



海文考研

强化提分

海文考研辅导教材公开出版

2014考研数学

适合数学(一)(二)(三)

高等数学 辅导讲义

万学海文考试研究中心 编

主编 赵达夫

副主编 李 铮 张同斌 苏德矿
铁 军 何先枝 丁 勇

直击考试重点+强化提分+免费超值视频课程

◆ 万学海文强化辅导讲义 **详解版** ◆

- ✓ 权威名师扛鼎力作，理论解题全面突破
- ✓ 知识讲解提纲挈领，重点突出简捷实用
- ✓ 解题思路清晰精妙，一题多解灵活高效
- ✓ 精确提示常见误区，快速提高应试技能



中国时代经济出版社

购正版图书免费赠送：1. 最高可达300元的报名特惠代金券
2. 价值300元的超值网络精品课程学习卡（详见书中彩页）





海文考研



2014考研数学

适合数学(一)(二)(三)

高等数学 辅导讲义

万学海文考试研究中心 编

主编 赵达夫

副主编 李 铮 张同斌 苏德矿
铁 军 何先枝 丁 勇

直击考试重点+强化提分+免费超值视频课程

◆万学海文强化辅导讲义详解版◆



中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学高等数学辅导讲义 / 万学海文考试研究中心编 ; 赵达夫等主编. —北京 : 中国时代经济出版社, 2013.5

ISBN 978-7-5119-1525-2

I. ①考… II. ①万…②赵… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 112105 号

书 名: 考研数学高等数学辅导讲义

作 者: 万学海文考试研究中心

出版发行: 中国时代经济出版社

社 址: 北京市丰台区玉林里 25 号楼

邮政编码: 100069

发行热线: (010)83910203

传 真: (010)83910203

网 址: www.cmepub.com.cn

电子邮箱: zgkdjj@hotmail.com

经 销: 各地新华书店

印 刷: 保定市中画美凯印刷有限公司

开 本: 787×1092 1/16

字 数: 400 千字

印 张: 17.75

版 次: 2013 年 5 月第 1 版

印 次: 2013 年 5 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5119-1525-2

定 价: 40.00 元

本书如有破损、缺页、装订错误,请与本社发行部联系更换
版权所有 侵权必究

万学海文图书编委会

总策划 万学海文考试研究中心

编委会 (以姓氏笔画为序)

丁 勇 叶盛标

邬丽丽 何先枝

张同斌 李 铮

苏德矿 张震峰

赵达夫 铁 军

本书编委会

马 媛 向定锋 朱 杰

吴志雄 张全军 张 燕

张 璐 李光华 李兰巧

李家雄 谷存昌 徐 婕

诸炜鑫 郭孝龙 绪玉珍

筵丽霞 赖邦城

内 容 简 介

本书是工学类、经济类和管理学类硕士研究生入学考试科目“高等数学(微积分)”的复习指导书。本书作者多年来一直参加有关考研数学试卷的阅卷和考研辅导班的教学工作,具有丰富的教学经验,深知考生的疑难与困惑。作者把自己的教学经验结合考生与考试的实际情况加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大读者,旨在提高考研者的数学水平与考试成绩。

本书紧扣数学考试大纲,贴近考试实际要求,内容丰富。全书共分为十章,内容包括:函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数和空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,微分方程,微积分在经济中的应用,差分方程及附录(综合练习题)。本书结构新颖,每一章按照本章的重点内容与常见的典型题型,基本概念、性质、公式和定理,习题,习题的解答与分析四部分编写。概念叙述简捷,解题思路清晰,对典型题目从多个侧面、不同角度、用多种解法进行讲解,注意对考生理解基本概念、求解多种类型基础题目和综合解题能力的培养,是考研者较好科目的复习指导书和良师益友。

本书可作为全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学二、数学三的“高等数学(微积分)”科目的复习指导书(对于仅针对数学一至三个别卷种适用的章节和题目,书中分别以上标“①”“②”“③”表示),对于在校的大学生、大专生及自学考试者,本书也是一本较好的学习参考用书。

