21世纪独立本科院校规划教材

大学数学教程

微积分（上册）

南京大学金陵学院　陈　仲　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

大学数学教程

微积分(上册)

陈　仲　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是普通高校“独立学院”本科理工类专业“大学数学”课程的教材. 全书有三册:《微积分(上册)》,包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章;《微积分(下册)》,包含多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数等四章;《微分方程与线性代数》,包含常微分方程、行列式与矩阵、向量与线性方程组、特征值问题与二次型、线性空间与线性变换等五章.

本书在深度和广度上符合教育部审定的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”,并参照教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》中数学一与数学二的知识范围. 编写的立足点是基础与应用并重,注重数学的思想和方法,注重几何背景和实际意义,部分内容有更新与优化,并适当地渗透现代数学思想,适合独立学院培养高素质应用型人才的目标.

本书结构严谨,难易适度,语言简洁,可作为独立学院、二级学院“大学数学”课程的教材,也可作为科技工作者自学“大学数学”的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上册) / 陈仲编著. —南京:东南大学出版社,2013. 6

ISBN 978 - 7 - 5641 - 4271 - 1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 107096 号

微积分(上册)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(办公电话:025 - 83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	18.25
字　　数	358 千字
版　　次	2013 年 6 月第 1 版
印　　次	2013 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN　978 - 7 - 5641 - 4271 - 1
定　　价	35.00 元

本社图书若有印装质量问题,请直接与营销部联系,电话:025 - 83791830。

前言

在高等教育办学体制深化改革的大好形势下，高等教育的新模式“独立学院”应运而生．一流大学搞科研，培养研究型人才；高职高专学技术，培养技能型人才．依托一流名校的独立学院的培养目标是培养高素质的具有创新精神的应用型人才．高素质的应用型人才，是既要动手又能动脑，既能实践又能设计，既会应用又懂原理的高素质的、深受社会和大企业欢迎的人才．认清这个培养目标，对我们编写独立学院理工类“大学数学”课程的教材具有指导意义．

可以说，数学是科学的“语言”，是学习一切自然科学的“钥匙”，数学素养已成为衡量一个国家科技水平的重要标志．独立学院理工类“大学数学”课程，是培养应用型人才的重要的必修课，它不同于综合性大学理工类的“大学数学”，也不同于一般高职高专院校理工类的“大学数学”．我们编写“大学数学教程”的立足点是基础与应用并重，以提高数学素养为总目标．

编者在南京大学从事理一类“大学数学”课程教学与教材建设 20 多年；2004 年至今在南京大学金陵学院（独立学院）讲授理一类“大学数学”课程，同时进行该课程的教材建设．

在基础与应用并重的思想指导下，我们对原有“大学数学”课程的教学内容进行全面筛选和优化，带着问题开展教学研究，编写教材与教学实践密切结合，在实践中编写，编写后再请教学团队实践，广泛征求意见，多次修改，期待完善．在编写过程中，努力做到：

(1) 在深度和广度上符合国家教育部审定的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”，并参照国家教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》中数学一与数学二的知识范围．在独立学院中，有大约 20% 的优等生，他们因为高考失手，没有考上理想的高校，进入独立学院后，他们发奋努力，力志考研．我们编写教材时在深度上不可能为他们考虑太多，但在广度上我们应尽可能达到考研的知识范围．

(2) 注重数学的思想和方法，适当地渗透现代数学思想，运用部分近代数学的术语与符号，以求符合独立学院培养高素质应用型人才的目标．我们的教学对象是独立学院中对“大学数学”要求相对较高的理工科专业，其教学任务除使学生获得“大学数学”的基本概念、基本理论和基本方法外，还要使学生受到一定的科学训

练，学到数学思想方法，提高逻辑推理能力，为学生学习后继课程提供必要的数学基础，为学生大学毕业后胜任工作或继续深造积累潜在的能力.本书将极限作为微积分学的理论基础，注重极限概念和将它作为微积分基本方法的应用.又如，本书将定积分、重积分、曲线积分、曲面积分等所有积分的定义规范化，统一使用“分割取近似，求和取极限”的语言叙述，让学生充分认识数学逼近的思想，了解各种类型积分的内在联系.

