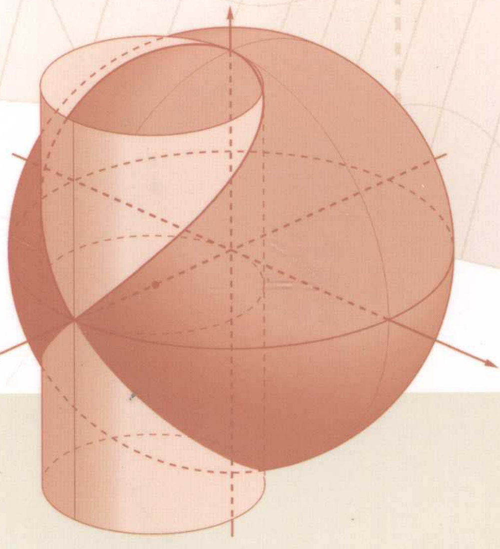
高 等 学 校 教 材

高等数学

Advanced Mathemati

主编 郭进峰 李玮玲 沈菁华

主审 国起



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

主编　郭进峰　李玮玲　沈菁华
编者　邢　溯　陈　洋　余　泓　赵　岩
主审　国　起

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书内容包括预备知识、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、多元函数微分学、二重积分、无穷级数等章节。

全书突出基本概念的实际背景和理论知识的实际应用，强调逻辑思维方法，淡化解题技巧，并在预备知识中充分考虑与中学数学内容的衔接。除每节后配置习题外，每章后还配置总习题，以巩固本章的学习成果。

本书既可作为课时少于130学时的高等数学课程的教材，也可作为工程技术和经济管理人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学／郭进峰，李玮玲，沈菁华主编．--北京：高等教育出版社，2012.8

ISBN 978-7-04-035720-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①郭…　②李…　③沈…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第160904号

策划编辑　张彦云　　责任编辑　张彦云　　封面设计　于文燕　　版式设计　杜微言

插图绘制　尹文军　　责任校对　胡晓琪　　责任印制　韩　刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18	版　　次	2012年8月第1版
字　　数	320千字	印　　次	2012年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.50元

物 料 号　35720-00

前　言

本书是编者在分析了高等数学教学改革的趋势,同时吸收国内外教材改革经验的基础上,针对目前本科少学时高等数学课程的教学需要编写而成的。在保证科学性的前提下,本书充分考虑高等教育大众化的趋势,简化了高等数学中较为抽象的概念,其目的是使高等数学教材能够适应培养21世纪应用型与创新型人才的需要。

本书以"够用"为原则,对高等数学的教学内容与课程体系的改革提出了一些思路和方法,力图回答诸如"导数是什么"、"导数有什么用"等在教学过程中学生经常提出的问题,并为解决(或部分解决)高等数学教学改革中遇到的诸多难题,如经典内容与现代知识的矛盾、内容多而学时有限的矛盾等,提出了自己的设想。

此外,我们还充分考虑到与中学教材衔接中可能出现的问题,在预备知识部分介绍了极坐标等概念,供教师在教学中选用;并在书中配置了较多的习题,便于学生训练和提高。

全书内容包括预备知识、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程、多元函数微分学、二重积分、无穷级数等,叙述深入浅出、重点突出、难点分散。本书可作为课时少于130学时的高等数学课程的教材,也可供工程技术和经济管理人员参考,同时对高等学校数学教师的教学工作也有一定的参考价值。

本书编者长期在教学第一线,具有丰富的教学经验,参加本书编写的有(排名不分先后)郭进峰、陈洋、李玮玲、沈菁华、赵岩、邢溯、余泓等教师,书中的插图均由邢溯老师绘制。

在本书的编写过程中,国起教授提出了许多极具参考价值的建议。此外,本书的编写还得到了多位教授、学者的帮助以及高等教育出版社的大力支持,特在此一并致谢。

由于编写人员水平所限,书中必有不少不足之处,敬请各位专家、同行和读者批评指正。

编者

2012年4月

目　录

预 备 知 识

第一节　集合与映射

一、集合

1. 集合的概念

具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**.组成这个集合的事物称为该集合的**元素**.

集合常用大写字母表示,记作集合 A,M 等.而集合中的元素用小写字母表示,如 a,b,c,m 等.若元素 a 是集合 A 中的元素,则记作 $a\in A$(读作 a 属于 A),否则记作 $a\notin A$(读作 a 不属于 A).