编 者

2013 年 5 月

前言

为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生在较短的时间内全面、系统地复习高等数学的内容,编者根据教育部制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的有关要求,结合编者多年参加考研数学及有关考试的命题、阅卷和辅导所积累的经验,编写了《考研数学高等数学辅导讲义》。

《考研数学高等数学辅导讲义》一书是作者在多年来全国各地考研辅导班讲课的基础上整理而成的。本书自出版、修订八年多来,深受全国广大考生的好评和厚爱,受到专家同行的肯定,认为本书在编写体例上有“特色”,在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂,较适合考生的需要。本书每一章由以下四部分构成:

一、本章的重点内容与常见的典型题型。编写这部分编者的目的是使广大考生明确每一章重点考的内容是什么,需掌握到什么程度。在编写过程中,编者根据多年来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结,便于广大考生正确地把握考试要求。

二、基本概念、性质、公式和定理。根据考试大纲的要求,将概念、性质、公式和定理进行简明扼要的叙述、归纳、总结和解析,同时指出考生在运用基本概念、性质、公式和定理等知识点时应注意的事项,以加深考生对概念、性质、公式和定理等重要内容的理解和正确应用;通过对历年试题的归类分析,总结各章的常见典型题型,使考生能够在较短时间内清楚地了解重点、难点、热点问题,在考试时能够拿得出、用得着,这也是本书区别于其他考研辅导书的一大特点。

三、习题。分为填空题、选择题、解答题。每题在内容上均采用全优化设计,涉及两个以上知识点,题型新颖、重点类型突出,几乎涵盖最新大纲的所有考查知识点。相信通过这些试题的训练,考生分析问题和解决问题的能力一定会迅速提高。

四、习题的解答与分析。几乎每道题都有:分析——该题的解题思路和解题步骤、方法;解答——该题的详细、规范解题过程;评注——该题所考查的知识点(或命题意图),解题思路归纳总结和延伸,常见错误和注意事项。同时,在解题过程中,力求一题多解,拓展考生的视野和思路,比较各种解题方法的特点和适用范围,从而提高考生的应试水平。