(3) 通过教学研究，将一些经典定理、公式的结论或证明加以更新与优化，既改革了教学内容，又丰富了微积分学的内涵.例如定积分中值定理的结论，大部分教材都写为“$\exists\xi\in[a,b]$，使得……”.这个结论是不完美的，本书将其结论改进为“$\exists\xi\in(a,b)$，使得……”，这一改进加深了学生对连续函数的保号性和介值定理的理解，同时使得许多有关中值定理的应用题的证明大为简化.又如反常积分的计算，我们依据著名的“牛顿-莱布尼茨公式”，提出“广义牛顿-莱布尼茨公式”、“广义分部积分公式”等计算方法，并对定积分与反常积分这两种含义完全不同的积分作深入研究，指出它们之间还可以相互转化.再如著名的“泰勒公式”，一般教材都采用逐次应用柯西中值定理去证明，本书采用构造辅助函数的方法，应用罗尔定理证明，技术含量大为增加，有助于对学生数学思维的训练.又如二元函数极值的充分判别法，所有教材只讲授利用二阶偏导数判别的法则，本书很有特色地增加了利用一阶偏导数判别的法则，使得一些用原有法则不能判别的问题得到了解决.

(4) 对于基本概念和重要定理注重几何背景和实际意义的介绍；对重要的、比较难理解的命题尽量给出几何解释；选编和设计了一些具有启发性和应用性的例题和习题，让学生对“大学数学”的内容能有较好的理解，提高综合应用所学知识分析问题和解决问题的能力.例如，在函数极限的 ε-δ 定义中，本书除介绍一般教材使用的放缩法外，重点介绍了运用几何图形寻求 δ 的方法，比较简单和直观，让学生从几何上理解函数极限的定义.又如用几何方法定义凹凸性，并对凹凸性深入讨论，证明传统定义与几何定义的等价性，证明凹凸性的几种几何特性.

我们的目标是结构严谨、难易适度、语言简洁、适合培养目标、贴近教学实际、便于教与学.

本书分三册，即《微积分(上册)》、《微积分(下册)》和《微分方程与线性代数》.《微积分(上册)》包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章；《微积分(下册)》包含多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数等四章；《微分方程与线性代数》包含常微分方程、行列式与矩阵、向量与线性方程组、特征值问题与二次型、线性空间与线性变换等五章.对“大学数学”要求较高的系科、专业，如通信、电子科学、机械电子、计算机、软件、网络等，本书可分三个学期讲授(参照全国考研大纲中数学一的知识范围)，第一学期每周 6 学时，共 84 学时，讲授《微积分(上册)》；第二学期每周 6 学时，共 90

学时，讲授《微积分(下册)》；第三学期每周4学时，共64学时，讲授《微分方程与线性代数》.对“大学数学”要求次高，学时安排不多的系科、专业，如信息管理、城资、国土、旅游、土木、地质、地信、城规、化学、环科、生物、医学等，本书可分两个学期讲授(参照全国考研大纲中数学二的知识范围)，第一学期每周6学时，共84学时，讲授《微积分(上册)》；第二学期每周6学时，共90学时，讲授《微积分(下册)》和《微分方程与线性代数》的部分内容.

注意到学生的实际水平，本书在预备知识中增加了排列与组合、数学归纳法、不等式、极坐标系和函数的初等性质等知识的介绍.书中四周加框的内容是重要公式、重要方法、重要定义，是要求学生熟记的主要知识点(由于加框条件的限制，这不是要求学生熟记的全部知识点).书中用*标出的段落为较难内容，供任课教师选用，一般留给有兴趣的学生课外阅读或查阅.书中习题分A,B两组，A组为基本要求，B组为较高要求(供优秀学生和准备考研的学生选用)，书末有习题答案与提示.

感谢南京大学金陵学院将本课程建设项目立项进行“我国高校应用型人才培养模式研究”.感谢南京大学金陵学院院长王殿祥，老院长姚天扬，副院长邵进，教务处处长王均义，信工院院长李元，城资院院长彭补拙，化生院院长方惠群，基础教学部主任钱钟，督导组秘书方一亭等诸位教授对编者的关心和支持.感谢姜东平、曹祥炎、顾其钧、黄卫华、孔敏、周国飞、邓建平、张玉莲、林小围、王夕予、王培等教授和老师使用本书第一稿在金陵学院面向数千学生讲授“大学数学”课程，并给编者提供了许多宝贵的修改建议.感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编审，使本书质量大有提高，并顺利出版.

