考生系统复习中学课程的首选好教材。

全套丛书按照新大纲和成人考生的特点，每章内容包括“复习要求”、“重点知识”、“复习重点”和“近几年命题情况”等。同时列举大量“例题”，为基础知识的运用作了示范，并通过解题过程帮助读者掌握解题方法和提高解题的综合能力。每一章后选择了大量习题，供读者复习时选用，以巩固本章所学知识。每章最后均有习题答案或提示，供读者参考。每册书后附综合练习试卷两套，供读者在学完本书后对本科知识的掌握作一自我检查。各类题目均按成人标准化考试的模式和要求编选。选择题和填空题占有较大的比重，解答题亦有充分的综合性和代表性。

全套丛书包括政治、语文、数学（文科）、数学（理科）、物理、化学、历史、地理、英语、人体解剖学和生理学 11 科，共 11 本。供参加各类成人高等学校（包括广播电视大学、职工高等学校、管理干部学院、教育学院、教师进修学院、独立设置的函授学院、普通高校举办的成人高等学历教育等）招生考试的考生和成人高考辅导班作为教材使用。

本册书是《全国各类成人高等学校招生考试实用教材》丛书《数学（文史财经类）》分册。由成人高考命题研究组编审，童德舜老师主编。

成人高考命题研究组

一九九八年九月

# 目　　录

# 第一章　数、式、方程和方程组

## [内容提要]

### 一、数

1. 实数:有理数与无理数统称为实数。

有理数:有限小数或循环小数统称有理数,任何一个有理数均可以表示成$\frac{n}{m}$形式,其中

$m,n \in Z$ 且 $m \neq 0$

无理数:无限不循环小数称为无理数。

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}\qquad\qquad \text{小数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限小数}\begin{cases}\text{循环小数}\\ \text{无限不循环小数}\end{cases}\end{cases}$$

2. 数轴:

规定了原点,正方向和长度单位的直线叫做数轴。

作用:将实数与数轴上的点建立一一对应关系。即数轴上的每一个点表示唯一的一个实数,反过来,每一个实数可用数轴上的唯一的点来表示。它起到了数形结合的作用。

3. 相反数与倒数

只有符号不同的两个数,称其中一个数是另一个数的相反数。零的相反数为零。

互为相反数的两个数 $a$ 与 $-a$,在数轴上关于原点对称,$a+(-a)=0$

4. 倒数

1 除以某非零数的商称为该数的倒数。零没有倒数。当 $a \neq 0$ 时,$\frac{1}{a}$ 与 $a$ 互为倒数。即

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

4. 绝对值

一个正数的绝对值是它的本身,一个负数的绝对值是它的相反数,零的绝对值为零。

即 $$|a| = \begin{cases} a(a>0)\\ 0(a=0)\\ -a(a<0)\end{cases}$$

绝对值的几何意义:实数 $a$ 的绝对值表示实数 $a$ 所表示的点到原点的距离。

5. 平方根与算术平方根

一个数 $x$ 它的平方等于 $a$,即 $x^2=a(a \geqslant 0)$,那么,这个数 $x$ 叫数 $a$ 的平方根;

正数 $a$ 的平方根有两个,它们互为相反数,记为 $x=\pm\sqrt{a}$,零的平方根为零。

算术平方根:正数 $a$ 的正平方根叫做算术平方根;记为$\sqrt{a}$。

零的算术平方根为零。

6. 运算律与运算顺序

| | 加　　法 | 乘　　法 |
|---|---|---|
| 交换律 | $a+b=b+a$ | $a\cdot b=b\cdot a$ |
| 结合律 | $(a+b)+c=a+(b+c)$ | $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ |
| 分配律 | $a(b+c)=ab+ac$ | |