本书最后提供四套综合练习题,每套题都有详尽的分析、解答。建议考生根据各卷种数学考试大纲要求,有选择地做题,考查自己复习的效果。

本书可作为参加全国硕士研究生入学考试数学一至数学三考生的复习指导书,对于在校的大学生、大专生及自学考试者,本书也是较好的学习参考书。

北京交通大学的阿荣老师、刘晓老师、龚漫奇老师为本书的编写和校对付出了辛勤劳动,在此一并表示感谢。

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者批评指正。

编者

2013年5月

万学海文图书邮购目录

序号	书 名	开本	定价	作者	出版时间	出版社
考研思想政治理论系列						
1	《考研早班车——整体规划及政治理论主干知识》	32 开	23.8 元	梁伟伟、赵宇、金柳安、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
2	《考研思想政治理论真题穿越》	16 开	38.50 元	赵宇、王瑞领、金柳安、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
3	《考研思想政治理论真题全解全析》	16 开	35 元	张子见、井宇虹、郭继承、金柳安	已出版	中国时代经济出版社
4	《考研思想政治理论红宝书梯度题集》	16 开	46 元	张子见、井宇虹、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
5	《考研思想政治理论红宝书考点巧解》	16 开	49 元	赵宇、井宇虹、郭继承	已出版	中国时代经济出版社
6	《考研思想政治理论形势与政策暨热点解读》	32 开	拟 18 元	万学海文名师	2013.10	中国时代经济出版社
7	《考研思想政治理论随身宝——速记周计划》	64 开	拟 18 元	张子见、井宇虹、郭继承	2013.10	中国时代经济出版社
8	《考研思想政治理论冲刺大串讲》	32 开	拟 28 元	赵宇、井宇虹、郭继承	2013.11	中国时代经济出版社
9	《考研思想政治理论点题预测》	32 开	拟 18 元	赵宇、井宇虹、郭继承、金柳安	2013.11	中国时代经济出版社
10	《考研思想政治理论最后成功 5 套卷及 18 金鉴》	8 开+16 开	拟 28 元	张子见、井宇虹、郭继承、金柳安	2013.11	中国时代经济出版社
考研英语系列						
11	《考研英语写作高分进阶》(英语一、二)	16 开	32 元	付博	已出版	中国时代经济出版社
12	《考研英语新大纲核心词汇大全》(便携版)	64 开	18.80 元	李伟、吴本文	已出版	中国时代经济出版社
13	《考研英语分级词汇记忆宝典·周计划》 (核心级+拔高级+基础级)	16 开	49.80 元	李伟、吴本文	已出版	中国时代经济出版社
14	《考研英语基础综合手册——语法·阅读·写作·词汇》	16 开	45 元	吴本文、毛利锋	已出版	中国时代经济出版社
15	《考研英语二复习指南+模拟真题》	16 开	49 元	周冰、蒋华	已出版	中国时代经济出版社
16	《考研英语历年真题超详解》	16 开	49 元	吴耀武	已出版	中国时代经济出版社
17	《考研英语历年真题来源报刊阅读 120 篇》	16 开	拟 48 元	钟平	2013.07	中国时代经济出版社
18	《考研英语必背范文 30 篇》(便携版)	64 开	拟 18 元	付博	2013.07	中国时代经济出版社
19	《考研英语阅读思路标准解读》	16 开	拟 45 元	吴耀武	2013.09	中国时代经济出版社
20	《考研英语易混常考词汇辨析手册》	16 开	拟 35 元	万学海文名师	2013.09	中国时代经济出版社
21	《考研英语最后成功五套题》(英语一)	8 开	拟 22 元	万学海文名师	2013.09	中国时代经济出版社
考研数学系列						
22	《考研数学概率论与数理统计基础教材》	16 开	28 元	张震峰	已出版	中国时代经济出版社
23	《考研数学基础必做 880 题》	16 开	42 元	张同斌、邹丽丽、丁勇	已出版	中国时代经济出版社
24	《考研数学高等数学基础教材》	16 开	42 元	李铮	已出版	中国时代经济出版社
25	《考研数学线性代数基础教材》	16 开	30 元	铁军	已出版	中国时代经济出版社
26	《考研数学真题大解析》(数学一)	16 开	39.80 元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社
27	《考研数学真题大解析》(数学二)	16 开	39.80 元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社

序号	书 名	开本	定价	作者	出版时间	出版社
28	《考研数学真题大解析》(数学三)	16 开	39.80 元	何先枝	已出版	中国时代经济出版社
29	《考研数学高等数学辅导讲义》	16 开	40 元	赵达夫 等	已出版	中国时代经济出版社
30	《考研数学线性代数辅导讲义》	16 开	28 元	铁军 等	已出版	中国时代经济出版社
31	《考研数学概率论与数理统计辅导讲义》	16 开	18 元	叶盛标 等	已出版	中国时代经济出版社
32	《考研数学强化必做 660 题》	16 开	拟 42 元	何先枝、铁军	2013.06	中国时代经济出版社
33	《考研数学强化复习全书》(数学一)	16 开	拟 50 元	苏德矿、李铮、铁军、张震峰	2013.09	中国时代经济出版社
34	《考研数学强化复习全书》(数学二)	16 开	拟 42 元	苏德矿、李铮、铁军	2013.09	中国时代经济出版社
35	《考研数学强化复习全书》(数学三)	16 开	拟 50 元	苏德矿、李铮、铁军、张震峰	2013.09	中国时代经济出版社
36	《考研数学考点归纳及最后成功 150 题》	16 开	拟 22 元	叶盛标	2013.09	中国时代经济出版社

网址: www.wanxue.cn <http://shop.wanxue.cn>

电话: 010-82487358 传真: 010-82487450

地址: 北京市海淀区北四环西路 66 号中国技术交易大厦 A 座 17 层

邮编: 100080

郑重声明

本书版权属于北京万学教育科技有限公司所有, 违者必究!

