

高等学校教材

检测与转换技术

(第2版)

吉林工业大学 常健生 编

机械工业出版社

高等学校教材

检测与转换技术

(第 2 版)

吉林工业大学 常健生 编



机械工业出版社

前 言

本书系根据1988年全国高等学校工业自动化专业教学指导委员会修订的《检测与转换技术》课程汇总大纲编写的。

本书为工业自动化专业学生选修课教材，也可供有关专业师生、从事信息工程工作的工程技术人员参考。

本书涉及领域比较广泛，包括特殊半导体器件和一些新技术在检测与转换技术领域里的应用。全书共分十二章：第一章是检测与转换技术的理论基础；第二章至第十章是常用传感器的工作原理、技术性能、特点、测量电路以及应用范围；第十一章是智能化技术；第十二章是自动检测系统设计初步。与本书的第一版相比，第二版的第一章和第八章至第十二章几乎全部为新编内容。每章后均附有思考题与习题。

本书由吉林工业大学电子工程系工业自动化教研室常健生教授编写。由浙江大学电机工程系段建元副教授审阅。

本书部分内容参考了兄弟院校有关自动检测技术、非电量电测技术等有关教材，在编写过程中得到了合肥工业大学顾绳谷教授、北京机械工业管理学院高其昌教授的关怀，编者在此致以谢意。

由于编写时间仓促，书中难免有不妥和错误之处，殷切希望各院校师生及广大读者提出宝贵意见。

编 者
1990年5月

目 录

绪论	1	§7-2 磁电检测	124
第一章 检测与转换技术的理论基础	3	思考题与习题	128
§1-1 检测与转换技术的基本概念	3	第八章 压电传感器	129
§1-2 测量误差	5	§8-1 压电传感器的工作原理	129
§1-3 传感器的一般特性	19	§8-2 压电元件的常用结构形式	134
思考题与习题	33	§8-3 压电传感器的等效电路	135
第二章 电阻传感器	34	§8-4 压电传感器的测量电路	136
§2-1 电位器传感器	34	§8-5 压电传感器及其应用	140
§2-2 电阻应变传感器	38	思考题与习题	141
§2-3 热电阻传感器	54	第九章 位移-数字传感器	142
思考题与习题	62	§9-1 角度-数字编码器	142
第三章 电感传感器	63	§9-2 光栅与电子细分	146
§3-1 自感传感器	63	§9-3 感应同步器	157
§3-2 差动变压器	72	思考题与习题	166
§3-3 涡流传感器	78	第十章 常用半导体传感器	167
思考题与习题	85	§10-1 霍尔传感器	167
第四章 电容传感器	86	§10-2 气敏传感器	175
§4-1 电容传感器的工作原理	86	§10-3 湿敏传感器	189
§4-2 电容传感器的一些特殊问题	90	思考题与习题	195
§4-3 电容传感器的测量电路	92	第十一章 智能化技术	196
§4-4 电容传感器的应用	97	§11-1 智能化的基本概念	196
思考题与习题	99	§11-2 智能化的实现	196
第五章 光电传感器	100	§11-3 智能化手段	204
§5-1 光电元件	100	思考题与习题	207
§5-2 光电传感器的类型及应用实例	106	第十二章 自动检测系统设计初步	208
思考题与习题	109	§12-1 传感器的选择	208
第六章 热电偶	110	§12-2 非线性特性的线性化	209
§6-1 热电偶测温的基本原理	110	§12-3 温度补偿技术	217
§6-2 常用热电偶	112	§12-4 误差的合成与分配	223
§6-3 热电偶冷端的温度补偿	113	§12-5 可靠性问题	230
§6-4 热电偶实用测温电路	116	§12-6 抗干扰技术	233
§6-5 特殊热电偶及其应用	117	思考题与习题	239
思考题与习题	118	附录 几种常用传感器比较表	240
第七章 磁电传感器与磁电检测	119	参考文献	241
§7-1 磁电传感器	119		

绪 论

一、本课程研究的内容及性质

检测与转换技术是自动检测技术和自动转换技术的总称，是信息技术的重要组成部分。它所研究的内容是信息的提取与处理的理论、方法和技术。

所谓信息的提取是指从自然界中、社会中、生产过程中或科学实验中获取人们需要的信息。所谓信息处理是指人们把已经获得到的信息进行加工、运算、分析或综合，以便进行预报、报警、检测、计量、保护、控制、调度和管理等等，以期达到预防自然灾害、预报事故、提高劳动生产率、正确计量、改善产品质量、顺利进行科学实验、进行文明生产和科学管理等目的。

