与人教社最新教材同步

特级教师点睛丛书

黄万端 邓均 等编

- 紧扣知识点
- 点拨能力点
- 突破重点
- 解析难点
- 澄清疑点

高一数学

大众文艺出版社

特级教师点睛丛书

高一数学

黄万端　邓　均　童嘉森
吴江媛　刘天华　庞广荣　编

大众文艺出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

特级教师点睛丛书:高一数学/黄万端等编.
-北京:大众文艺出版社,1999.7
ISBN 7-80094-765-3

Ⅰ.特…
Ⅱ.黄…
Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 27086 号

大众文艺出版社出版发行
(北京朝阳区潘家园东里 21 号)
邮编:100021
中国文联印刷厂印刷　新华书店经销
开本 850×1168 毫米 1/32　印张 9.625　字数 264 千字
1999 年 7 月北京第 1 版　1999 年 7 月北京第 1 次印刷
印数 1—10000 册
定　价:10.00 元

前　言

掌握知识、提高能力、开发智力是时代对基础教育的根本要求。要达到这一要求，必须全面开展素质教育。落实素质教育要依据教学大纲、教材，充分发挥课堂主渠道的作用。中学教学本身就是素质教育的有机组成部分。开展素质教育不是要脱离教材，另搞一套，重蹈语录进课堂那样的覆辙，而是要紧密结合教材，自觉将素质教育的内容融入平时的教学之中。

《特级教师点睛丛书》的编写紧扣各科《教学大纲》和《高考考试说明》，依据新的课程计划和教学内容调整意见，是与人教社统编教材配套使用的最新课外读物，是在中学教学中落实素质教育的尝试。

丛书与教材单元同步，每个单元分为“知识点、考点分析与运用”、“重点、难点、疑点突破”、“解题方法与避错指导”、“同步能力检测”四部分。力求帮助同学们处理好在平时学习中普遍感到棘手的“课内与课外”、“知识与能力”、“单项与综合”、“学习与考试”等的关系；注意全面、系统、科学、精要地归纳总结每个单元的知识要点、疑点、难点与考点；结合学生实际，深入浅出地分析解题思路；指出学生容易发生的失误，有针对性地给予避错指津；让学生在掌握了规律和方法后，能够举一反三，从而把学生从题海中解脱出来，变被动应试式学习为主动积极地求知，全面提高自己的素质。

《特级教师点睛丛书》的编写集知识性、科学性、实用性于一体，能帮助同学们学会迅速准确地获取知识，循序渐进地改善自己的知识结构；加深对所学知识的全面理解；训练自己科学简捷地思考问题，言简意赅地解答问题的能力；提高自己对已有知识的运用能力。

为便于高三学生进行高考总复习，高考分册涵盖了高考的全部内容，并进行了深化，体例上作了适当调整，增强了高考总复习的针对性和实用性。

由于编写时间仓促，疏漏错误之处在所难免，诚请专家和广大师生批评指正。

编　者

1999 年 6 月

目　　录

代数部分

立体几何部分

代数部分

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

知识点、考点分析与运用

函数是中学教学中的重点内容，它提供了研究两个变量之间相互依存、相互制约规律的一般理论和基本方法，是高中数学中的一条主线，又是解决许多数学问题的工具．因此它是学好高中数学的基础知识之一．本章主要分成三大部分：预备知识（集合、映射的概念及集合的运算）、函数的一般理论（函数的概念及函数的性质、函数的图像）、几个初等函数（二次函数、幂函数、指数函数和对数函数）．

一、预备知识

（一）集合

1．集合是数学中的一个原始概念，不能用其它更基本的概念来定义它，故又称为不定义概念．构成集合的各个对象叫做集合里的元素，元素可以是任何事物．

2．对于一个确定的集合，它的元素必须具备以下三个特征：

（1）确定性：集合中的任何一个对象，可以通过某种法则来判断它是否属于这个集合，且两者必居其一．

例　“好学生的全体”、“某班的高个子的同学”、“好看的花布”等它们都不能构成集合，因为“好学生”“高个子”“好看”这些标准都很模糊，不具有确定性．而“大于 5 的全体自然数”“某班身高不低于 175cm 的学生”等都是集合．