在同一个式子里，先乘方，开方，然后乘、除，最后加、减，同级运算中按运算顺序进行运算，有括号时，由最里层括号算起，逐层去括号，按脱括号法则变号。

## 二、式

1. 代数式：用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连结起来而成的式子叫做代数式。

单独的一个数或字母也叫代数式。

代数式的分类：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

代数式的值：用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果。

2. 整式

(1) 单项式：由数和字母相乘而成的代数式叫做单项式，单独一个数或字母也叫做单项式，单项式中数字因数叫做单项式的系数，所有字母的指数和叫做单项式的次数。

(2) 多项式：几个单项式的和叫做多项式，其中每一单项式叫做多项式的项，次数最高项的次数叫做多项式的次数，单项式与多项式统称整式。

(3) 整式的运算

整式能进行加、减、乘法的运算，其结果仍为整式，整式可以进行带余除法的运算，整式运算满足交换律、结合律、分配律。

幂的运算法则

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　　　$(a^m)^n=a^{mn}$

$a^m\div a^n=a^{m-n}(a\neq 0)$　　　　$(ab)^n=a^n\cdot b^n$

乘法公式

完全平方式　$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

平方差公式　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

立方和公式　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

立方差公式　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

(4) 多项式的因式分解：把一个多项式化为几个整式乘积的形式叫做因式分解或分解因式。常用的方法有：提取公因式法，分组分解法、十字相乘法、求根公式法等。

3. 分式

设 A、B 表示两个整式，且 B 中含有字母，则式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式。分子，分母没有公因式的分式叫做最简分式。

分式有意义 $\Leftrightarrow$ 分母的值 $\neq 0$

分式的值为零 $\Leftrightarrow$ 分子的值 $= 0$，分母的值 $\neq 0$

(1) 分式的基本性质

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times m}{b \times m} \quad (m \text{ 为不等于零的整式})$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div m}{b \div m}$$

(2) 分式的符号法则

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

即分式的分子、分母和分式的本身的符号同时改变其中的任何两个，分式的值不变。

(3) 分式的运算

分式有与分数类似的约分，通分，四则运算法则。

① 约分 $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$

② 分式的加减 $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

③ 分式的乘除 $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

4. 二次根式

(1) 定义：当 $a \geqslant 0$ 时，式子 $\sqrt{a}$ 叫做二次根式

(2) 性质 ① $(\sqrt{a})^2 = a(a \geqslant 0)$

② $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

③ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geqslant 0, b \geqslant 0)$

④ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geqslant 0, b > 0)$

(2) 最简二次根式：① 被开方式的每一个因式的指数都小于 2

② 被开方式中不含分母

这样的二次根式叫做最简二次根式

同类根式：化为最简二次根式后，若被开方式相同的根式称为同类二次根式

(3) 二次根式运算

① 二次根式的加减

将根式化为最简二次根式后，同类根式可相加减（系数相加减，根指数与被开方式不变）

② 二次根式的乘除

按二次根式性质 ③④ 进行

③ 分母有理化

如果两个无理式的乘积是一有理式，则称其中一个无理式是另一个无理式的有理化因式。

二次根式常见的有理化因式：

$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$　　　　　　$a \pm \sqrt{b}$ 与 $a \mp \sqrt{b}$

分母有理化：如果一个代数式的分母是无理式，用分母的有理化因式同乘分子、分母，将分母化为有理式变形的过程叫做分母有理化。

二次根式运算的结果都要化成最简根式并把分母有理化。

## 三、方程和方程组

1. 方程的有关概念

(1) 方程：含有未知数的等式叫做方程。

能使方程左、右两边相等的未知数的值叫做方程的解。

求方程的解或说明方程无解的过程叫做解方程。

(2) 同解方程

如果第一个方程的每一个解都是第二个方程的解，并且第二个方程的每一个解也是第一个方程的解，则称这两个方程为同解方程。

同解原理：

① 方程的两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式，所得方程与原方程同解。

② 方程的两边都乘以(或都除以)不等于零的同一个数，所得方程与原方程同解。

(3) 方程的增根与失根

在解方程的过程中，由于方程变形，未知数的允许值范围扩大(或缩小)了，就可能产生增根(或失根)

(4) 方程
- 代数方程
  - 有理方程
    - 整式方程
    - 分式方程
  - 无理方程
- 超越方程(指数方程、对数方程、三角方程、反三角方程。

解代数方程的基本思路

分式方程：去分母化为整式方程.

无理方程：去根号化为有理方程.

高二次方程：降次化为一次或二次方程.

多元方程：消元化为一元方程.