虽然检测与转换技术服务的领域非常广泛，但是从这门课程的研究内容来看，不外乎是传感器技术、误差理论、测试计量技术、抗干扰技术以及电量间互相转换技术等。

综上所述，检测与转换技术是一门综合性很强的课程，又是在物理学、电工学、电子学、计算机、自动控制等先修课的基础上开设的一门重要专业课程。

二、本课程在国民经济中的地位和作用

在人类步入信息社会的今日，人们对信息的提取、处理、传输以及综合等要求愈加迫切。

作为信息提取的功能器件——传感器与人类的关系愈来愈密切。例如，电冰箱中的温度传感器，监视煤气溢出的一氧化碳气敏传感器、防止火灾的烟雾传感器等等。

为了提高产品的自动化程度，提高产品的功能，从而提高经济效益，其中最主要的措施是采用传感器，机电一体化产品就是最明显的例子。

提高劳动生产率，目的是为了提经济效益，在工业生产中，无论是离散过程或是连续过程，采用自动控制技术是最有效的措施，这里首当其冲的是采用传感器和自动检测系统。

采用自动检测系统进行实时测量及分析产品性能；采用自动控制系统对产品加工过程进行实时控制，则是提高产品质量的现代化方法。

由于计算机技术的突飞猛进的发展和微型计算机的兴起，使国民经济中的任何一个部门中需要提取的各种信息有可能通过计算机或微型计算机进行正确及时地处理。具体地说，各种大规模集成电路和各种计算机都是通过传感器及其自动检测系统来转换信息的。

有人把计算机比喻为人的大脑的延续，称之为“电脑”；而把传感器比喻为人的感觉器官的延续，称之为“电五官”（视、听、味、嗅、触）。没有“电五官”就不能实现自动化，没有检测与转换技术就不能有自动保护、自动报警和自动诊断系统，就不能组成自动控制系统，就不能实现自动计量和自动管理。

目前，检测与转换技术已成为一些发达国家的最重要的热门技术之一，其主要原因是它可以给人们带来巨大的经济效益和促使科学技术飞跃发展。可以说，一个国家的现代化水平是用自动化水平来衡量的，而自动化水平是用采用传感器的种类多少和数量来衡量的。由此看来，检测与转换技术在国民经济中占有极其重要的地位和作用。

三、检测与转换技术的发展方向

1. 提高自动检测系统的检测分辨率、精度、稳定性和可靠性，一直是本门技术的研究课题和方向。

2. 研制新型传感器，以组成新型的自动检测系统和添补自动检测系统的空白。

3. 微电子技术、微型计算机技术与传感器技术相结合可以构成新一代的智能化自动检测系统。它的特点是，可使测量精度、自动化和多功能方面的水平得到进一步提高。

4. 采用多传感器去探索检测线的、面的和体的空间参数及综合参数，以构成特殊的自动检测系统。例如，温度场的自动检测；复杂机械零件的形状和位置误差的自动测量；粮食、烟草、酒类以及药材等产品质量综合参数的自动检测等等。

四、本课程之任务和目的

本课程的任务在于使学生掌握检测与转换技术的基本概念和常用传感器的工作原理、结构、特性及其应用。

本课程的目的在于培养学生以下能力：

(1) 具有选择传感器的能力；

(2) 具有组成自动检测系统的能力；

(3) 对自动检测系统中的技术问题具有一定的处理能力。

由于本课程具有综合性的专业课性质，在考虑到先修课的同时，应尽量围绕上述任务和目的进行讲授。也希望学生在学习时，注意自己上述能力的培养。

第一章 检测与转换技术的理论基础

§1-1 检测与转换技术的基本概念

一、检测与转换技术

检测与转换技术是自动检测技术和自动转换技术的总称，它是以研究自动检测系统中的信息提取、信息转换以及信号处理的理论和技术为主要内容的一门应用技术学科。

信息提取所指的是，从自然界诸多的被检查与测量量(物理量、化学量、生物量与社会量)中提取出有用的信息(一般都是电信号)，以便组成自动检测系统。

信息转换是将所提取出的有用的信息进行电量形式、幅值、功率等的转换。为了适应下一单元的需要和满足精确度的需要，在此对信息提取及转换过程中引入的干扰进行了补偿。

信息处理的任务，视输出环节的需要，可将变换后的电信号进行数字运算(求均值、极值等)、模拟量-数字量变换等处理。

信息传输的任务是，在排除干扰的情况下经济地、准确无误地把信息进行远、近距离的传递。

二、自动检测系统

自动检测系统是自动测量、自动计量、自动保护、自动诊断、自动信号等诸系统的总称，它的组成框图如图1-1所示。在上述诸系统中，皆包含有被检测量、敏感元件和电子测量电路，它们间的区别仅在于输出单元。如果输出单元是显示器或记录器，则该系统叫做自动测量系统；如果输出单元是计数器或累加器，则该系统叫做自动计量系统；如果输出单元是报警器，则该系统是自动保护系统或自动诊断系统；如果输出单元是处理电路，则该系统是部分数据分析系统、自动管理系统或自动控制系统等等。

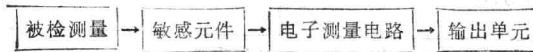


图1-1 自动检测系统框图

三、传感器

从被检测的参量中提取出有用的信息(它往往是电量)的器件，有时还将它转换成易于传递和处理的电信号，称之为传感器。传感器是由敏感元件本身(有时包括一次或二次转换元件)或者和部分的测量电路构成，它有如图1-2中所示的几种结构。

