中国矿业大学“211工程”三期创新人才培养项目资助出版

应用泛函分析

YINGYONG FANHAN FENXI

主编　宋晓秋

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

中国矿业大学“211工程”三期创新人才培养项目资助出版

应用泛函分析

主　编　宋晓秋
参　编　肖建中　赵君喜
　　　　王於平　安天庆

□□师范大学
图书馆
藏书印

1048240
T1048240

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

通俗地讲，泛函分析也可以叫做无穷维空间的几何学和微积分学或无限维的分析学，主要研究无限维线性空间上的泛函数和算子理论。它综合分析学、几何和代数的观点研究无穷维向量空间上的函数、算子和极限理论，至今已经发展成为一门理论完备、内容丰富的数学分支。

本书主要介绍了 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分，度量空间与 Banach 空间，Hilbert 空间，线性算子理论基础，同时介绍了广义函数与 Sobolev 空间，小波分析基础等等，各章后面配有适量的习题，供师生参考使用。

本教材作为理工科研究生近代分析数学特别是泛函分析的基础教材，涉及内容较为宽泛，注重基础理论和应用，例题较多，各章内容相对独立，经过选择和取舍，适合不同专业的同学选用。

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析 / 宋晓秋主编. —徐州 ：中国矿业大学出版社，2013.1

ISBN 978-7-5646-1596-3

Ⅰ.①应… Ⅱ.①宋… Ⅲ.①泛函分析—研究生—教材 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第198316号

书　　名 应用泛函分析
主　　编 宋晓秋
责任编辑 周　红
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本 787×1092　1/16　**印张** 14.5　**字数** 362 千字
版次印次 2013 年 1 月第 1 版　2013 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 23.00 元

（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

前　言

泛函分析是分析数学家族中年轻的成员，是研究拓扑线性空间到拓扑线性空间之间满足各种拓扑和代数条件的映射的数学分支。泛函分析也可以通俗地叫做无穷维空间的几何学和微积分学，主要研究无限维线性空间上的泛函数和算子理论。它是古典分析观点的推广，综合了函数论、几何和代数的观点研究无穷维向量空间上的函数、算子和极限理论，是大道至简、大美天成的范例。泛函分析在20世纪30年代从变分法、微分方程、积分方程、函数论以及量子物理等的研究中形成，到20世纪40到50年代发展成为一门理论完备、内容丰富的数学分支，可看作无限维的分析学。

19世纪以来，数学的发展进入了一个新的阶段。这就是，对Euclid第五公设的研究，引出了非欧几何这门新的学科；对代数方程求解的一般思考，最后建立并发展了群论；对数学分析的研究又建立了集合论。这些新的理论都为用统一的观点把古典分析的基本概念和方法一般化准备了条件。

20世纪初，瑞典数学家Fredholm和法国数学家Hadamard发表的著作中，出现了把分析学一般化的萌芽。随后，Hilbert等开创了现在称之为“Hilbert空间”的研究。到了20世纪20年代，在数学界已经逐渐形成了一般分析学，也就是泛函分析的基本概念。这时候，函数概念被赋予了更为一般的意义。古典分析中的函数概念是指两个数集之间所建立的一种对应关系，而现代数学的发展却是要求建立两个任意集合之间的某种对应关系。在数学上，把无限维空间到无限维空间的变换叫做算子，也叫算符。研究无限维线性空间上的泛函数和算子理论，就产生了一门新的分析数学，叫做泛函分析。在20世纪30年代，泛函分析就已经成为数学中一门独立的学科了。

泛函分析的特点是它不但把古典分析的基本概念和方法一般化了，而且还把这些概念和方法几何化了。比如，不同类型的函数可以看作是“函数空间”的点或向量，这样最后得到了“抽象空间”这个一般的概念。它既包含了以前讨论过的几何对象，也包括了不同的函数空间。由于分析学中许多新分支的形成，揭示出分析、代数、几何的许多概念和方法常常存在相似的地方。比如，代数方程求根和微分方程求解都可以应用逐次逼近法，并且解的存在和唯一性条件也极其相似。这种相似在积分方程论中表现得更为突出。泛函分析的产生正是和这种情况有关，有些乍看起来很不相干的东西，都存在着类似的地方。因此