（2）互异性：在同一个集合里，不能重复出现相同的元素．

例　$\{a,b,c,c,d\}$的写法是错误的，应该写成：$\{a,b,c,d\}$．

(3)无序性：在同一个集合里，元素之间无顺序关系．两个集合只要它们所含的元素完全相同，就是同一个集合．

3. 集合的表示方法

(1)列举法：将集合中的元素一一列举出来，写在大括号{ }内．如：$A=\{a,b,c\}$，$B=\{-5,-2,0,1\}$等；

(2)描述法：把集合中的元素的公共属性用文字或式子按照特定的形式写在大括号{ }内，如：$A=\{10000$以内的质数$\}$，$B=\{x|x^2-3x+5>0\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$等等．

显然，当集合中元素个数不多时列举法显得一目了然，否则用描述法表示才显得比较严谨．

4. 空集

空集是一个数学概念，是不含任何元素的集合用$\varnothing$来表示．例如：求方程$x^2+1=0$的实根，显然此方程无实根，这时此方程实根的集合可以表示为$\varnothing$；又如两条平行直线的公共点的集合也是$\varnothing$．对空集的概念需注意：

(1)空集$\varnothing$与元素0及单元素集合$\{0\}$的区别：$\varnothing$表示不含任何元素的集合，0表示数0，它可以作为集合中的某个元素，而$\{0\}$表示只含有元素0的集合．

(2)$\varnothing$与$\{\varnothing\}$的不同：$\varnothing$是空集，$\{\varnothing\}$表示用空集作元素组成的集合，所以$\varnothing\in\{\varnothing\}$，因为集合中的元素可以是任何事物，当然集合中的元素也可以是集合，例如$M=\{\{0\},\{1\},\varnothing\}$，其中$\{0\}$、$\{1\}$、$\varnothing$就是集合$M$的元素，我们把以集合为元素的集合称为幂集．

5. 子集、交集、并集、补集

对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作$A\subseteq B$；如果A是B的子集，且B中至少有一个元素不属于A，那么称集合A为集合B的真子集，记作$A\subset B$.

这里$A\subseteq B$包含了两种可能，$A=B$或$A\subset B$，显然$A\subseteq B$且$B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$.

由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合叫A、B

的交集，记作 $A\cap B$.

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A、B 的并集，记作 $A\cup B$.

一个集合对于它的一切子集而言称为全集记作 I，若 $A\subseteq I$，I 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合，叫做 A 在 I 中的补集，记作 $\overline{A}$.

课本中不仅用文字给出了它们的定义，还用表达式给予表示．如：

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

$\overline{A}=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$

这些式子中需要注意“且”和“或”，$A\cap B$ 的任何一个元素都是 A、B 的公共元素，所以 $A\cap B$ 必定是 A 与 B 的公共子集．即：$A\cap B\subseteq A$、$A\cap B\subseteq B$. 而 $A\cup B$ 可能成下列三种情况：

(1) $x\in A$ 但 $x\notin B$；(2) $x\in B$ 但 $x\notin A$；(3) $x\in A$ 且 $x\in B$. 因此 $A\cup B$ 是由所有至少属于 A、B 二者之一的元素组成的集合，不难得出：$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

此外还应熟练地掌握它们的主要性质．如：

$C_U(A\cup B)$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　$C_UA\cap C_UB$　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$A\cap\overline{A}=\varnothing$　　　　$A\cup\overline{A}=I$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

例 1　选择题*

$x=\pm1$.　　$ax=1$.

若 $A=\{x\mid x^2-1=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0, a\in R\}$，当 $A\cup B=A$ 时，则 a 的取值的集合为（　　）

$A\supseteq B$

A. $\{1\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{0,-1,1\}$

【解】　由 $A\cup B=A$ 则 $B\subseteq A$

若 $B=\varnothing$ 时，则 $a=0$

若 $B\neq\varnothing$ 时，$a=\pm1$

故应选 D.