属于A型结构的传感器(图1-2a)，一般叫做电量传感器，例如，热电偶、磁电传感器、光电池和压电传感器等；属于B型结构的(图1-2b)，一般是电参数传感器，例如热敏电阻传感器、电容传感器、感应同步器、角度编码器等；属于C型结构的(图1-2c)，有电位器传感器、电阻应变传感器、压磁传感器等，它们也属于电参数传感器。

A型、B型及C型结构统称为简单结构型，与它们相对应的是D型结构(图1-2d)，它是由两个简单结构型(正向传感器和反向传感器)构成。正向和反向传感器在结构尺寸和参数

上完全相同，不同的仅是接受被检测量的作用方向，当被检测量变化时，一个接受的是正向增量 $[\Delta x]$ ；另一个接受的是反向增量 $(-\Delta x)$ ，它们的输出(分别为 $+\Delta y$ 和 $-\Delta y$)作用到一个差动电路上，得到一个输出量 Z 。 Z 就是D型结构传感器的输出，因差动电路的作用是取 $+\Delta y$ 和 $-\Delta y$ 之差，故D型结构称之为差动结构型。由于在差动结构型传感器中应用了两个简单结构型，故这种结构型传感器具有较简单结构型灵敏度高、抗干扰能力强、线性度好等优点。

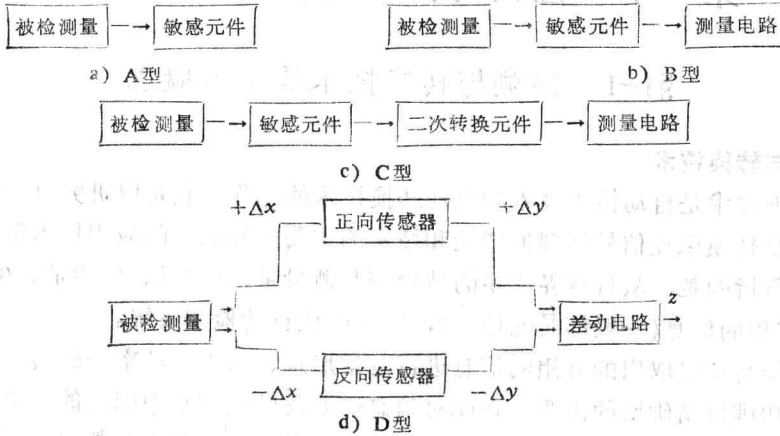


图1-2 传感器结构类型框图

虽然D型结构具有良好的输出特性，但是不是对所有被检测量都能组成差动结构型传感器。从对现有传感器原理分析可以看出：只有应用在检测力(压力)或位移等少数几个物理量的电参数传感器才能组成D型结构。

为了揭示诸多传感器之间的内在联系，在表1-1中给出了传感器分类、转换原理和它们的典型应用，供选用传感器时参考。

表1-1 传感器分类表

传感器分类		转换原理	传感器名称	典型应用	
转换形式	中间参量				
电参数	电	移动电感器触点改变电阻	电感器传感器	位移	
		改变电阻丝或片的尺寸	电阻丝应变传感器、半导体应变传感器	微应变、力、负荷	
		利用电阻的温度效应(电阻温度系数)	热丝传感器	气流速度、液体流量	
			电阻温度传感器	温度、辐射热	
			热敏电阻传感器	温度	
	阻	利用电阻的光敏效应	光敏电阻传感器	光强	
		利用电阻的湿度效应	湿敏电阻	湿度	
	电容	电	改变电容的几何尺寸		力、压力、负荷、位移
			改变电容的介电常数	电容传感器	液位、厚度、含水量
		电	改变磁路几何尺寸、导磁体位置	电感传感器	位移
涡流去磁效应			涡流传感器	位移、厚度、硬度	
利用压磁效应			压磁传感器	力、压力	

(续)

传感器分类		转换原理	传感器名称	典型应用
转换形式	中间参量			
电	电 感	改变互感	差动变压器	位移
			自整角机	位移
			旋转变压器	位移
参	频 率	改变谐振回路中的固有参数	振弦式传感器	压力、力
			振筒式传感器	气压
			石英谐振传感器	力、温度等
数	计 数	利用莫尔条纹	光栅	大角位移、大直线位移
		改变互感	感应同步器	
		利用拾磁信号	磁栅	
	数字	利用数字编码	角度编码器	大角位移
电 量	电 动 势	温差电动势	热电偶	温度、热流
		霍尔效应	霍尔传感器	磁通、电流
		电磁感应	磁电传感器	速度、加速度
		光电效应	光电池	光强
	电 荷	辐射电离	电离室	离子计数、放射性强度
		压电效应	压电传感器	动态力、加速度