它启发人们从这些类似的东西中探寻一般的真正属于本质的东西。

数学，特别是现代数学，是自然科学的基本语言，是探索现实世界物质运动机理必不可少的手段。当今社会，数学已经渗透到科学技术和社会生活的各个领域。数学已不仅是一种工具，而且是一种定量思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养；不仅是一门科学，而且是一种文化；不仅是高新技术的核心，而且是美感熏陶的一条途径。半个多世纪来，泛函分析一方面以其他众多学科所提供的素材来提取自己研究的对象和某些研究手段，并形成了自己的许多重要分支，例如算子谱理论、巴拿赫(Banach)代数、拓扑线性空间理论、广义函数论、小波分析等；另一方面，它也强有力地推动着其他不少分析学科的发展，渗透到数学内部的各个分支中去，并且在其中起着重要的作用。它在微分方程、概率论、函数论、连续介质力学、量子物理、计算数学、控制论、最优化理论等学科中都有重要的应用，而且还是建立群上调和分析理论的基本工具，同时也是研究无限个自由度物理系统的重要而自然的工具之一。近十几年来，泛函分析在工程技术方面又获得了更为有效的应用，它的观点和方法已经渗入到不少工程技术性的学科之中，已成为近代数学的基础之一。

本教材作为理工科研究生近代分析数学特别是泛函分析的基础教材，涉及内容较为宽泛，注重基础理论和应用，例题较多，各章内容相对独立，教学上有相当的灵活性，又有一定的余地，经过选择和取舍，适合不同专业的同学选用。全书主要介绍了 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分，度量空间与 Banach 空间，Hilbert 空间，线性算子理论基础，同时介绍了广义函数与 Sobolev 空间，小波分析基础等等，各章后面配有适量的习题，供师生参考使用。

本教材的出版得到了中国矿业大学“211 工程”三期创新人才培养项目的资助。本书由宋晓秋教授担任主编，同时参加编写的有肖建中(南京信息工程大学)、赵君喜(南京邮电大学)、王於平(南京林业大学)、安天庆(河海大学)等教授(排名不分先后)。东南大学陈建龙教授、薛星美教授，中国矿业大学刘文斌教授提出一些建设性意见，在此向他们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，在内容的取舍、结构的安排以及叙述方式上难免有不当之处，敬请读者与专家指正。

编　者

2012 年 3 月于徐州

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第 1 章　Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分

数学不是规律的发现者，因为它不是归纳。数学也不是理论的缔造者，因为它不是假说。但数学却是规律和理论的裁判和主宰者，因为规律和假说都要向数学表明自己的主张，然后等待数学的裁判。如果没有数学上的认可，则规律不能起作用，理论也不能解释。

——查理-皮尔斯(Charles Sanders Peirce，1839～1914，美国)

在人类社会进步、科学现代化过程中，数学及数学方法显得越来越重要. 在许多学科中，它已不单纯是一种辅助性的工具了，而是解决许多重大问题的关键性的思想与方法，不仅在自然科学和工程技术领域中起着重要的作用，而且正以越来越快的速度渗透到社会科学的各个领域，显示出巨大的推动作用和启发作用.

在数学分析或高等数学课程中，主要讲述了微积分的基本理论与应用. 其中的积分称为 Riemann 积分，它有效地解决了天文、力学、几何以及其他学科中各种各样的计算问题，推动了数学乃至整个科学的发展，其重要性早已为世人所公认，而且它作为人类数学文化的宝贵财富和充满智慧光芒的数学思想，已经武装了一代又一代的科学工作者和工程技术人员，成为人们熟悉并乐于掌握的工具. 本章学习一种新的更广泛的积分——Lebesgue 积分.

我们自然会问，Riemann 积分已经很好很有用了，为什么还要引入新的积分？要回答这个问题，首先从 Riemann 积分的不足之处谈起. 在微积分的发展过程中，人们发现 Riemann 积分不能解决科学技术中出现的一些新问题，并且在理论上还存在着许多缺陷，以下两点很有代表性：

(1) 可积的函数类小

按照 Riemann 积分的几何意义，积分在几何上代表平面图形的面积，然而，对一些并不很复杂的图形不能计算其面积. 例如，在平面 R^2 上定义如下两个集合 E_1 和 E_2：

$$E_1 = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 \mid 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \xi_1, \xi_2 \text{ 均为有理数}\},$$

$$E_2 = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 \mid 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \xi_1, \xi_2 \text{ 均为无理数}\}.$$

问两个集合的面积哪个更大？分别是多少？Riemann 积分无法回答这个问题，但这些图形在实际问题中会经常出现. 再例如，著名的 Dirichlet 函数：

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{当 } x \text{ 为}[0,1] \text{ 中的有理数；} \\ 0, \text{当 } x \text{ 为}[0,1] \text{ 中的无理数.} \end{cases}$$

按照积分的定义，对给定的[0,1]的划分，可以使积分和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 取值为 0 和 1，从而，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

(2) 常见的极限与积分、求和与积分以及求导和积分交换次序的条件太强

具体地,以极限与积分交换次序为例,设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的连续函数列,以$f(x)$为极限. 为了保证下式成立:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

需要附加一些条件,常见的条件是$\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$. 极限与积分交换次序是数学中很常用的运算,而一致收敛的条件在许多情况下很难满足,这就给Riemann积分在其他数学分支中的应用带来了不便. 此外,Riemann 积分基本上是在区间或区域上定义的,无法推广到一般的集合上去,从而限制了这类积分的理论和应用.