* 本书中的选择题是在四个选项中，有且仅有一项是正确的，以后不再逐一说明．

例 2 已知 I 为全集，集合 M、$N\subset I$，若 $M\cap N=N$，则(　　)

A. $\overline{M}\supseteq\overline{N}$　　B. $M\subseteq\overline{N}$　　C. $\overline{M}\subseteq\overline{N}$　　D. $M\supseteq\overline{N}$

【解】 满足 $M\cap N=N$ 的集合 M、N 之间的关系只能是如图1-1中的二种情况：

于是可得 $N\subseteq M$.

仍依图 1-1 不难得到本题应选 C.

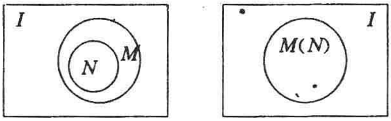

图1-1

$x<3$　$x(x-3)<0$　$x<0$或 $x-3>0$　$x-3<0$　$x>3$

例 3 已知集合 $M=\{a,0\}$，$N=\{x\mid x^2-3x<0, x\in Z\}$，且 $M\cap N=\{1\}$，记 $P=M\cup N$，那么集合 P 的子集为______．

【解】 由 $x^2-3x<0$　得 $0<x<3$ 又 $x\in Z$ 故 $N=\{1,2\}$ 又由 $M=\{a,0\}$　$M\cap N=\{1\}$　可得 $a=1$

$\therefore$　$M=\{1,0\}$　　　$P=\{0,1,2\}$.

因此集合 P 的子集共有 2^3 个，它们是：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$，$\{0,1,2\}$.

【注】 有限集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n\}$ 的子集个数为 2^n 个，真子集的个数为 2^n-1 个．

(二)映射

1. 映射

设 A、B 为二个非空集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做映射，记作 $f:A\rightarrow B$. 如果 A 中的元素 a 对应于 B 中的元素 b，则 b 叫做 a(在法则 f 下)的象，a 叫做原象．

由定义可知，在映射中：(1)集合 A 中的任何一个元素，都要有象，并且要唯一．(2)多个原象可以对应于同一个象．(3)不要求 B 中的每一个元素都有原象．因此，映射是一种特殊的对应，它可以是“一对一”，也可以是“多对一”的对应．

2. 一一映射

设 A、B 为两个非空集合，$f:A\rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 的映射，

且对于 A 中的不同元素，在 B 中有不同的象，且 B 中的每一个元素都有一个原象，那么这种映射叫做从 A 到 B 上的一一映射．

3．逆映射

如果 $f:A\to B$ 是集合 B 上的一一映射，又对于 B 中每一个元素 b 有 A 中原象 a 和它对应，这样所得的映射叫做映射 $f:A\to B$ 的逆映射，记作 $f^{-1}:B\to A$.

这就是说，给定一个集合 A 到集合 B 上的一一映射 $f:A\to B$，存在集合 B 到集合 A 上的一一映射 $f^{-1}:B\to A$. 一一映射 $f:A\to B$ 和 $f^{-1}:B\to A$ 互为逆映射．

例 4 已知集合 A、B 和 A 到 B 的对应 f，判别下列这些对应 f 是不是 A 到 B 的映射？

(1) $A=R$　$B=R$　　$f:x\to y=2x+1$

(2) $A=R$　$B=R^+$　　$f:x\to y=|x|$

(3) $A=Z$　$B=Q$　　$f:x\to 2^x$

【答】 (1)是；　(2)不是；　(3)是．

例 5 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{5,6,7,8\}$，问从集合 A 到集合 B 上的映射有多少个？从集合 A 到集合 B 上的一一映射有多少个？

【解】 从集合 A 到集合 B 上的映射有 $4^4=256$ 个，从集合 A 到集合 B 上的一一映射有 $1\times2\times3\times4=24$ 个．

二、函数的一般理论

(一)函数及其有关概念

1．函数定义

设 A、B 都是非空的数集，f 是从 A 到 B 的一个对应法则．如果 f 是 A 到 B 上的映射，$f:A\to B$ 就叫做 A 到 B 上的函数．记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A$，$y\in B$，原象的集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域，象的集合 B 叫做函数 $f(x)$ 的值域．

对此定义还必须认识到：

(1)映射中的两个集合可以为任何集合(即元素可以为任何对象)，而函数定义中的集合必定是非空数集，因此函数是一种特殊的

映射.