2. 一元一次方程

只含有一个未知数，并且未知数的次数是一次的方程叫做一元一次方程。

一般形式 $ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$

其解 $x = -\dfrac{b}{a} \quad (a \neq 0)$

3. 一元二次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的方程叫做一元二次方程。

一般形式 $ax^2 + bx + c = \quad (a \neq 0)$

解法:(1) 因式分解法。

(2) 开平方法。

(3) 配方法。

(4) 公式法。

求根公式: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4bc}}{2a}$

判别式: $\triangle = b^2 - 4ac$

$\triangle > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根

$\triangle = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根

$\triangle < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根

根与系数的关系(韦达定理)

设 $x_1$、$x_2$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0(a \neq 0)$ 的两个根,则

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

反之,如果有 $x_1 + x_2 = p$ $\quad x_1 \cdot x_2 = q$

则 $x^2 - px + q = 0$ 必是以 $x_1, x_2$ 为根的一元二次方程。

4. 方程组

(1) 二元一次方程组

含有相同的两个未知数的两个一次方程组成的方程组叫二元一次方程组。

一般形式: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

解法: ① 代入消元法

② 加减消元法等

(2) 三元一次方程组

含有相同的三个未知数的三个一次方程组成的方程组叫三元一次方程组。

解题思路:三元一次方程组通过“消元”化为二元一次方程组来求解。

(3) 二元二次方程组

① 一个二元二次方程与一个二元一次方程组成的方程组。

代入消元法求解。

② 二个二元二次方程组成的方程组,该题型方程解法比较复杂,其解题思路,消元与降次。

## [近几年命题情况]

本章是数学最基础的知识,是起奠基作用的,各命题中归结到最基本的运算均与本章知识有关,因此,对本章应打好基础,不可等闲视之。

## [复习要点]

1. 理解有理数,实数及数轴,相反数、绝对值,倒数,算术平方根等概念,并会求一个数的绝对值及算术平方根,进行实数大小比较,熟练进行实数四则运算及乘方和非负实数的开方运算。

2. 理解有关整式、分式、二次根式的概念掌握它们的一些性质、运算法则,并能熟练地进行整式、分式、二次根式的四则运算。

3. 掌握一元一次方程，一元二次方程的解法，能灵活地运用一元二次方程根的判别式 $\triangle = b^2-4bc$ 及根与系数的关系解有关问题。

4. 会用代入消元法及加减消元法来解有唯一解的二元一次方程组，三元一次方程组；会用代入消元法解由一个二元一次方程及一个二元二次方程组成的方程组；会解简单，特殊类型两个二元二次方程组成的方程组。

## [例题]

**一：选择题：**（每小题中只有一个结论是正确的，把正确的结论的代号写在题中的括号内）

1. 已知实数 $a, b$ 之间满足条件：$a > 0$ 且 $a < -b$，则下列条件中取正值的是[　]

(A) $a + b$　　(B) $|a|-|b|$

(C) $a - b$　　(D) $|a + b|-|a - b|$

解题分析：因为 $a > 0$，且 $a < -b$，则 $b < 0, -b > 0$，所以 $a - b = a + (-b) > 0$

选(C)

2. 两个无理数的和[　]

(A) 一定是无理数　　(B) 可能是有理数

(C) 一定是有理数　　(D) 不会为0

解题分析：判断一个结论是否成立，常用特殊数值举例而判定。设 $a$ 是无理数，则 $b = -a$ 也是无理数，那么 $a + b = a + (-a) = 0$，所以(A)、(D) 均不正确；又因为 $a + a = 2a$ 仍为无理数，所以(C) 也不正确。于是正确答案为(B)。

选(B)

3. 如果 $-a|a| = a^2$，那么 $a$ 是[　]

(A) 正数　　(B) 大于1的数

(C) 大于0而小于1的正数　　(D) 非正数

解题分析：从已知条件 $-a|a| = a^2$ 的右端是 $a^2$ 必是正数或0，于是 $-a|a| \geqslant 0, -a \geqslant 0$ 即 $a \leqslant 0$

选(D)

4. 在数轴上，到原点距离等于4个单位长度的点，表示的是[　]

(A) 4　　(B) $-4$

(C) $\pm 4$　　(D) $|\pm 4|$

解题分析：因为到原点的距离等于4个单位长度的点在原点的左、右方各有一个，分别为 $+4$ 和 $-4$，所以正确答案为(C)。

选(C)

5. $\sqrt{a^2} - a$ 是[　]