读者意见调查表

亲爱的读者：

您好！非常感谢您对万学海文图书的信赖与支持。您的这份肯定将激励我们出版更多更好的精品图书。为充分了解您对考研数学图书的需求，以便今后为您提供更贴切、更优质、适用性更强的辅导书，万学海文图书部特推出读者意见有奖调查活动，请您抽出宝贵时间填写以下调查表。

万学海文图书拥有业内最多优异一线名师作者资源，汇集当前各个学科领域顶尖权威专家学者，紧密围绕教学考试要求，出版考研辅导各系列图书，编写体例与内容适用性最强，每一本都堪称权威精品。

为感谢您对我们的支持，我们将对反馈信息进行随机抽奖活动，每一位中奖者，我们都有精美礼品随之奉上！期待您的参与，再次感谢！

来信请寄：

1 0 0 0 8 0

北京市海淀区北四环西路 66 号中国技术交易大厦 A 座 17 层
万学海文图书部(收)

《考研数学高等数学辅导讲义》

① 姓名 _____ 年龄 _____ 职业 _____ 教育背景 _____

② 本科专业 _____ 拟报考专业 _____

③ 通讯地址 _____ 邮编 _____

④ 联系电话 _____ E-mail/ QQ _____

1. 您认为自己的数学基础：

☐ 好 ☐ 一般 ☐ 不好

2. 您是通过哪种渠道得知本书的？

☐ 辅导班推荐 ☐ 在书店看到 ☐ 朋友推荐 ☐ 老师推荐

☐ 网上宣传 ☐ 其他方式 _____

3. 您是如何得到本书的？

☐ 辅导班购买 ☐ 书店购买 ☐ 万学网店 ☐ 网上书店 _____

☐ 报名赠送 ☐ 其他方式 _____

4. 影响您购买此书的原因有(可多选):

- | | | | |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| ☐ 万学海文品牌 | ☐ 图书作者 | ☐ 图书价格 | ☐ 编排结构 |
| ☐ 内容质量 | ☐ 封面设计 | ☐ 广告宣传 | ☐ 网上书评 |
| ☐ 其他_____ | | | |

5. 您认为本书的优点为(可多选):

- | | | | |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| ☐ 体例完备 | ☐ 内容全面 | ☐ 紧扣大纲 | ☐ 难度适中 |
| ☐ 题量适中 | ☐ 封面美观 | ☐ 版式清晰 | ☐ 印刷精美 |
| ☐ 其他_____ | | | |

6. 您认为本书在哪些方面还有待改进(可多选):

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| ☐ 结构安排 | ☐ 内容质量 | ☐ 难易程度 | ☐ 习题数量 |
| ☐ 封面设计 | ☐ 版式设计 | ☐ 印刷质量 | ☐ 其他_____ |

7. 请问您还需要哪些方面的考研数学辅导资料(可多选):

- | | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| ☐ 讲义类 | ☐ 题集类 | ☐ 方法类 | ☐ 手册类 |
| ☐ 大纲解读类 | ☐ 重点题型类 | ☐ 真题类 | ☐ 模拟题类 |
| ☐ 其他_____ | | | |

8. 请问您在购买考研数学辅导图书、资料时,主要考虑的因素有(可多选):

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| ☐ 内容质量 | ☐ 图书定价 | ☐ 作者名气 | ☐ 出版社影响力 |
| ☐ 图书设计 | ☐ 网络评价 | ☐ 他人推荐 | ☐ 其他_____ |

9. 请问您会将本书推荐给:

- | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| ☐ 5人以上 | ☐ 4~5人 | ☐ 2~3人 | ☐ 1人 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|

10. 您所知道的同类考研数学图书有:

11. 您对万学海文图书的其他意见和建议(可另附页)