(2)构成一个函数有三个部分，即定义域、值域和从定义域到值域的对应法则．人们称它为构成函数的三要素，如果两个函数的三要素都一样，它们就是同一函数．

(3)上述定义称为函数的近代定义，而初中阶段所学的函数定义是函数的传统定义，利用近代定义对有些函数关系的刻划或解释比较自然妥贴．

例如狄里赫莱函数：

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 为有理数})\\ 0 & (x\text{ 为无理数})\end{cases}$$

是从实数集 R 到数集 $B=\{0,1\}$ 上的一个映射．

(4)要明确 $f(x)$ 与 $f(a)$ 的不同，$f(x)$ 是 x 的函数，它是一个变量，而 $f(a)$ 是表示 $x=a$ 时的函数值，是一个常量．如果 x 为另一个变量大的函数，$x=\varphi(t)$，那么 $f[\varphi(t)]$ 是一个新的函数．

2. 函数定义域的求法

常见函数的定义域的求法如下

设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$

$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0$

函数	定义域
①$y=P(x)$	$x\in R$
②$y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$	使 $P(x)\neq 0$ 的一切实数 x 的集合
③$y=\sqrt[n]{P(x)}$	当 n 为正偶数时使 $P(x)\geqslant 0$ 的一切实数 当 n 为正奇数时 $x\in R$
④$y=a^{P(x)}$　$(0<a\neq 1)$	$x\in R$
⑤$y=\log_aP(x)(0<a\neq 1)$	使 $P(x)>0$ 的一切实数

⑥若 $P(x)$ 有反函数 $P^{-1}(x)$，则 $P^{-1}(x)$ 的值域就是 $P(x)$ 的定义域．

⑦如果一个函数 $f(x)$ 它是由有限个基本初等函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots\cdots f_n(x)$ 按照四则运算复合而成的，那么 $f(x)$ 的定义域是取 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots\cdots f_n(x)$ 的定义域的交集．

⑧如果 $y=f(t)$，$t=g(x)$，那么函数 $y=f[g(x)]$ 称之为由 $y=f(t)$，$t=g(x)$ 复合而成的函数（简称复合函数）. 它的定义域的求法是先求出 $f(t)$ 的定义域，然后使 $g(x)$ 的值域属于 $f(t)$ 的定义域.

例 1 求 $y=\sqrt{1-\sqrt{2-x}}$ 的定义域.

【解】 $\begin{cases}1-\sqrt{2-x}\geqslant 0\\2-x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-x\leqslant 1\\x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 1\\x\leqslant 2\end{cases}$

$\therefore$ 定义域在 $[0,1]$ 上的函数.

例 2 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2-2)$　　　　(2) $f(\sqrt{2x-1}-x)$

【解】 (1) 由 $0\leqslant x^2-2\leqslant 1$ 得 $2\leqslant x^2\leqslant 3$

$\therefore$ $f(x^2-2)$ 的定义域为 $D=[-\sqrt{3},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{3}]$

(2) 由 $0\leqslant\sqrt{2x-1}-x\leqslant 1$ 得 $\begin{cases}\sqrt{2x-1}-x\geqslant 0\\\sqrt{2x-1}-x\leqslant 1\end{cases}$

解得 $x=1$ $\therefore$ 函数 $f(\sqrt{2x-1}-x)$ 的定义域为 $\{1\}$.

⑨对具有具体意义的函数，还需根据它的实际意义来确定它的定义域.