§1-2 测量误差

一、误差的基本概念

(一) 有关测量技术中的部分名词

(1) 等精度测量 在同一条件下所进行的一系列重复测量称为等精度测量。

(2) 非等精度测量 在多次测量中, 如对测量结果精确度有影响的一切条件不能完全维持不变。称为非等精度测量。

(3) 真值 被测量本身所具有的真正值称之为真值。量的真值是一个理想的概念, 一般是不知道的。但在某些特定情况下, 真值又是可知的, 例如一个整圆周角为 360° 等。

(4) 实际值 误差理论指出, 在排除了系统误差的前提下, 对于精度测量。当测量次数为无限多时, 测量结果的算术平均值极接近于真值, 因而可将它视为被测量的真值。但是测量次数是有限的。故按有限测量次数得到的算术平均值只是统计平均值的近似值。而且由于系统误差不可能完全被排除掉, 故通常只能把精度更高一级的标准器具所测得的值作为“真值”。为了强调它并非真正的“真值”, 故把它称为实际值。

(5) 标称值 测量器具上所标出来的数值。

(6) 示值 由测量器具读数装置所指示出来的被测量的数值。

(7) 测量误差 用器具进行测量时, 所测量出来的数值与被测量的实际值之间的差值。

任何自动检测系统的测量结果都有一定的误差, 即所谓精度。一般来说, 不存在没有误差的测量结果, 也不存在没有精度要求的自动检测系统。精度(误差)是一项重要技术指标。

(二) 误差的分类

在测量中由不同因素产生的误差是混合在一起同时出现的。为了便于分析研究误差的性质、特点和消除方法, 下面将对各种误差进行分类讨论。

1. 按表示方法分类

(1) 绝对误差 绝对误差是示值与被测量真值之间的差值。设被测量的真值为 A_0 , 器具的标称值或示值为 x 。则绝对误差 Δx 为

$$\Delta x = x - A_0 \quad (1-1)$$

由于一般无法求得真值 A_0 , 在实际应用时常用精度高一级的标准器具的示值(作为实际值) A 代替真值 A_0 。必须指出, A 并不等于 A_0 , 一般来说, A 总比 x 更接近于 A_0 。

x 与 A 之差常称为器具的示值误差。记为

$$\Delta x = x - A \quad (1-2)$$

通常即以此值来代表绝对误差。

绝对误差一般只适用于标准器具的校准。

绝对值是与 Δx 相等但符号刚好相反的值, 称为修正值, 常用 c 表示, 如

$$c = -\Delta x = A - x \quad (1-3)$$

通过检定, 可以由上一级标准(或基准)给出受检测系统的修正值。利用修正值便可求出检测系统的实际值

$$A = x - c \quad (1-4)$$

修正值给出的方式不一定是具体的数值, 也可以是一条曲线, 公式或数表。在某些自动测试系统中, 为了提高它的测量精度, 减少它的测量误差, 修正值则预先编制成有关程序储存于仪器中, 所得测量结果, 自动对误差进行了修正。

(2) 相对误差 相对误差是绝对误差 Δx 与被测量的约定值之比, 用它较绝对误差更能确切地说明测量质量。

在实际测量中, 相对误差有下列表示形式:

① 实际相对误差: 实际相对误差 γ_A 是用绝对误差 Δx 与被测量的实际值 A 的百分比值来表示的相对误差。记为

$$\gamma_A = \frac{\Delta x}{A} \times 100\% \quad (1-5)$$

② 示值相对误差: 示值相对误差 γ_x 是用绝对误差 Δx 与器具的示值 x 的百分比值来表示的相对误差。记为

$$\gamma_x = \frac{\Delta x}{x} \times 100\% \quad (1-6)$$

③ 满度(或引用)相对误差: 满度相对误差 γ_m 又称满度误差, 是用绝对误差 Δx 与器具的满度值 x_m 之比来表示的相对误差。记为

$$\gamma_m = \frac{\Delta x}{x_m} \times 100\% \quad (1-7)$$

这是应用最多的表示方法。

电工仪表就是按 γ_m 之值进行分级的。例如1.5级的电表。就表明其 $\gamma_m \leq 1.5\%$ 。并在其面板上标以1.5的符号。

(3) 容许误差 容许误差是, 根据技术条件的要求, 规定某一类器具误差不应超过的最大范围。

2. 按误差出现的规律分类

(1) 系统误差 系统误差(简称系差), 是按某种已知的函数规律变化而产生的误差。系统误差又可分为:

① 恒定系差。该系差是指在一定条件下, 误差的数值及符号都保持不变的系统误差。

② 变值系差。该系差是指在一定的条件下, 误差按某一确切规律变化的系统误差。根据其变化规律又可分为以下几种情况:

i、累进性系差。该系差是指出整个测量过程中误差的数值在逐渐增加或逐渐减少的系统误差。

ii、周期性系差。该系差是指在测量过程中误差的数值发生周期性变化的系统误差。

iii、按复杂规律变化的系差。这类系差的变化规律十分复杂, 一般用曲线、表格或经验公式来表示。

系统误差主要由以下几个方面的因素引起: 材料、零部件及工艺的缺陷; 环境温度、湿度、压力的变化以及其他外界干扰等。

系统误差表明了一个测量结果偏离真值或实际值的程度。系统误差愈小, 测量就越准确, 所以还经常用准确度一词来表征系统误差大小。必须掌握系统误差有规律性这个特点。找出产生系统误差的原因, 掌握其规律性, 通过引入修正值加以消除。但还应指出, 系统误差不是容易发现和容易确定的, 由于测试条件的复杂性使得系统误差的确定往往是很困难的。因此在设计制造与使用时应认真对待。

(2) 随机误差 随机误差(简称随差)又称偶然误差, 它是由未知变化规律产生的误差。

随机误差是由很多复杂因素的微小变化的总和所引起的, 因此分析比较困难, 但是, 随机误差具有随机变量的一切特点, 在一定的条件下服从统计规律, 因此, 通过多次测量后, 对其总和可以用统计规律来描述, 从而在理论上估计其对测量结果的影响。

随机误差表现了测量结果的分散性。在误差理论中, 经常用精密度一词来表征随机误差的大小。随机误差愈小, 精密度愈高。如果一个测量结果的随机误差和系统误差均很小, 则表明测量既精密又准确, 简称精确。

(3) 粗大误差 粗大误差是指在一定的条件下测量结果显著地偏离其实际值时所对应的误差, 简称粗差。从性质上来看, 粗差并不是单独的类别, 它本身既可能具有系统误差的性质。也可能具有随机误差的性质, 只不过在一定测量条件下其绝对值特别大而已。

粗大误差是由于测量方法不妥当, 各种随机因素的影响以及测量人员粗心(又称这类误差为疏失误差)所造成的。在测量及数据处理中, 当发现某次测量结果所对应的误差特别大时, 应认真判断该误差是否属于粗大误差, 如属粗差, 该值应舍去不用。

3. 按误差来源分类

(1) 工具误差 工具误差是指测量工具本身不完善引起的误差。主要包括:

① 读数误差 由以下几种原因产生

i、校准误差。该误差通常是指,检测系统在定标时,用标准器具对其指定的某些定标点进行定标时所产生的误差。

ii、检测系统分辨率不高所致的误差。

② 内部噪声引起的误差。内部噪声包括各种电子器件产生的闪变噪声、电子元件产生的热噪声、散粒噪声、电流噪声以及因开关或接插件接触不良、继电器动作、电机转动、电源不稳等引起的噪声。

噪声的存在限制了测量精度的进一步提高,必然出现一定的误差。

此外,还有灵敏度不足引起的误差;器件老化引起的误差;检测系统工作条件变化时引起的误差。

构成检测系统的误差因素还可举出很多,如检测系统的附件(包括电源、热源及接插件等)引起的误差及检测系统没有调整到理想状态(如不垂直、不水平及偏心等)引起的误差等等。

(2) 方法误差 方法误差是指测量时方法不完善、所依据的理论不严密以及对被测量定义不明确等诸因素所产生的误差,有时也称为理论误差。

4. 按被测量随时间变化的速度分类

(1) 静态误差 静态误差是指在测量过程中,被测量随时间变化很缓慢或基本不变时的测量误差。

(2) 动态误差 动态误差是指在被测量随时间变化很快的过程中测量所产生的附加误差。动态误差是由于有惯性、有纯滞后,因而不能让输入信号的所有成分全部通过;或者输入信号中不同频率成分通过时受到不同程度的衰减或延迟而引起的。该误差是在动态测量时产生的,动态测量的优点是:检测效率高和环境影响小。

5. 按使用条件分类

(1) 基本误差 基本误差是指检测系统在规定的标准条件下使用时所产生的误差。所谓标准条件一般指检测系统在实验室(或制造厂、计量部门)标定刻度时所保持的工作条件,如电源电压 $220\text{V} \pm 5\%$;温度 $20 \pm 5^\circ\text{C}$;湿度小于80%;电源频率50Hz等。

基本误差是检测系统在额定条件下工作所具有的误差,检测系统的精确度就是由基本误差决定的。

(2) 附加误差 当使用条件偏离规定的标准条件时,除基本误差外还会产生附加误差,例如由于温度超过标准引起的温度附加误差、电源附加误差以及频率附加误差等。这些附加误差在使用时应叠加到基本误差上去。

6. 按误差与被测量的关系分类

(1) 定值误差 指误差对被测量来说是一个定值,不随被测量变化。这类误差可以是系统误差,如直流测量回路中存在热电动势等。也可以是随机误差,如检测系统中执行电机的起动引起的电压误差等。

(2) 累积误差 在整个检测系统量程内误差值 Δx 与被测量 x 成比例地变化,即:

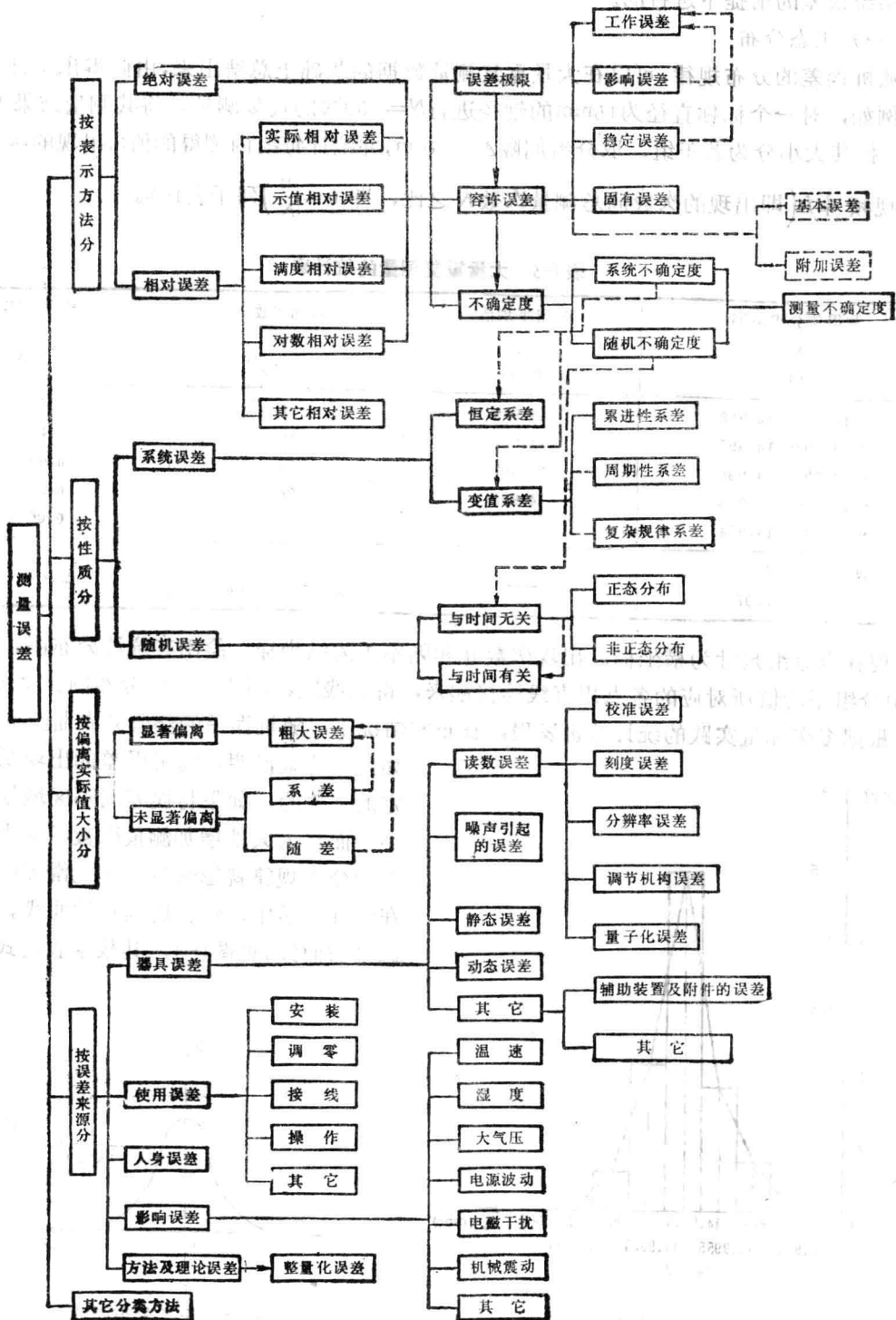
$$\Delta x = \gamma_0 x$$

式中 γ_0 ——为比例常数。

由上式可见, Δx 随 x 的增大而逐步累积,故称为累积误差。

以上从几个方面对各种误差进行了分类，为了便于读者复习巩固，今将测量误差的分类情况列于表1-2，有些名称可参考其它有关书籍。

表1-2 误差的分类



二、随机误差

对于随机误差可以采用统计学方法来研究其规律和处理测量数据，以减弱其对测量结果的影响，并估计出其最终残留影响的大小。对于随机误差所作的概率统计处理，是在完全排除了系统误差的前提下进行的。

(一) 正态分布

随机误差的分布规律，可以在大量重复测量数据的基础上总结出来，由此得出统计规律。

例如，对一个标称直径为15mm的轴径进行 $N=100$ 次的重复测量。将其测量结果所得的值 x_i ，按其大小分为若干组，取分组间隔 $\Delta x=1\mu\text{m}$ ，并统计每组内测得的值 x_i 出现的次数 n_i 及其出现频率 f_i （即出现的次数同总测量次数 N 之比，即 $f = \frac{n}{N}$ ）列于表1-3。