更多考研资讯,请关注:

万学教育网址:<http://www.wanxue.cn>

图书频道:<http://kaoyan.wanxue.cn/book>

编辑部博客:<http://blog.sina.com.cn/uegbook>

编辑部微博:[@海文考研图书](http://weibo.com/uegbook)

[@海文考研图书](http://t.qq.com/uegbook)

图书增值 YY 频道:46769000

发行部 QQ:19777181

目 录

第一章 函数、极限与连续	(1)
一、本章的重点内容与常见的典型题型	(1)
二、基本概念、性质、公式和定理	(1)
三、习题	(5)
四、习题的解答与分析	(8)
第二章 一元函数微分学	(27)
一、本章的重点内容与常见的典型题型	(27)
二、基本概念、性质、公式和定理	(27)
三、习题	(31)
四、习题的解答与分析	(35)
第三章 一元函数积分学	(54)
一、本章的重点内容与常见的典型题型	(54)
二、基本概念、性质、公式和定理	(54)
三、习题	(62)
四、习题的解答与分析	(66)
第四章 向量代数和空间解析几何	(86)
一、本章的重点内容与常见的典型题型	(86)
二、基本概念、性质、公式和定理	(86)
三、习题	(89)
四、习题的解答与分析	(90)
第五章 多元函数微分学	(95)
一、本章的重点内容与常见的典型题型	(95)
二、基本概念、性质、公式和定理	(95)
三、习题	(100)
四、习题的解答与分析	(102)
第六章 多元函数积分学	(112)
一、本章的重点内容与常见的典型题型	(112)
二、基本概念、性质、公式和定理	(112)
三、习题	(122)
四、习题的解答与分析	(126)
第七章 无穷级数	(145)
一、本章的重点内容与常见的典型题型	(145)
二、基本概念、性质、公式和定理	(145)
三、习题	(153)
四、习题的解答与分析	(158)

第八章 微分方程	(175)
一、本章的重点内容与常见的典型题型	(175)
二、基本概念、性质、公式和定理	(175)
三、习题	(178)
四、习题的解答与分析	(181)
第九章 微积分在经济中的应用	(193)
一、概念与公式	(193)
二、习题	(194)
三、习题的解答与分析	(195)
第十章 差分方程	(200)
一、基本概念	(200)
二、一阶常系数线性差分方程	(200)
三、习题	(201)
四、习题的解答与分析	(202)
附录 1: 综合练习题及参考答案	(204)
综合练习题一	(204)
综合练习题一解答	(206)
综合练习题二	(211)
综合练习题二解答	(213)
综合练习题三	(219)
综合练习题三解答	(221)
综合练习题四	(228)
综合练习题四解答	(230)
附录 2: 2011、2012、2013 年全国硕士研究生入学考试数学试题中高等数学部分	
试题及答案	(236)
2011 年考研数学一高等数学试题及答案	(236)
2011 年考研数学二高等数学试题及答案	(240)
2011 年考研数学三微积分试题及答案	(246)
2012 年考研数学一高等数学试题及答案	(249)
2012 年考研数学二高等数学试题及答案	(253)
2012 年考研数学三微积分试题及答案	(258)
2013 年考研数学一高等数学试题及答案	(261)
2013 年考研数学二高等数学试题及答案	(264)
2013 年考研数学三微积分试题及答案	(268)

第一章 函数、极限与连续

一、本章的重点内容与常见的典型题型

本章的重点内容是极限,考生既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件,又要能正确求出各种极限.

1. 求极限的方法很多,在考试中常用的主要方法有:

- (1) 利用极限的四则运算法则及函数的连续性;
- (2) 利用两个重要极限,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

- (3) 利用洛必达法则及泰勒公式求未定式的极限;
- (4) 利用等价无穷小替换(常会使运算简化);
- (5) 利用夹逼定理;
- (6) 先证明数列的极限存在(通常会用到“单调有界数列必有极限”的准则),再利用关系式求出极限;
- (7) 利用定积分求某些和式的极限;
- (8) 利用导数的定义;
- (9) 利用级数的收敛性证明数列的极限为零.