(A) 负数　　(B) 非负数

(C) 0　　(D) 正数

解题分析：因为 $\sqrt{a^2} - a = |a| - a$，由绝对值定义可得：当 $a \geqslant 0$ 时，$|a| - a = a - a = 0$，当 $a < 0$ 时，$|a| - a = -a - a = -2a > 0$，所以(B) 正确。

选(B)。

6. 化简 $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-2x+1}$ 的结果是[　]

(A) $-2x+1$　　　　　　(B) $2x-1$　　　　　　(C) $2x+1$

(D) 当 $x<0$ 时是 $-2x+1$;当 $0\leqslant x<1$ 时是 1,当 $x\geqslant 1$ 时是 $2x-1$

解题分析:因为$\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}=|x|+|x-1|$,根据此式找出等于 0 的点 $x=0$,$x=1$,于是定义域被分为三段,分别研究代数式在其三段的数值。

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}=|x|+|x-1|=\begin{cases}-x-(x-1)=-2x+1 \text{ 当}(x<0)\\ x-(x-1)=1(\text{当 } 0\leqslant x<1)\\ x+x-1=2x-1(\text{当 } x\geqslant 1)\end{cases}$$

选(D)

7. 已知$(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 在实数范围内有意义,化简后得[　]

(A) $\sqrt{1-a}$　　　　　　(B) $\sqrt{a-1}$

(C) $-\sqrt{1-a}$　　　　　　(D) $-\sqrt{a-1}$

解题分析:因为$(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$ 在实数范围内有意义,被开方数必为非负数,所以

$a-1<0$　即:$1-a>0$,$(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}=(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$

$=(a-1)\sqrt{\frac{1-a}{(1-a)(1-a})}=(a-1)\cdot\frac{1}{1-a}\cdot\sqrt{1-a}=-\sqrt{1-a}$

选(C)

注:上述解法过程是将根号内的式子移到根号外,同样,将根号外的式子也可以移至根号内,此时注意 $a-1$ 是负数。

$$(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}=-(1-a)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}=-\sqrt{\frac{(1-a)^2}{1-a}}=-\sqrt{1-a}$$

8. 已知 $y=ax^5+bx^3+cx-6$,并且当 $x=2$ 时,$y=6$,当 $x=-2$ 时,$y$ 的值等于[　]

(A) $-18$　　　　　　(B) $-12$

(C) 18　　　　　　(D) 无法求出

解题分析:当 $x=2$ 时,$6=a\cdot 2^5+b\cdot 2^3+c\cdot 2-6$,即:$2^5a+2^3b+2c=12$,当 $x=-2$ 时,$y=a(-2)^5+b(-2)^3+c(-2)-6$,即 $y=-(2^5b+2^3b+2c)-6=-12-6=-18$

选(A)

9. 一个自然数的算术平方根为 $x$,则下一个自然数的算术平方根是[　]

(A) $x+1$　　　　　　(B) $x^2+1$

(C) $\sqrt{x^2}+1$　　　　　　(D) $\sqrt{x^2+1}$

解题分析:一个自然数的算术平方根为 $x$,那么这个自然数为 $x^2$,而后续一个自然数为 $x^2+1$,其算术平方根就是$\sqrt{x^2+1}$

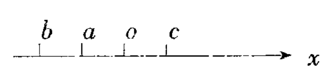
选(D)

10. $a$、$b$、$c$ 在数轴上的位置如图那么

$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c|$ 等于[　]

(A) $2x-a$　　　　　　(B) $a+2b$

(C) $-a$　　　　　　(D) $-3a-2b$




(图 1-1)

解题分析:由图 1-1 可见 $a<0,b<0,c>0$,于是 $a+b<$

$0, c-a>0, b+c<0$,

$$\begin{aligned}\sqrt{a}^2-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}+|b+c| &= |a|-|a+b|+|c-a|+|b+c| \\ &= -a+(a+b)+(c-a)-(b+c) \\ &= -a+a+b+c-a-b-c=-a\end{aligned}$$

选($C$)

11. 下列命题中,正确的是[　]

($A$) 任意两个正数之差必是非负数

($B$) 任意两个整数之商(除数不能为0)必是整数

($C$) 任意两个实数的和、差、积、商(除数不能为0)必是实数

($D$) 在实数范围内任一实数都有平方根

解题分析:判断结论是否正确,可以用举反例来否定错误结论,也就是用举反例来判断结论是错误的。

对于($A$),如任意两个正数2,3,其差 $2-3<0$,不是非负数,结论($A$)不成立;