若集合 A 中的元素只有有限个,则称该集合为**有限集合**,否则称为**无限集合**.

集合通常可表示为:

若集合 A 中只有 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,则其可表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

若集合 A 中有无限个元素,则其可表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 所具有的性质}\}.$$

例如,所有满足 $x^2+y^2=1$ 的实数构成的平面上的点集 M 可表示为

$$M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}.$$

通常我们用特定的记号表示常用的数集:

自然数集合:$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$,

整数集合:$\mathbf{Z}=\{k\mid k=\pm n,n\in\mathbf{N}\}$,

正整数集合:$\mathbf{Z}^+=\{k\mid k>0,k\in\mathbf{Z}\}$,

实数集合: $\mathbf{R}$,

有理数集合:$\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}^*,\text{且 }p,q\text{ 互质}\right\}$,其中 $\mathbf{Z}^*$ 表示 $\mathbf{Z}$ 中去掉零后的集合.

2. 集合的关系与运算

设 A,B 为两个集合,则若 A 中的所有元素均是 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(读作 A 包含于 B,或 B 包含 A),如,$\mathbf{Z}\subset\mathbf{R}$,$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$.

若 A 是 B 的子集,B 也是 A 的子集,则称 **A 与 B 相等**,记作 $A=B$.

若集合 C 中的每一个元素,不是属于 A,就是属于 B,即

$$C=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

则称集合 C 是集合 A,B 的**并集**,记作 $C=A\cup B$.

若集合 C 中的每一个元素,既属于 A,又属于 B,即

$$C=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

则称集合 C 是集合 A,B 的**交集**,记作 $C=A\cap B$.

若集合 C 中每一个元素都属于 A,但不属于 B,即

$$C=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\},$$

则称集合 C 是集合 A,B 的**差集**,记作 $C=A-B$.

所考察对象的全体构成的集合叫**全集**,通常记作 I,全集 I 与集合 A 的差集称为集合 A 的**补集**,记作 $A^C=I-A$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作$\varnothing$. 如

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2+1=0\}=\varnothing.$$

集合的并、交、补运算满足:

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

对偶律 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C, (A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

3. 区间与邻域

区间和邻域是常用的一类数集. 设 a,b 是实数,且 $a<b$:

开 区 间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$,

闭 区 间 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$,

左开右闭区间 $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$,

左闭右开区间 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$.

对以上四个区间,闭的包含区间端点,开的不包含区间端点. $b-a$ 称为**区间长度**,区间长度有限的区间,称为**有限区间**,否则称为**无限区间**,如

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\},\quad (-\infty,b)=\{x \mid x<b\},\quad (-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

设 a,δ 为实数,且 $\delta>0$,则称数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

是以 a 为中心,δ 为半径的**邻域**,记作 $U(a,\delta)$,简称为 a 的 δ 邻域;称

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

是 a 的**去心 δ 邻域**,类似地有 a 的**左邻域**$(a-\delta,a)$和 a 的**右邻域**$(a,a+\delta)$. 若

不强调邻域的半径，称为 a 的邻域，记作 $U(a)$.

二、映射

定义 1　设 X,Y 是两个非空集合，如果存在法则 T，使得 X 中的每个元素 x，按法则 T 在 Y 中有唯一的元素 y 与之对应，那么称 T 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$T:X \longrightarrow Y.$$

元素 y 称为元素 x 在映射 T 下的像，记作 $y=T(x)$，而元素 x 称为元素 y 的原像，集合 X 称为映射 T 的定义域，记作 D_T，X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 T 的像，记作 $T(X)$. 当 Y 是数集时，$T(X)$ 称为集合 X 在映射 T 下的值域.

设 T 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $T(X)=Y$，即 Y 中任一元素均为 X 中某元素的像，则称 T 为 X 到 Y 的**满射**；若对任意的 $x_1,x_2\in X, x_1\neq x_2$，必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$，则称 T 为**单射**；若 T 既是满射又是单射，则称 T 为 X 到 Y 的**一一映射**，也称为**一一对应**.

定义 2　设映射 T 为 X 到 Y 的一一映射，则对每个 $y\in Y$，有唯一的 $x\in X$，满足 $T(x)=y$，于是我们得到从 Y 到 X 的映射 $T^{-1}:Y\longrightarrow X$，称为映射 T 的逆映射.