表1-3 大量重复测量的统计表

测得值分组范围 x_i (mm)	分组平均值 \bar{x}_i (mm)	出现次数 n_i (次数)	出现频率 $f_i = \frac{n_i}{N}$
14.999~14.998	14.999	8	0.08
<14.998~14.997	14.998	16	0.16
<14.997~14.996	14.997	50	0.50
<14.996~14.995	14.996	20	0.20
<14.995~14.994	14.995	6	0.06
测得值平均值 $\bar{x}=14.997$	—	总 数 $N = \sum n_i = 100$	$\sum f_i = 1$

现在以分组尺寸为横坐标。出现次数 n 和频率 f 为纵坐标，绘出其统计分布图。然后将图中分组平均值所对应的各点用直线连接起来，得到线图，即为其经验分布图。见图1-3。

根据多次测量实践的统计分析发现，在正常情况下，随机误差的经验分布曲线大致都是如此。这就说明，随机误差的出现是遵循一定的规律的，如果将误差间隔区域划分得越小，而且大大地增加测量次数，那末随机误差的分布规律就越来越接近光滑连续曲线。在统计学中，这种连续对称曲线，称为正态分布曲线，见图1-4，其数学表达式为

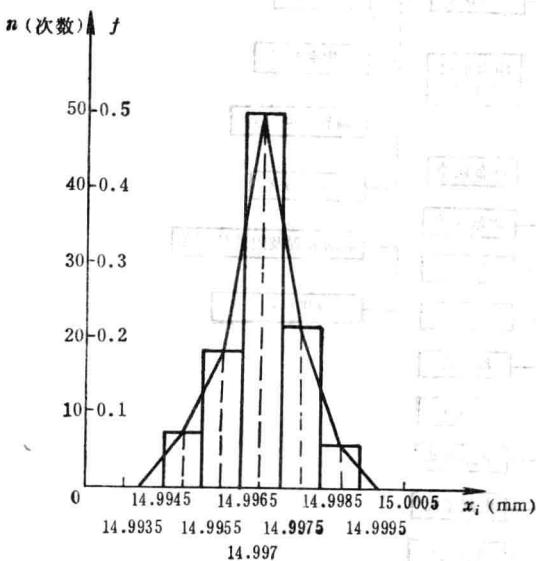


图1-3 分布统计图

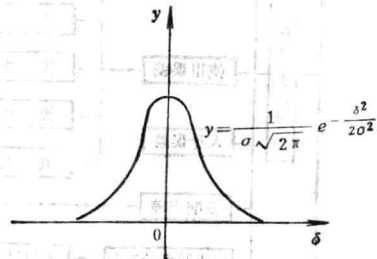


图1-4 正态分布曲线

$$y = f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \quad (1-8)$$

式中 y ——概率密度；
 δ ——随机误差；
 σ ——均方根误差；
 e ——自然对数的底。

分析图1-4曲线可以发现随机误差分布规律具有以下特点：

(1) 集中性 大量重复测量时所得到的数值，均集中分布在其平均值 \bar{x} 附近，即测量得到的数值 x_i 在平均值 \bar{x} 附近出现的机会最多(例题中测量值大部分集中在14.997mm附近，离开 \bar{x} 越远的值出现越少)。 \bar{x} 也称为分布中心，其值可以用下式表示：

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1-9)$$

(2) 对称性 当测量的次数足够多时，符号相反、绝对值相等的误差，出现的机会(或称概率)大致相等，即随机误差的分布具有对称性。本例中以 $\bar{x}=14.997\text{mm}$ 为中心，其两侧出现的个数接近相等，接近对称。

(3) 有限性 绝对值很大的误差，出现的机会极少。因此在有限次的测量中，误差绝对值不超过一定的范围，即随机误差的分布存在有限性。本例中随机误差的绝对值不会超过0.003mm的范围。

(4) 抵偿性 从对称性中可以推论出，当测量次数趋于无穷多时，随机误差的平均值的极限将趋于零，即随机误差具有抵偿性。

(二) 随机误差的评价指标

由于随机误差是按正态分布规律出现的，具有统计意义，通常以正态分布曲线的两个参数：算术平均值 \bar{x} 和均方根误差 σ ，作为评定指标。

1. 算术平均值 \bar{x}

x 的真值 A_0 是无法得到的，因此只能从一系列测得的值 x_i 中找一个接近真值 A_0 的数值，作为测量结果，这个值就是算术平均值 \bar{x} 。

假设对某一量作一系列等精度的测量，得到一系列不同的数值是 $x_1, x_2 \cdots x_n$ ，这些数值的算术平均值 \bar{x} 定义为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \quad (1-10)$$

又设各测量值与真值的随机误差值为 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 。

$$\delta_1 = x_1 - A_0$$

$$\delta_2 = x_2 - A_0$$

.....

$$\delta_n = x_n - A_0$$

即

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n x_i - nA_0 \quad (1-11)$$

由随机误差的对称性规律可以推出，当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \rightarrow 0$$