对于($B$),任意两个整数2,3,其商为 $\frac{2}{3}$,不是整数,结论($B$)不成立;

对于($D$),例如 $-1$ 在实数范围内就没有平方根,所以($D$)不成立;

($A$)、($B$)、($D$)均不正确,所以只有($C$)正确。

选($C$)

12. 当 $m<-10$ 时,$m+|\sqrt{(m+5)^2}-5|$ 的值为[　]

($A$) $2m+10$　　　　($B$) $2m-10$

($C$) $10$　　　　($D$) $-10$

解题分析:因为 $m<-10$,即 $m+10<0$,所以　$m+5<0$

$$\begin{aligned}m+|\sqrt{(m+5)^2}-5| &= m+|-(m+5)-5| \\ &= m+|-m-10| = m+|m+10| = 10\end{aligned}$$

选($D$)

## 二、填空题

1. 如果 $-|a|=-a$,那 $a$ ________ 0;如果 $-|a|=a$,那么 $a$ ________ 0;如果 $|a|>a$,那么 $a$ ________ 0。

解题分析:因为 $-|a|\leqslant 0$,要使 $-|a|=-a$;必须 $a\geqslant 0$;要使 $-|a|=a$;必须 $a\leqslant 0$;要使 $|a|>a$ 则必要 $a<0$。

答:$\geqslant$;$\leqslant$;$<$

2. 如果 $|3x-2|+|2y+3|=0$,则 $x+y=$ ________,$xy=$ ________ $\frac{x}{y}=$ ________。

解题分析:因为 $|3x-2|\geqslant 0$,$|2y+3|\geqslant 0$,要使 $|3x-2|+|2y+3|=0$,必有 $3x-2=0$,$2y+3=0$,解得 $x=\frac{2}{3}$,$y=-\frac{3}{2}$

答:$-\frac{5}{6}$;$-1$;$-\frac{4}{9}$

3. 若 $-1<x<1$ 时,$\sqrt{(x-1)^2}+|x+1|$ 化简结果得________。

解题分析：因为 $-1 < x < 1$，即 $x+1>0, x-1<0$，所以$\sqrt{(x-1)^2}+|x+1|$
$=|x-1|+|x+1|=-(x-1)+x+1=2$

答 2

4. 已知$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，则$\frac{3a-2b+c}{2a-3b-c}=$______

解题分析：要想求得$\frac{3a-2b+c}{2a-3b-c}$的值，必须求 $a,b,c$ 三者之间关系。

令$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=t$，得 $a=bt, b=ct, c=at$；

上述三式相乘得　$abc=abct^3$

$$abc(t^3-1)=0 \text{ 解得 } t=1$$

于是 $a=b=c=1$，所以$\frac{3a-2b+c}{2a-3b-c}=-1$

答：$-1$

## 三、选择题

1. 已知 $a=1+\frac{1}{b}, b=1+\frac{1}{a}$，且 $a\neq 0, b\neq 0$，那么 $b$ 等于[　]

(A) $a-1$　　(B) $1-a$

(C) $1+a$　　(D) $a$

解题分析：由已知条件 $a=1+\frac{1}{b}, b=1+\frac{1}{a}$，可得 $ab=b+1, ab=a+1$，于是

$a+1=b+1$，所以 $a=b$。

选(D)

2. 如果 $x-y=xy$($x,y$ 为非 0 有理数)，那么$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 等于[　]

(A) $\frac{1}{xy}$　　(B) 1

(C) $-1$　　(D) $y-x$

解题分析：因为$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$ 代入已知条件

$$x-y=xy, \text{则} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}=\frac{-xy}{xy}=-1$$

答：选(C)

3. 已知 $x=\frac{1}{y}$，$x,y$ 为非 0 有理数，那么$(x-\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})=$[　]

(A) $x^2+y^2$　　(B) $x^2-y^2$

(C) $2x$　　(D) $2y$

解题分析：因为 $x,y$ 是非 0 有理数，$x=\frac{1}{y}$，所以 $y=\frac{1}{x}$，于是

$(x-\frac{1}{x})\cdot(y+\frac{1}{y})=(x-y)(y+x)=x^2-y^2$

选(B)