定义 3　设有映射 $T_1:X\longrightarrow Y_1, T_2:Y_2\longrightarrow Z$，其中 $Y_1\subset Y_2$，则由 T_1,T_2 确定了从 X 到 Z 的一个映射，称为 T_1,T_2 的复合映射，记作 $T_1\circ T_2$，即

$$T_1\circ T_2:X\longrightarrow Z,$$
$$x\longrightarrow T_2[T_1(x)].$$

第二节　函　　数

一、函数的概念

在自然界或科学研究过程中保持不变的量叫常量，变化的量叫变量. 但是，由于客观世界是运动的，在不断地变化发展，因而考察一个量是变量还是常量应从变化中去观察. 变量是绝对的，常量是相对的. 如水的密度，在固定温度下是常量，但它随着温度的变化而变化.

函数表示了变量之间的一种相依关系，这种关系给出了一种对应法则，根据这种法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个值时，另一个就有确定的值与之对应，这就是函数的实质. 如圆的面积 A 与半径 r 的对应关系为 $A=\pi r^2$，函数的严格定义为：

定义 4　设数集 $D\subset R$，则 D 到 R 的一个映射 f 称为 D 上的函数，记作 $y=$

$f(x)$,**其中** $x \in D$ **称为自变量**,$y \in f(D)$ **称为因变量**.

这里的 D 称为函数 f 的**定义域**,若 $x_0 \in D$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义,其与 x_0 对应的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记作 $y_0=f(x_0)$. 当 x 取遍整个定义域 D 时,对应的函数值的全体组成的数集 $W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的**值域**.

函数的对应法则有时也用其他字母来表示,如 g, F, φ 等,这时相应的函数关系就写为 $y=g(x)$, $y=F(x)$, $y=\varphi(x)$ 等.

在实际问题中,函数的定义域必须根据问题的实际背景来确定,如圆的面积 A 与半径 r 的函数关系式为 $A=\pi r^2$,其定义域为 $(0,+\infty)$. 而在数学中,如不指明一个函数的实际意义,而抽象地用一个式子 $y=f(x)$ 表示两个变量的函数关系,这时我们约定函数的定义域就是使 $y=f(x)$ 有意义的所有实数 x 构成的数集.

例 1 边长为 x 的立方体的体积为 $V=x^3$,其定义域为 $(0,+\infty)$.

例 2 问:函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与函数 $g(x)=1$ 是否为同一函数?

解 要回答这个问题,我们必须理解函数的定义. 在定义中,需给定一个定义域和一个对应关系,而 $f(x)$ 的定义域 $D_f=\{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$, $g(x)$ 的定义域 $D_g=\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$,尽管它们在 $x \neq 0$ 时对应关系相同,但由于它们的定义域不同,因而它们不是同一个函数.

两个函数是否为同一函数要看两个方面的问题:

(1) 定义域是否相同;

(2) 表达式(函数关系)是否相同.

只有在定义域与表达式都相同的情况下,两个函数才是相同的函数.

例 3 函数 $y=2$ 称为**常数函数**,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{2\}$,其图像如图 0-1.

例 4 函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**,其定义域为 $\mathbf{R}$,值域 $W=\{-1,0,1\}$. 其图像如图 0-2.

对任意实数 x,有

$$x=\operatorname{sgn}(x)\,|x|.$$

例 5 设 x 为任一实数,y 取不超过 x 的最大整数,简称最大整数,记作 $y=[x]$,称其为**取整函数**,其定义域 $D=\mathbf{R}$,值域 $W=\mathbf{Z}$. 其图像(如图 0-3)为阶梯曲线.

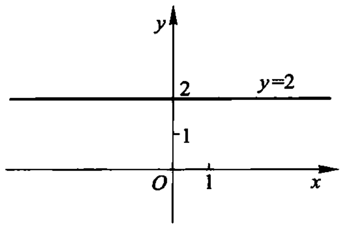


图 0-1

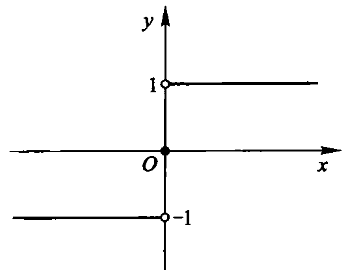


图 0-2

由例题 4 可知，有时一个函数要用几个式子来表示，这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数称为**分段函数**.