书中不足与错误难免，敬请智者不吝赐教.

陈　仲

2013年2月于南京大学

目　录

1 极限与连续

微积分学的主要内容是导数与积分，这两个概念都是某种形式的极限，因此极限是微积分学的基础，学好极限概念将有助于学好“微积分”这门课程.

1.1 预备知识

1.1.1 常用的数学符号

(1) “$\forall$”表示“**任给**”，也表示“任取”、“对一切的”、“对于任意一个”等. 例如：“$\forall \varepsilon > 0$”表示“任给正数 ε”.

(2) “$\exists$”表示“**存在**”，也表示“存在某个”、“至少找到一个”等. 例如：“$\exists \delta > 0$”表示“存在正数 δ”.

(3) “$\Rightarrow$”表示“**推出**”，也表示“使得”、“蕴含”等. 例如：“$A \Rightarrow B$”表示“如果命题 A 成立，可推出命题 B 成立”；“命题 A 是命题 B 的充分条件”；“命题 B 是命题 A 的必要条件”.

(4) “$\Leftrightarrow$”表示“**等价**”，也表示“充分必要”等. 例如：“$A \Leftrightarrow B$”表示“命题 A 等价于命题 B”；“命题 B 是命题 A 成立的充要条件”.

(5) “$\xlongequal{\text{def}}$”表示“**定义**”. 例如：“$A \xlongequal{\text{def}} B$”表示“命题 A 的定义是命题 B”；“用命题 B 来定义命题 A”.

(6) “max”表示“**最大**”. 例如：$\max\{1,2,3\} = 3$.

(7) “min”表示“**最小**”. 例如：$\min\{1,2,3\} = 1$.

(8) “$\sum\limits_{i=1}^{n}$”表示“**求和**”. 例如：$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(9) “$\prod\limits_{i=1}^{n}$”表示“**求积**”. 例如：$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$.

(10) “□”表示“**证毕**”. 一个定理或命题证明完毕，尾部记 □ 表示证毕.

正确运用上述数学符号，可大大简化文字叙述，言简意赅.

1.1.2 集合

1) 集合的基本概念

我们将具有某种特定性质的一组事物的全体称为**集合**，记为 $A = \{x \mid x$ 具有

某种性质}.一集合中的每个个体称为该集合的**元素**.若 a 是集合 A 的元素,记为 $a\in A$;若 a 不是集合 A 的元素,记为 $a\notin A$.一般的,用 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.

集合中的元素具有确定性、互异性、无序性.

只含有限多个元素的集合称为**有限集**,有限集常用列举法表示,如集合 A 有有限个元素 $a,b,c,\cdots,f$,则 $A=\{a,b,c,\cdots,f\}$;含有无限多个元素的集合称为**无限集**.

给定两个集合 A,B,若 $\forall a\in A\Rightarrow a\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$.若 $A\subseteq B$,且 $\exists b\in B$,使得 $b\notin A$,则称 A 是 B 的**真子集**,记为 $A\subset B$.不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$.我们规定空集是任何集合的子集,即对任意集合 A,有 $\varnothing\subseteq A$.例如 $A=\{0,1\}$ 时,A 的全部子集是 $\{0\},\{1\},\{0,1\},\varnothing$.

2) 集合的并、交、差运算

定义 1.1.1 设 A,B 是集合,则集合 A 与 B 的并、交、差分别定义为

$$\boxed{\begin{aligned}A\cup B&\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}\\ A\cap B&\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}\\ A\backslash B&\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{x\mid x\in A,\text{但 }x\notin B\}\end{aligned}}$$ ①

关于集合的并、交、差,有下列性质(证明从略).

定理 1.1.1 设 A,B,C 是集合,则有

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A \qquad \textbf{(交换律)}$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \qquad \textbf{(结合律)}$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \qquad \textbf{(分配律)}$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \qquad \textbf{(德·摩根②律)}$$

注 在研究集合与集合之间的关系时,常将具有某种性质的研究对象的全体称为**全集**,记为 I(或 Ω).若 A 是 I 的子集,称 $I\backslash A$ 为 A 的**补集**,记为 $\overline{A}$.

3) 常用的数集

自然数集 $\quad\mathbf{N}\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{x\mid x=0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

正整数集 $\quad\mathbf{N}^*\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\{x\mid x=1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

---

①本书中四周加框的内容是重要概念,或是必须熟记的公式.