4. 已知分式$\frac{|x|-3}{x+3}$的值为 0，那么 $x$ 的值为[　]

(A) $-3$　　(B) $3$

(C) $3$ 或 $-3$　　(D) 非上述答案

解题分析:一个分式的值等于0,则分子的值必为0,由已知条件得: $|x|-3=0, x=\pm 3$,而当 $x=-3$ 时,分母的值也为0,必须舍去,于是使该分式的值为0的只有 $x=3$。

选(B)

5. 已知 $x^2+x=3$,则 $x(x^2+x)+3x^2-8$ 的值为[ ]

(A) $-1$　　(B) $1$

(C) $\pm 1$　　(D) 无法确定

解题分析:部分代入化简求值。因为 $x^2+x=3$

则 $x(x^2+x)+3x^2-8=3x+3x^2-8=3(x^2+x)-8=1$

选(B)

6. 若 $0<x<1$ 时,则有[ ]

(A) $\sqrt{x}<\frac{1}{x}<x<x^2$　　(B) $\frac{1}{x}<\sqrt{x}<x^2<x$

(C) $x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$　　(D) $x<x^2<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$

解题分析:因为 $0<x<1$,所以 $\frac{1}{x}>1$,于是 $x<\frac{1}{x}$,由于 $0<x<1$,两边同乘以 $x$ 得 $0<x^2<x$,如对不等式 $0<x^2<x<1$ 开方得: $x<\sqrt{x}<1$,又 $x<\frac{1}{x}$ 所以 $x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$,(C)答案正确

选(C)

## 四、填空题

1. 已知 $x+\frac{1}{x}=3$,那么 $x-\frac{1}{x}=$ ________, $x^2+\frac{1}{x^2}=$ ________。

解题分析: $x-\frac{1}{x}=\pm\sqrt{(x-\frac{1}{x})^2}=\pm\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}$

$$=\pm\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-4}=\pm\sqrt{3^2-4}=\pm\sqrt{5}$$

$(x+\frac{1}{x})^2=9$,所以 $x^2+\frac{1}{x^2}+2=9$,

所以 $x^2+\frac{1}{x^2}=7$

答: $\pm\sqrt{5}, 7$

2. 若 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$,则分式 $\frac{7x^2-y^2}{x^2-2xy+3y^2}$ 的值等于________。

解题分析:令 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=t$,则 $x=2t, y=3t$,直接代入分式得

$$\frac{7\cdot(2t)^2-(3t)^2}{(2t)^2-2\cdot 2t\cdot 3t+3(3t)^2}=\frac{19t^2}{19t^2}=1.$$

答:1

3. 已知 $abc=1$,则 $\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=$ ________。

解题分析:要进行分式加减运算,必须设法利用已知条件将异分母化为同分母后,再相加。

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}$$

$$=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{a^2bc+abc+ab}$$

$$=\frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}==\frac{1+a+ab}{ab+a+1}=1$$

或由已知条件 $abc=1$,得 $ab=\frac{1}{c}$,$bc=\frac{1}{a}$,$ac=\frac{1}{b}$

代入分式得$\frac{1}{\frac{1}{c}+a+1}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{ac}+1}+\frac{1}{ca+c+1}$

$$=\frac{c}{ca+c+1}+\frac{ca}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}=\frac{ca+c+1}{ca+c+1}=1$$

答:1

## 五、解答题

1. 下列各式分解因式:

(1)$m^4-2m^3+3m^2-2m+1$

(2)$x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8$

解题分析:对多项式进行因式分解常用方法有:提取公因式法,分组分解法,十字相乘法,公式法,可化为 $x^2+(a+b)x+ab$ 型的二次三项因式分解法,折项法等,分解因式时要灵活运用上述方法。

(1)$m^4-2m^3+3m^2-2m+1$ 将其中一项 $3m^2$ 折成两项 $m^2$ 与 $2m^2$ 后,用完全平方公式进行因式分解。

$$\begin{aligned} m^4-2m^3+3m^2-2m+1 &= m^4-2m^3+m^2+2m^2-2m+1 \\ &= m^2(m^2-2m+1)+(2m^2-2m)+1 \\ &= m^2(m-1)^2+2m(m-1)+1 \\ &= (m^2-m+1)^2 \end{aligned}$$