例 6　函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 是分段函数，这里尽管有两个表达式，但它只表示一个函数. 其图像如图 0-4.

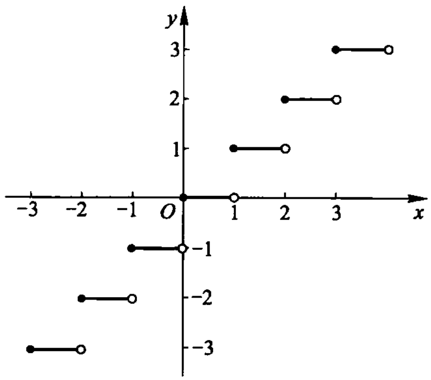


图 0-3

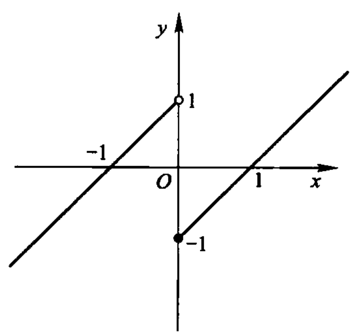


图 0-4

二、函数的几何特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 内有定义，如果存在正数 M，使得对任意的 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

或存在 m_1, m_2，使得对任意的 $x\in D$，有

$$m_1\leqslant f(x)\leqslant m_2,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 D 内**有界**或称 $y=f(x)$ 在 D 内为**有界函数**；反之，称 $y=f(x)$ 在 D 内**无界**或称 $y=f(x)$ 在 D 内为**无界函数**.

如图 0-5,若函数 $y=f(x)$ 在 D 内有界,即存在一个正数 M,使得对任意的 $x\in D$,都有不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,这在几何上表示曲线 $y=f(x)$(或函数 $y=f(x)$ 的图像)落在两直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.

例如,如图 0-6,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上是有界函数,但在 $(0,2)$ 上却是无界函数.

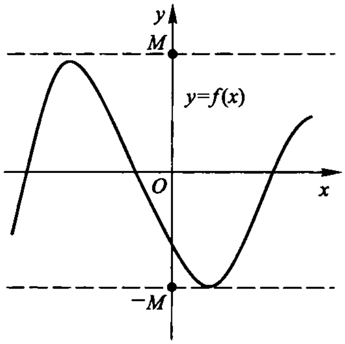


图 0-5

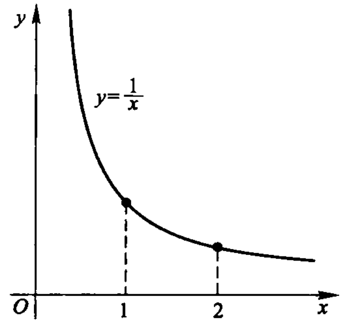


图 0-6

2. 函数的单调性(增减性)

设函数 $y=f(x)$ 在 D 内有定义,且对任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1>x_2$ 时,若有

(1) $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 内是**单调增加(上升)**的函数,记作

$$f(x)\nearrow,\quad x\in D.$$

(2) $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 内是**单调减少(下降)**的函数,记作

$$f(x)\searrow,\quad x\in D.$$

例如,函数 $y=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调上升的,在 $(-\infty,0)$ 内是单调下降的,而在 $(-1,1)$ 内不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$),如果对任意的 $x\in D$ 有

$$f(-x)=-f(x)\quad(f(-x)=f(x)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 内是**奇(偶)函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称(如图 0-7).

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于任意的 $x\in D$,$x\pm T\in D$,且

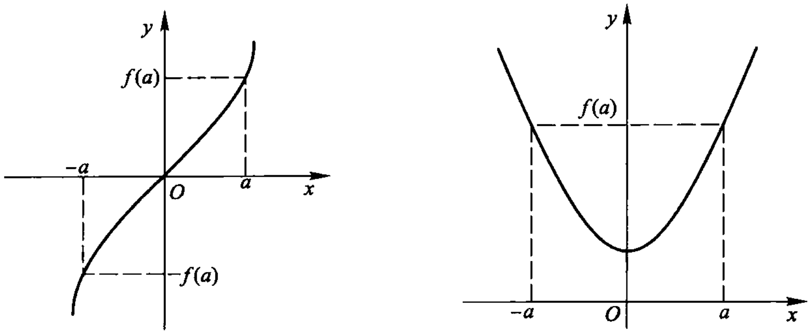


图 0 - 7

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称$f(x)$为**周期函数**,T称为$f(x)$的**周期**.通常我们说周期函数的周期是指其**最小正周期**.