这些问题促使数学家们对 Riemann 积分进行改进,这样就产生了一门新的数学分支——实变函数论. 实变函数论是微积分学的进一步发展,它的基础是欧氏空间中的点集论,它的主要内容是 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分.

测度是长度、面积、体积等概念的推广,这个概念产生于 19 世纪与 20 世纪交接之际. 1893 年,Jordan 提出了"Jordan 容度"的概念并用来讨论积分. 1898 年,法国数学家 Borel 把容度的概念进行了改进,并把它叫做测度. 1902 年,法国数学家 Lebesgue (Borel 的学生) 在他的博士论文《积分、长度与面积》中提出了"Lebesgue 测度"、"Lebesgue 积分"的概念,重建了微积分基本定理等理论,从而创立了实变函数论. 20 世纪 20 ～ 30 年代,俄国数学家进一步丰富和发展了这一学科,使它变得更加成熟和完善.

实变函数论是现代分析学的开端,其观念和方法对现代数学,特别是点集拓扑学、泛函分析、计算数学以及偏微分方程等分支,有极为重要的影响. 同时,实变函数论也被广泛应用于其他科学分支和工程技术中. 可以说,在现代数学乃至工程技术领域,实变函数论已经成为不可缺少的理论工具.

§1.1 集合

集合论由德国数学家 Cantor 所创立,是现代数学的独立重要组成部分. 现代数学的几乎所有分支都以集合论作为基础. 实变函数论更是一门大量运用集合论知识的数学课程,本节介绍一些常用的集合论知识.

1.1.1 集合的概念与运算

集合是数学中的原始概念,对集合给出严格定义是一件难度很大的事. 通常采用如下定义:

在一定范围内含义明确且互不重复的个体事物的全体称为一个集合,每个个体事物称为集合的元素.

不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.

例如,全体实数是一个集合,但全体好人就不是一个集合,因为好人的含义不明确. 又如,$\{1,2,3\}$是一个集合,$\{1,2,2,3\}$不是一个集合,因为其中的个体有重复.

集合的运算最常用的有"并"、"交"、"差"三种,分别用符号"$\cup$"、"$\cap$"、"$\backslash$"表示. 对给定的集合S和A,当$A\subset S$时,称$S\backslash A$为A关于S的余集,记作$\complement_S A$. 如果不需要强调集合S,则简称为A的余集并简记为$\complement A$. 这些运算我们已经很熟悉,所以不再重复. 特别要强调

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

的是，以后我们作集合运算时，集合的个数不一定有限，在很多情况下集合的个数是无限的. 例如在下面的 De Morgan 公式中，指标集 Γ 可以是有限集，也可以是无限集.

De Morgan 公式：$\complement(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} \complement A_\alpha$，$\complement(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} \complement A_\alpha$.

我们定义集合列的极限运算，这在实变函数论中是非常重要的.

定义 1.1　设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列集合，定义其上极限 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$、下极限 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 分别为：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid \text{存在无穷多个正整数 } n\text{，使得 } x \in A_n\};$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid \text{存在正整数 } m\text{，当 } n \geqslant m \text{ 时，有 } x \in A_n\}.$$

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，则称 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，并称 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 为 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.
不难证明，下述关系式成立：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

例如：(1) 设 $A_{2n-1} = \left(-1+\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}\right)$，$A_{2n} = (-n, +n)$，$n \in N$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (-\infty, +\infty),\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (-1, 1].$$

(2) 设 $A_{2n-1} = \left(\dfrac{1}{n}, 4-\dfrac{1}{n}]\right)$，$A_{2n} = \left(-\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}\right)$，$n \in N$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0, 4),\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = (0, 1].$$

(3) 设 $A_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$，　$n = 1, 2, 3, \cdots$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{0\},\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{0\}.$$

因此，(1)，(2) 中的集合列不收敛，而(3) 中的集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \{0\}$.

1.1.2　可数集

我们见过各种各样的集合，有些集合的元素个数是有限的，有些则不然. 如果一个集合的元素个数是有限的，则称此集合为有限集，否则称为无限集. 空集是有限集，因为其元素个数为零. 对于两个有限集，要比较它们元素个数的多少是很容易的，但对两个无限集，这却是一件不很简单的事. 物理学家伽利略就曾考虑过全体正整数与全体正偶数是否一样多的问题. 还可以进一步提出类似的问题：所有有理数之集和所有无理数之集哪个的元素更多?要回答这些问题，需要考虑集合之间的对应关系，而 1—1 映射是最重要的工具.