②德·摩根(De Morgan),1806—1871,英国数学家.

整数集 $\mathbf{Z} \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$

有理数集 $\mathbf{Q} \xlongequal{\text{def}} \left\{x \,\middle|\, x = \frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*\text{，且 } p \text{ 与 } q \text{ 互素}\right\}$

有理数总可用有限小数或无限循环小数表示，我们将无限不循环小数称为**无理数**，有理数与无理数统称为**实数**，全体实数的集合称为**实数集**，记为 $\mathbf{R}$. 全体正实数的集合记为 $\mathbf{R}^+$. 实数在几何上用数轴上的点表示，数轴上的每一点表示一个实数.

下面是本书在空间解析几何、多元函数和线性代数部分常用的与实数集有关的几个集合：

二维平面 $\mathbf{R}^2 \xlongequal{\text{def}} \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$

三维空间 $\mathbf{R}^3 \xlongequal{\text{def}} \{(x, y, z) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$

***n* 维空间** $\mathbf{R}^n \xlongequal{\text{def}} \{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$

4）区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$.

开区间 $(a, b) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$

闭区间 $[a, b] \xlongequal{\text{def}} \{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$

半开区间 $[a, b) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}$，$(a, b] \xlongequal{\text{def}} \{x \mid a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$

无穷区间 $(-\infty, a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x < a, x \in \mathbf{R}\}$，$(a, +\infty) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\}$

$(-\infty, a] \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \leqslant a, x \in \mathbf{R}\}$，$[a, +\infty) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \geqslant a, x \in \mathbf{R}\}$

$(-\infty, +\infty) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

定义 1.1.2（邻域） 设 $a, \delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$.

(1) $U_\delta(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid |x - a| < \delta\}$，称 $U_\delta(a)$ **为点 a 的 δ 邻域，并称点** a **为邻域的中心，称** δ **为邻域的半径**；

(2) $\mathring{U}_\delta(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$，称 $\mathring{U}_\delta(a)$ **为点 a 的去心 δ 邻域**；

(3) $U_\delta^+(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid 0 < x - a < \delta\}$，称 $U_\delta^+(a)$ **为点 a 的右 δ 邻域**；

(4) $U_\delta^-(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid 0 < a - x < \delta\}$，称 $U_\delta^-(a)$ **为点 a 的左 δ 邻域.**

*1.1.3[①] 有理数的可数性

有限集显然是可数集.一个无限集的元素如果能够与正整数集的元素一一对应,则称此集合为**可数集**.

定理 1.1.2 有理数集是可数集.

证 (1) 区间$[0,1]$内的有理数是可数集,这是因为

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \cdots \end{array}$$

(2) 区间$(1,+\infty)$内的有理数是可数集,这是因为若有理数$x\in(1,+\infty)$,则$\dfrac{1}{x}\in(0,1)$.由(1)和(2)可得区间$[0,1]$与$(1,+\infty)$的并集$[0,+\infty)$内的有理数是可数集.

(3) 区间$(-\infty,0)$内的有理数是可数集,这是因为若有理数$x\in(-\infty,0)$,则$-x\in(0,+\infty)$.于是$[0,+\infty)$与$(-\infty,0)$的并集$(-\infty,+\infty)$内的有理数是可数集. □

定理 1.1.3 实数集是不可数集.

证 下面我们来证明实数集的子集$(0,1)$是不可数集,由此即得实数集是不可数集.

为了小数表示的惟一性,这里假设形如 0.123 的小数写成 0.123 000…,而不写成0.122 999…. $\forall x\in(0,1)$,则实数x有惟一的小数表示$x=0.a_1a_2a_3a_4\cdots$,其中$a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$是$0,1,2,\cdots,8,9$中的数,且不存在某位数后面的数全是9.下面用反证法.假设$(0,1)$是可数集,因此可建立如下的1-1对应:

$$\begin{array}{l} 1\leftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots \\ 2\leftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots \\ 3\leftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots \\ 4\leftrightarrow 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\cdots \\ \qquad\vdots \end{array}$$

现构造一个数$0.b_1b_2b_3b_4\cdots$,其中$b_1,b_2,b_3,b_4,\cdots$是$0,1,2,\cdots,8,9$中的数,$b_1\neq a_{11},b_2\neq a_{22},b_3\neq a_{33},b_4\neq a_{44},\cdots$,且不取某位数后面的数全是9,此数显然是

①本书中用 * 标出的章节为较难内容,供教师选用,教学要求高的专业可作介绍,一般留给学生课外选学.