若T为$f(x)$的周期,则有

$$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x);$$

$$f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x),$$

从而得

$$f(x+kT)=f(x),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

周期函数的图像,只要把它在一个周期上的图像向左右"平移"就可得到.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数$y=f(x)$的定义域为D,值域$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$,若$y=f(x)$是其定义域$D$到其值域$W$的一一映射,则称其逆映射

$$f^{-1}:W\to D$$

为函数$y=f(x)$的**反函数**,记作$x=\varphi(y)$.这个函数的定义域为W,值域为D,相对于反函数$x=\varphi(y)$来说,原来的函数$y=f(x)$称为**直接函数**.

值得注意的是,并不是任何一个函数都存在反函数,如函数$y=x^2(x\in(-1,1))$就不存在反函数.但如果我们将函数$y=f(x)$限制在它的单调区间I上,这样得到的函数就存在反函数,如将函数$y=x^2(x\in(-1,1))$的定义域限制在区间$I_1=(-1,0)$(或$I_2=(0,1)$)上,我们就得到其反函数$x=-\sqrt{y}$($x=\sqrt{y}$),一般地,我们有如下定理:

定理 1　**若**$y=f(x)(x\in D)$**是单调函数,则存在反函数**$x=\varphi(y)(y\in$

$f(D)$)，**且** $x=\varphi(y)$ **也是单调的，其定义域为** $f(D)$，**值域为** D.

有时也把函数 $y=f(x)$ 的反函数写成 $x=f^{-1}(y)$. 因为我们习惯上总把 x 表示成自变量，y 表示成因变量. 因而，我们总把 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$.

如正弦函数 $y=\sin x$，其定义域是一切实数 **R**，值域是 $[-1,1]$，显然 $y=\sin x$ 在 **R** 上不是单调函数，因而 $y=\sin x$ 不存在反函数. 若将函数 $y=\sin x$ 的定义域限制为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，这时 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数，因而存在反函数，我们记这个反函数为 $y=\arcsin x$，这是一个定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的函数.

事实上，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，它们的关系如下：

(1) $f(x)$ 的定义域是 $f^{-1}(x)$ 的值域，$f(x)$ 的值域是 $f^{-1}(x)$ 的定义域；

(2) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称；

(3) $f[f^{-1}(x)]=f^{-1}[f(x)]=x$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，值域为 W，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 W_1，若 $W_1\subset D_1$，则对 D 上的任意一个值 x，由函数 $u=\varphi(x)$ 得到 $W_1(\subset D_1)$ 中的一个值 u，再通过函数 $y=f(u)$ 得到 W 中的一个值 y，也就是说对任意的 D 上的值 x，通过函数 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 可确定 W 上的一个值，从而由函数 $u=\varphi(x)$、$y=f(u)$ 确定了一个函数，这个函数称为函数 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，并称变量 u 为**中间变量**，函数 $u=\varphi(x)$ 为**中间函数**.

关于复合函数要注意如下几点：

(1) 并不是任意的两个函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 都能复合成一个函数.

例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数，因为对任意的 x，函数值 $u=2+x^2$ 都大于等于 2，而函数 $y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$，因而 $y=\arcsin(2+x^2)$ 没有意义.

(2) 函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域不一定就是函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域.

例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=x^2$ 的复合函数 $y=\arcsin x^2$ 的定义域是 $[-1,1]$，而不是函数 $u=x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$.

四、基本初等函数

所谓的基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角

函数这五类函数.

1. 幂函数

幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为实数)的定义域应根据 μ 的具体取值来确定,常用的幂函数如表 0-1.

表 0-1

曲线名称	表达式	μ 取值	定义域	值域
抛物线	$y=x^2$	$\mu=2$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$
立方抛物线	$y=x^3$	$\mu=3$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
抛物线	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$\mu=\frac{1}{2}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$
双曲线	$y=x^{-1}$	$\mu=-1$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
半立方抛物线	$y=x^{\frac{3}{2}}$	$\mu=\frac{3}{2}$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$

常用幂函数的图像如图 0-8.