所以

$$\sum_{i=1}^n x_i = nA_0$$

即

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x} \quad (1-12)$$

上式表明，测量次数无限多时，所有测量值的算术平均值即等于真值。

事实上是不可能作无限次的测量，也即真值难以得到。但可以认为算术平均值 \bar{x} 是最接近真值的，且随着测量次数 n 增多而越接近其真值，因此以算术平均值作为真值是既可靠又合理的。

2. 均方根误差 σ

(1) 正态分布与均方根误差的关系 用算术平均值 \bar{x} 可以表示测量结果，但是只有 \bar{x} 还不能表示各测量值的精度。为了研究测量值的精度，我们来分析均方根误差 σ 与随机误差的关系。

由于随机误差的出现是符合正态分布曲线的，因此它的出现概率就是该曲线下所包围的面积，因为全部随机误差出现的概率 P 之和为1，所以曲线与横轴间所包围的面积应等于1，由式(1-8)可写出

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} y d\delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = 1 \quad (1-13)$$

式中 y ——概率密度；
 δ ——随机误差；
 σ ——均方根误差；
 e ——自然对数底数；
 P ——概率。

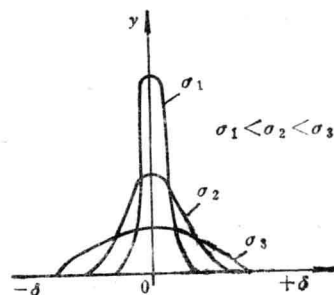


图1-5 三种不同 σ 的正态分布曲线

正态分布曲线是一个指数方程式，它是随着随机误差 δ 和均方根误差 σ 的变化而变化的，图1-5表示均方根误差 σ 和正态分布曲线的关系。从图中可以明显地看出 σ 与表示的分布曲线的形状和分散度有关； σ 值越小，曲线形状越陡，随机误差的分布越集中，测量精密度高；反之， σ 值越大，曲线形状越平坦，随机误差分布得越分散，测量精密度越低。

由此可见，均方根误差 σ 的大小表明了测量的精密度，它可作为评定随机误差的指标。

(2) 均方根误差 σ 的计算 在等精度测量中，均方根误差 σ 可由下式表达：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots + \delta_n^2}{n}} \quad (1-14)$$

式中 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ——每次测量中相应各测量值的随机误差。

$$\delta_i = x_i - A_0$$

式中 x_i ——各测得值；
 A_0 ——被测量的真值；
 n ——测量次数。

在确定了均方根误差 σ 之后，可以进一步讨论均方根误差 σ 和随机误差 δ 之间的关系。

根据前面的分析，在正态分布曲线下包含的总面积，等于各随机误差 δ_i 出现的概率的总和。为运算方便起见，代入新的变量 Z ，设

$$Z = \frac{\delta}{\sigma}$$

$$dZ = \frac{d\delta}{\sigma}$$

代入式(1-13)，则得。

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ = 1$$

如果要确定随机误差在所给定的 $(-\delta, +\delta)$ 范围内的概率，只要对图1-6阴影部分的面积作积分即可。

即随机误差在 $(-\delta, +\delta)$ 区间的概率为

$$P = 2\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{+z} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

对任何 Z 值的积分值 $\phi(z)$ 可以由概率函数积分表查出

表1-4中所列为积分表中几个具有特征的数值。

由此表可以看出，随着 z 值的增大， $P = 1 - 2\phi(z)$ 的值，也就是超出 δ 的概率，减少得很快。

当 $z = \pm 1$ 时， $2\phi(z) = 0.6827$ ，则在 $\delta = \pm \sigma$ 范围内的概率为 68.27%。

当 $z = \pm 3$ 时， $2\phi(z) = 0.9973$ ，则在 $\delta = \pm 3\sigma$ 范围内的概率为 99.73%。在超出 $\delta = \pm 3\sigma$ 范围的概率 $P = 1 - 2\phi(z) = 0.0027$ ，仅为 0.27%，即发生的概率很小。所以通常评定随机误差时可以 $\pm 3\sigma$ 为极限误差。如果某项测量值的残差超出 $\pm 3\sigma$ ，则此项残差即为粗大误差，数据处理时应舍去。

必须指出，上述讨论是以测量值与真值的随机误差，即 $\delta_i = x_i - A_0$ 来进行的。前面已经指出，真值 A_0 是不可能真正得到的，因此真正的随机误差也就无法求得。在实际工作中可用残差来近似代替随机误差求均方根误差。

所谓残差，是指测量值与该被测量的某一算术平均值之差。如用 v_i 表示残差 ($v_i = x_i - \bar{x}$)，则均方根误差 σ 可表示为

$$\sigma = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \quad (1-15)$$

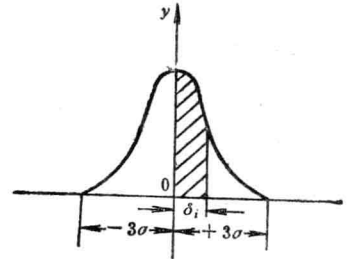


图1-6 阴影线部分面积表示零到 δ_i 范围内的概率