这里需要指出的是:题型与方法并不具有确定的关系,一种题型可以有几种计算的方法,一种方法也可能适用于几种题型,有时在一个题目中要用到几种方法,所以还要具体问题具体分析,灵活运用解题方法.

2. 由于函数的连续性是通过极限定义的,所以判断函数是否连续、判断函数的间断点类型等问题本质上仍是求极限,因此这部分内容也是重点.

3. 函数这一部分,重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.

通过对历年试题归类分析,本章常见的典型题型有:

1. 直接计算函数的极限值或给定函数极限值求函数表示式中的常数;
2. 讨论函数的连续性,判断间断点的类型;
3. 无穷小的比较;
4. 讨论连续函数在给定区间的零点,或讨论方程在给定区间有无实根;
5. 求分段函数的复合函数.

二、基本概念、性质、公式和定理

(一) 函数

1. 定义 1.1 设 x 与 y 是两个变量, D 是实数集的某个子集,若对于 D 中的每个值 x , 变量 y 按照一定的法则有一个确定的值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作

$$y = f(x).$$

数集 D 称为函数的定义域,由函数对应法则或实际问题的要求来确定. 相应的函数值的全体称为函数的值域. 对应法则和定义域是函数的两个要素.

2. 几种特性

(1) 有界性 设函数 $y = f(x)$ 在数集 X 上有定义, 若存在正数 M , 使得对于每一个 $x \in X$, 都有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 称 $f(x)$ 在 X 上有界, 否则, 即不存在这样的 M , 称 $f(x)$ 在 X 上无界. 即: 函数在 X 上无界, 是对任意 $M > 0$, 总存在 $x_0 \in X$, 使 $|f(x_0)| > M$.

(2) 单调性 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2 , 且 $x_1 < x_2$ 时, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$ [或 $f(x_1) > f(x_2)$], 称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少). 如果其中的“ $<$ ”(或“ $>$ ”)改为“ $\leq$ ”(或“ $\geq$ ”), 称函数 $f(x)$ 在 I 上单调不减(或单调不减).

(3) 奇偶性 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-a, a)$ ($a > 0$), 若对于任一 $x \in (-a, a)$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 为偶函数, 如常数 $C, x^2, \cos x$ 等, 其图形关于 y 轴对称; 若对于任一 $x \in (-a, a)$ 都有 $f(-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 为奇函数, 如 $x, x^3, \sin x$ 等, 其图形关于坐标原点对称.

(4) 周期性 对函数 $y = f(x)$, 若存在常数 $T > 0$, 使得对于定义域内的每一个 $x, x + T$ 仍在定义域内, 且有 $f(x + T) = f(x)$, 称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 复合函数、反函数、隐函数与分段函数

(1) 复合函数 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若集合 D_f 与 Z_φ 的交集非空, 称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, u 为中间变量. 对复合函数, 重要的是会把它分解, 即知道它是由哪些“简单”函数复合而成的.

(2) 反函数 设函数 $y = f(x)$ 的值域为 Z_f , 定义域为 D_f , 则对于每一个 $y \in Z_f$, 必存在 $x \in D_f$ 使 $y = f(x)$. 若把 y 作为自变量, x 作为因变量, 便得一个函数 $x = \varphi(y)$, 且 $f[\varphi(y)] = y$, 称 $x = \varphi(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数. 但习惯上把 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = \varphi(x)$. $y = f(x)$ 与其反函数 $y = \varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的.

(3) 隐函数 设有方程 $F(x, y) = 0$, 若当 x 在某区间内取任一值, 便总有满足该方程唯一的值 y 存在, 称由方程 $F(x, y) = 0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y = y(x)$.

(4) 分段函数 若一个函数在其定义域的不同部分要用不同的式子表示其对应规律, 如
$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & a < x < b, \\ \psi(x), & c < x < d, \end{cases}$$
 则称为分段函数.