3. 反函数

(1) 定义：如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f:A\to B$ 是一一映射，那么这个映射的逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上我们通常用 x 表示自变量，用 y 来表示函数，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示成 $y=f^{-1}(x)$.

由上述定义我们可以看出：

①对于任何一个函数不一定都有反函数，因为函数关系是一种映射，但未必是一一映射，只有给出的函数是一一映射时，才存在逆映射，才有反函数.

②函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in B$ 与函数 $y=f(x)$，$x\in A$ 互为反函数.

③互为反函数的二个函数，它们的定义域、值域是互换的、对应法则是互逆的.

④互为反函数的二个函数,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2)求反函数的步骤

①解关于 x 的方程 $y=f(x)$ 达到用 y 表示 x 的目的;

②把第一步得到的式子中的 x 换成 y,y 换成 x;

③求出并说明反函数的定义域.(即函数 $y=f(x)$ 的值域).

例 1 求函数 $y=\frac{1-x}{1+x}$ $(x\neq-1)$ 的反函数,并画出它的图像.

【解】 由已知有 $y+yx=1-x$,进而 $x=\frac{1-y}{1+y}$

∴ 原函数的反函数为:

$$y=f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}\ (x\neq-1)$$

可见在定义域 $x\neq-1$ 上它的反函数是它本身.其图像如图 1-2.

例 2 求函数 $y=x^2$ $x\in[-2,0]$的反函数,并画出它的图像.

【解】 ∵ $x\in[-2,0]$

∴函数的值域为 $y\in[0,4]$

又 ∵ $x\leqslant 0$

∵ $x=-\sqrt{y}$ 交换 x、y 得所求函数的反函数为:$y=-\sqrt{x}$ $x\in[0,4]$,其图像如图 1-3 所示.

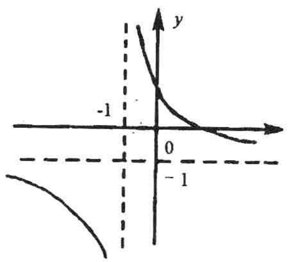

图 1-2

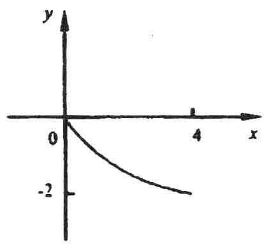

图 1-3

4. 函数值域的求法

(1)观察法; (2)反函数法;

(3)判别式法; (4)图像法;

(5)换元法；　　　　　　(6)配方法；

(7)函数单调性法.

例 3　求函数 $y=\dfrac{5x+3}{2x-3}$ 的值域.

【解法 1】 观察法

$$\because \quad y=\frac{5x+3}{2x-3}=\frac{\frac{5}{2}(2x-3)+\frac{21}{2}}{2x-3}=\frac{5}{2}+\frac{\frac{21}{2}}{2x-3}$$

而 $y_1=\dfrac{\frac{21}{2}}{2x-3}\neq 0$

$$\therefore \quad y=\frac{5}{2}+y_1\neq\frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad y\in\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$$

【解法 2】 反函数法

由 $y=\dfrac{5x+3}{2x-3}$　得　$x=\dfrac{3y+3}{2y-5}$

显然 x 有意义只须 $2y-5\neq 0$　即　$y\neq\dfrac{5}{2}$

$\therefore \quad y\in\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ 为所求.

例 4　求函数 $y=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}$ 的值域.

【解法 1】 观察法

$$\because \quad y=\frac{1}{2x^2-3x+1}=\frac{1}{2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}}$$

且 $2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}\geqslant-\dfrac{1}{8}$　及　$2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}>0$

$\therefore \quad y\leqslant -8$　或　$y>0$

【解法 2】 判别式法

将原式化为 $2yx^2-3yx+y-1=0$

$\because \quad x\in R$　故 $\Delta=9y^2-8y(y-1)\geqslant 0$

即 $y^2+8y\geqslant 0$

$\therefore \quad y\leqslant -8$ 或 $y\geqslant 0$