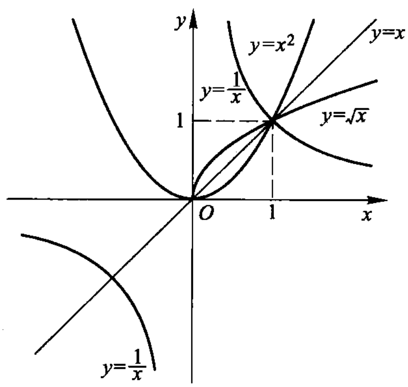


图 0-8

2. 指数函数与对数函数

指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 与对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ **互为反函数**(如表 0-2).

表 0-2

函数名称	表达式	a 的限制	定义域	值域
指数函数	$y=a^x$	$a>0$ 且 $a\neq1$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
对数函数	$y=\log_a x$	$a>0$ 且 $a\neq1$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$

当 $a>1$ 时指数函数与对数函数均为单调增加的函数;当 $0<a<1$ 时,它们均为单调减少的函数.特别地,当取 $a=\mathrm{e}$ 时,上面两个函数分别记为

$$y=\mathrm{e}^x,\quad y=\log_{\mathrm{e}} x=\ln x,$$

这是两个常见函数.

指数函数与对数函数的图像如图 0-9.

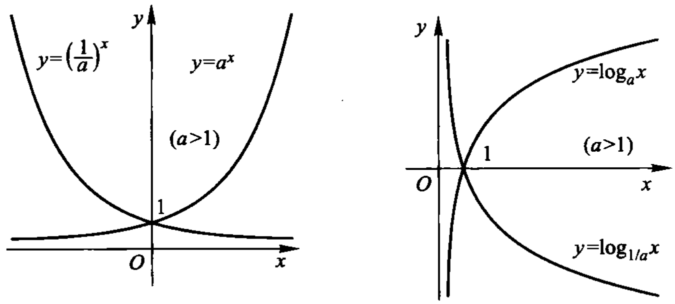


图 0-9

对数函数与指数函数常用的运算性质如下($a>0$ 且 $a\neq 1$):

(1) $a^0=1$;

(2) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$,$\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$,$(a^x)^y=a^{xy}$;

(3) $a^x\cdot b^x=(ab)^x$;

(4) $\log_a 1=0$,$\log_a a=1$;

(5) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$,$\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;

(6) $\log_a x^\lambda=\lambda\log_a x$;

(7) $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$;

(8) $a^{\log_a x}=x$;$\mathrm{e}^{\ln x}=x$.

3. 三角函数与反三角函数

常用三角函数和反三角函数如表 0-3.

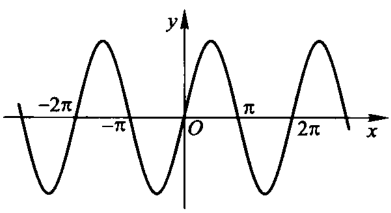
表 0-3

函数名称	表达式	定义域	值域
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$

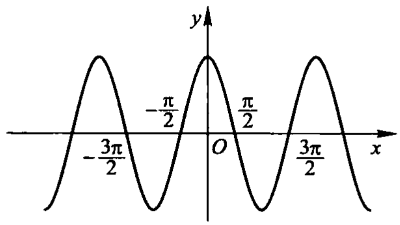
续表

函数名称	表达式	定义域	值域
正切函数	$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$(-\infty,+\infty)$
余切函数	$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$(-\infty,+\infty)$
正割函数	$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
余割函数	$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$

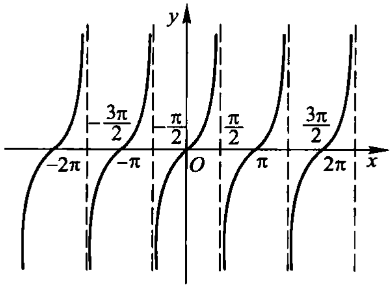
三角函数与反三角函数的图像如图 0 - 10.



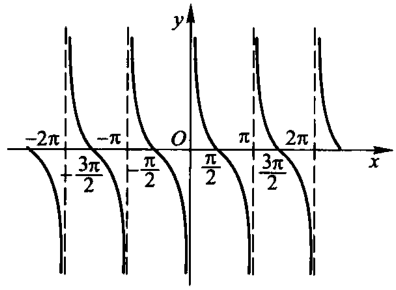
$y=\sin x$



$y=\cos x$



$y=\tan x$



$y=\cot x$