(二) 极限

1. 概念

(1) 定义 1.2 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域 $(x_0 - \delta_1, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_1)$ 内有定义, 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当上述去心邻域内任意 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 不等式 $|f(x) - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 a 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 或 $f(x) \rightarrow a$ (当 $x \rightarrow x_0$). 直观地说, 即当 x 无限趋近 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近常数 a .

定义 1.3 设 $f(x)$ 在区域 $|x| > E > 0$ 内有定义, 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得当 $|x| > M \geq E$ 时, 不等式 $|f(x) - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称 a 为当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. 直观地说, 即当 $|x|$ 无限增大时, 函数无限趋近常数 a .

(2) 左极限与右极限 在定义 1.2 中, 若把“ $0 < |x - x_0| < \delta$ ”改为“ $x_0 - \delta < x < x_0$ ”, 即自变量 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0 , 则称 a 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ 或 $f(x_0 - 0) = a$; 相应把定义 1.2 中的“ $0 < |x - x_0| < \delta$ ”改为“ $x_0 < x < x_0 + \delta$ ”, a 便是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ 或 $f(x_0 + 0) = a$.

极限存在的充分必要条件: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件为其左、右极限存在并相等, 即 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

在定义 1.3 中, 把 $|x| > M$ 改为 $x > M$, 便得到 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$; 把“ $|x| > M$ ”改为 $x < -M$, 便得到 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ 的定义.

注 把数列 $\{x_n\}$ 看作整标函数, 即 $x_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 则数列极限的概念 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 便是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 的极限的特殊情况: 自变量 x 取正整数. 即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立, 则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 也称此数列收敛于 a .



2. 性质

(1) 唯一性 在自变量的一个变化过程中($x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$), 若函数的极限存在, 则此极限唯一.

(2) 有界性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$), 则存在 x_0 的某去心邻域 (或 $|x| > M > 0$),

$f(x)$ 在此邻域 (或 $|x| > M > 0$) 内有界.

(3) 保序性 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 若 $a < b$, 则存在 x_0 的某去心邻域 (或

$|x| > M > 0$), 在此邻域 (或 $|x| > M > 0$) 内恒有 $f(x) < g(x)$; 若在 x_0 的某去心邻域 (或 $|x| > M > 0$) 内恒有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $a \leq b$.

3. 极限存在准则

夹逼准则: 若在 x_0 的某去心邻域 (或 $|x| > M > 0$) 内, 恒有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

单调有界准则: 单调有界数列必收敛.

4. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

5. 极限的四则运算

设在自变量的同一变化过程中($x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$), $\lim f(x) = a$, $\lim g(x) = b$, 则有

(1) 和差: $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = a \pm b$.

(2) 积: $\lim[f(x)g(x)] = [\lim f(x)] \cdot [\lim g(x)] = a \cdot b$, 特别地, $\lim cf(x) = c \lim f(x) = ca$ (其中 c 为常数), $\lim[f(x)]^k = [\lim f(x)]^k = a^k$ (其中 k 为正整数).

(3) 商: 若 $\lim g(x) = b \neq 0$, 则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{a}{b}$.

6. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的概念 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 称 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时的无穷小, 即极限为 0 的

变量为无穷小. 常数 0 也是无穷小.

(2) 无穷小的性质 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ 的充分必要条件为 $f(x) = a \pm \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$

($x \rightarrow \infty$) 的无穷小.

(3) 无穷小的运算

① 加法: 有限多个无穷小的和仍为无穷小;

② 乘法: 有限多个无穷小的积仍为无穷小;

③ 有界变量与无穷小的乘积亦为无穷小.