(2) 多项式 $x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8$ 可以看成关于 $x,y$ 的二次三项式,也可以看成关于其中一个未知数 $x$ 的二次三项式,然后研究它的因式分解。

$$\begin{aligned} x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8 &= (x^2-4xy+4y^2)-6(x-2y)+8 \\ &= (x-2y)^2-6(x-2y)+8 \\ &= (x-2y-2)\cdot(x-2y-4) \end{aligned}$$

或
$$\begin{aligned} x^2-4xy+4y^2-6x+12y+8 &= x^2-(4xy+6x)+(4y^2+12y+8) \\ &= x^2-2(2y+3)x+4(y+1)(y+2) \\ &= [x-2(y+1)][x-2(y+2)] \\ &= (x-2y-2)(x-2y-4) \end{aligned}$$

2. 化简求值

(1) 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$,求$\frac{a+b+2ab+2b^2}{2ab+b^2}$的值

(2) 已知 $x=\frac{1}{2}$,求$\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right)\div\left[1\div\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)\right]\div\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)$的值

(3) 化简 $|x-4|+\sqrt{(2-x)^2}+x-6$,并求当该式为 15 时,$x$ 的值。

解题分析:(1) 为求代数式的值,应将已知条件进行恒等变形

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$$

$$\frac{a+b}{ab}=2 \quad 即\ a+b=2ab$$

因此$\dfrac{a+b+2ab+2b^2}{2ab}=\dfrac{2ab+2ab+2b^2}{2ab+b^2}$

$$=\frac{2(2ab+b^2)}{2ab+b^2}=2$$

(2) 首先应将代数式化简,再代入已知值求解,若直接代入往往运算较繁。

$$(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1})\div[1\div(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2})]\div(1-\frac{2}{2x+1})$$

$$=\frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}\div[1\div\frac{4x^2-4x+1}{4x^2}]\div\frac{2x+1-2}{2x+1}$$

$$=\frac{8x}{(2x-1)(2x+1)}\div\frac{4x^2}{(2x-1)^2}\div\frac{2x-1}{2x+1}$$

$$=\frac{8x}{(2x-1)(2x+1)}\cdot\frac{(2x-1)^2}{4x^2}\cdot\frac{2x+1}{2x-1}=\left.\frac{2}{x}\right|_{x=\frac{1}{2}}=4$$

(3) 要去掉绝对值符号,必要讨论 $x$ 的取值范围,为此只要找到 $|x-4|$, $|2-x|$ 的零点即 $x-4=0$ 得 $x=4$,$2-x=0$ 得 $x=2$,于是 $x$ 的取值范围就被划分为三个区间,

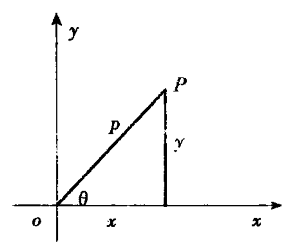


图 18-2

分别研究 $x$ 在三个区间内代数式的情况:

$$|x-4|+\sqrt{(2-x)^2}+x-6$$

$$=|x-4|+|2-x|+x-6$$

若 $x<2$ 时,原式 $=-(x-4)+2-x+x-6=-x$

若 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时,原式 $=-(x-4)-(2-x)+x-6=x-4$

若 $x>4$ 时,原式 $=x-4-(2-x)+x-6=3x-12$

即 $$|x-4|+\sqrt{(2-x)^2}+x-6=\begin{cases}-x & x<2\\ x-4 & 2\leqslant x\leqslant 4\\ 3x-12 & x>4\end{cases}$$

当代数式的值为 15 时,$15=-x, x=-15 \quad x\in(-\infty,2)$

$15=x-4, x=19 \quad x\notin[2,4]$

$15=3x-12, x=9 \quad x\in(4,+\infty)$

所以该代数式的值为 15 时,$x=-15$ 或 $x=9$

3. 化简:(1) $\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}$

(2) $(1-\sqrt{\dfrac{n}{m}})(m+\sqrt{mn}) \qquad (m>0, n\geqslant 0)$

(3) $\dfrac{\sqrt{a^3}+a\sqrt{b}}{ab-b^2}-\dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$

解题分析:(1) 分子是分母的两个因式的和,因此,可以将此式化成两个式子的代数和。