(0,1) 中的实数,但是,它不同于上列表中的任一个.这个矛盾说明(0,1)内的实数是不可数集,由此即得实数集是不可数集. □

1.1.4　排列与组合

1) 排列

从 n 个不同元素中任取 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个不同元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个**排列**.从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的所有排列的个数称为**排列数**,记为 P_n^m,则有

$$\boxed{P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}}$$

2) 组合

从 n 个不同元素中任取 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个不同元素并成一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个**组合**.从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的所有组合的个数称为**组合数**,记为 C_n^m,则有

$$\boxed{C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

3) 排列与组合的重要性质

应用排列数与组合数的公式,容易证明下列重要性质(证明留给读者):

(1) $nP_n^n=P_{n+1}^{n+1}-P_n^n$;

(2) $P_1^1+2P_2^2+3P_3^3+\cdots+nP_n^n=P_{n+1}^{n+1}-1$;

(3) $C_n^m=C_n^{n-m}$;

(4) $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

1.1.5　数学归纳法

在微积分和现代数学的各学科中,数学归纳法是证明一个命题成立常用的数学方法,有时甚至是不可替代的方法.

在数学中,证明一个与所有正整数有关的命题 $P(n)$ 时常用数学归纳法.数学归纳法含第一数学归纳法和第二数学归纳法.**第一数学归纳法**证明的步骤如下:

(1) 证明 $n=1$(或为其他某个正整数) 时命题成立,即 $P(1)$ 成立;

(2) 对任意正整数 $n(n\geqslant 2)$,假设 $P(n)$ 成立;

(3) 从(2) 中的假设出发,证明 $P(n+1)$ 一定成立.

则有结论:命题 $P(n)$ 对一切正整数成立.

第二数学归纳法证明的步骤如下:

(1) 证明 $n=1$(或为其他某个正整数)时命题成立,即 $P(1)$ 成立;

(2) 对任意正整数 $n(n\geqslant 2)$,假设 $P(2),P(3),\cdots,P(n)$ 成立;

(3) 从(2)中的假设出发,证明 $P(n+1)$ 一定成立.

则有结论:命题 $P(n)$ 对一切正整数成立.

例 1 **证明二项式定理**:设 $a,b\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*$,则

$$\boxed{(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n}$$

证 记 $C_n^0=1$,则上式可写为

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^{n-i}b^i \tag{$(1)_n$}$$

当 $n=1$ 时,左边 $=a+b$,右边 $=a+b$,所以 $(1)_1$ 式成立.归纳假设 $(1)_n$ 式成立,则此式两边乘以 $(a+b)$ 得

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1}&=(a+b)\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^{n-i}b^i\\
&=\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^{n+1-i}b^i+\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^{n-i}b^{i+1}\quad(\text{将第 2 式中 } i \text{ 改为 } j)\\
&=\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^{n+1-i}b^i+\sum_{j=0}^{n}C_n^ja^{n-j}b^{j+1}\quad(\text{在第 2 式中令 } j+1=i)\\
&=\sum_{i=0}^{n}C_n^ia^{n+1-i}b^i+\sum_{i=1}^{n+1}C_n^{i-1}a^{n-i+1}b^i\\
&=a^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}C_n^ia^{n+1-i}b^i+\sum_{i=1}^{n}C_n^{i-1}a^{n-i+1}b^i+b^{n+1}\\
&=a^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(C_n^i+C_n^{i-1})a^{n+1-i}b^i+b^{n+1}\\
&=a^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}C_{n+1}^ia^{n+1-i}b^i+b^{n+1}\\
&=\sum_{i=0}^{n+1}C_{n+1}^ia^{n+1-i}b^i
\end{aligned}$$

因此 $(1)_{n+1}$ 式成立.于是 $(1)_n$ 式 $\forall n\in\mathbf{N}^*$ 成立. □

1.1.6 不等式

1) 有关绝对值的不等式

实数 a 的绝对值

$$|a|\xlongequal{\text{def}}\begin{cases}a & (a\geqslant 0);\\ -a & (a<0)\end{cases}$$