(4) 无穷小的比较

设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小, 且 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也是在此变化过程中的极限:

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小;

若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$ (其中 c 为常数), 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小;

特别地, 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

在求极限的过程中, 有时利用等价无穷小代换可以简化计算, 所以考生应掌握几个常见的等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x \sim \tan x,$$

$$\begin{aligned}
 \ln(1+x) &\sim x, \\
 e^x - 1 &\sim x, \\
 \sqrt[n]{1+x} - 1 &\sim \frac{1}{n}x, \\
 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2
 \end{aligned}$$

.....

(5) 无穷大的概念 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$, 称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0 (x \rightarrow \infty)$ 时的无穷大, 即绝对值无限增大的变量为无穷大.

(6) 无穷小与无穷大之间的关系

在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大, 则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷小; 反之, 若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 必为无穷大.

(三) 连续

1. 函数的连续性

(1) 连续性的概念 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若当自变量增量 $\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0$ 时, 对应的函数值增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow 0$, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

显然, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的每一处都连续, 称 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 也称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的连续函数; 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 又在 a 点处右连续, b 点处左连续, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

(2) 运算

① 加法: 有限多个在同一点处连续的函数之和, 仍在该点处连续;

② 乘法: 有限多个在同一点处连续的函数之积, 仍在该点处连续;

③ 除法: 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续, 且 $g(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处连续.

(3) 复合函数与初等函数的连续性

设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 若函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

一切初等函数在其定义区间上都是连续的.

2. 函数的间断点

(1) 函数间断点的概念 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点. 因此, 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义; 或 $f(x)$ 在 x_0 处虽有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在; 或虽然 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 也存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 此时 x_0 便为函数 $y = f(x)$ 的一个间断点.

(2) 函数间断点的类型 设 $x = x_0$ 为函数 $y = f(x)$ 的间断点, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点, 其他均称为第二类间断点.

在第一类间断点中, 左、右极限相等的称为可去间断点, 不相等的称为跳跃间断点; 无穷间断点与振荡间断点都是第二类间断点.

3. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理 闭区间上的连续函数一定有最大值与最小值.

(2) 有界性定理 闭区间上的连续函数在该闭区间上一定有界.

(3) 介值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一常数 C , 在开区间 (a, b) 内必然至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

(4) 零点定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则在开区间 (a, b) 内

至少存在函数 $f(x)$ 的一个零点,即至少有一点 $\xi \in (a, b)$,使 $f(\xi) = 0$.

三、习 题

(一) 选择题

1. 设 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是().
(A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.
2. 函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln(1+x) \cdot \arctan \frac{1}{x-1} \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$ 在下列哪个区间内无界().
(A) $(-1, 0)$. (B) $(0, 1)$. (C) $(1, 2)$. (D) $(2, 3)$.
3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 并满足 $f(x) = -f(-x)$, 且 $f(x) = f(x+1)$. 若 $f'(1) > 0$, 则().
(A) $f''(-5) \leq f'(-5) \leq f(-5)$. (B) $f(5) = f''(-5) < f'(-5)$.
(C) $f'(-5) \leq f(-5) \leq f''(-5)$. (D) $f(-5) < f'(-5) = f''(-5)$.
4. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是().
(A) 2. (B) 0.
(C) ∞ . (D) 不存在但不为 ∞ .
5. 设函数 $f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$, $g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的().
(A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.
(C) 等价无穷小. (D) 同阶但不等价的无穷小.
6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则().
(A) $a = \frac{1}{2}, b = 1$. (B) $a = 1, b = 1$.
(C) $a = -\frac{1}{2}, b = 1$. (D) $a = -1, b = 1$.
7. 将 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^x \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是().
(A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .
8. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小阶数最高的是().
(A) $\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$. (B) $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$.
(C) $x - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x\right)\sin x$. (D) $e^{x^4-x} - 1$.
9. 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为().
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
10. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().
(A) 极限不存在. (B) 极限存在, 但不连续.
(C) 连续, 但不可导. (D) 可导.
11. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \ln(1+x^3) \sin \frac{1}{x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x \sin t^2 dt, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().
(A) 极限不存在. (B) 极限存在, 但不连续.
(C) 连续, 但不可导. (D) 可导.