我们假设读者知道映射的概念，以及单射、满射和双射的定义(双射通常也叫做 1—1 映射或 1—1 对应).

定义 1.2　设 A, B 是两个非空集合，如果存在 1—1 映射 $\varphi: A \to B$，则称 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$.

两个集合对等，其元素个数就相等. 有了这个新观念，我们就可以回答伽利略的问题，即正整数与正偶数一样多.

全体自然数集合和全体实数之集都是无限集合，但自然数集的元素可以排成一列，实数集的元素却无法排成一列. 为了将这个事实准确地刻画出来，我们引入下述概念：

定义 1.3 设集合 A 与正整数之集对等，则称 A 是一个可数集（或可列集）. 不是可数集的无限集合称为不可数集.

我们不加证明地罗列出可数集的一些基本性质：

定理 1.1 任何无限集合均包含一个可数子集.

定理 1.2 有限或可数个可数集的并是可数集.

定理 1.3 全体有理数构成的集合是一个可数集；全体无理数构成的集合是一个不可数集，因此全体实数之集合是不可数集.

1.1.3 R^n 中的点集

前边讨论了一般的集合及其运算，但集合的元素之间没有任何关系. 例如，两个元素不进行运算，没有远近关系，也没有大小关系. 因此，集合是没有结构的. 对集合赋予一定的结构，其内容就会更加丰富，就能够更有效地描述自然界的现象，体现出数学的价值.

在微积分中，极限的概念是最基本的. 要讨论极限，就必须考虑点与点之间的远近关系，这就是距离. 这个概念并不陌生，比如，给定两个实数 x,y，非负实数 $|x-y|$ 就表示这两个数之间的距离. 现在我们在一类很广泛的集合上引入距离，使其元素之间有远近关系，从而能够进一步发展极限等新理论.

记 R^n 为 n 维欧氏空间，对 R^n 中的任意两个点

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n),$$

定义 x 与 y 之间的距离为：

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{1/2}.$$

利用距离 $\rho(x,y)$，我们定义收敛性、邻域和极限等基本概念.

定义 1.4 设 $\{x_n\}$ 是 R^n 中的点列，$x_0\in R^n$. 如果对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0$.

定义 1.5 对给定的点 $x\in R^n$ 及正数 $\delta>0$，令 $U(x,\delta)=\{y\mid\rho(x,y)<\delta\}$，称之为 x 的 δ- 邻域.

定义 1.6 设 E 是 R^n 中的点集，如果存在点 $x\in R^n$ 及正数 $K>0$，使得 $E\subset U(x,K)$，则称 E 是有界集.

通俗地说，x 的 δ- 邻域就是以 x 为中心，δ 为半径的球体（不含球体的表面）. 而有界集是指能够被某个球体包含的集合. 点列收敛性的概念也可以用邻域的语言来描述.

定义 1.4' 设 $\{x_n\}$ 是 R^n 中的点列，$x_0\in R^n$. 如果对 x_0 的任何 $U(x,\varepsilon)$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$x_n\in U(x,\varepsilon)$，则称 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0.

R^n 中的点 x 与集合 E 之间有各种各样的关系，例如，x 在 E 中，x 不在 E 中但 x 的附近有 E 的点，x 不在 E 中且 x 的附近没有 E 的点，等等. 为了理清这些关系，我们引入以下概念：

定义 1.7 设 E 是 R^n 中的点集，$x\in R^n$，则

（1）如果存在 $\delta>0$，使得 $U(x,\delta)\subset\complement E$，则称 x 是 E 的内点，E 的全体内点所成之集，称为 E 的内部（或开核），记为 E°.

（2）如果存在 $\delta>0$，使得 $U(x,\delta)\subset\complement E$，则称 x 为 E 的外点.

(3) 如果 x 的任何邻域内既有 E 的点又有 $\complement E$ 的点，则称 x 是 E 的边界点. E 的全体边界点之集称为 E 的边界，记为 ∂E.

(4) 如果 x 的任何邻域内都含有无穷多个 E 的点，则称 x 为 E 的一个极限点(或聚点)，E 的全部极限点所成之集称为 E 的导集，记为 E'.

(5) 如果 $x \in E$ 但 $x \notin E'$，则称 x 为 E 的孤立点.

(6) E 与其导集的并集叫做 E 的闭包，记为 $\overline{E}$，即 $\overline{E} = E \cup E'$.

定理 1.4　(1) 设 $A \subset B$，则 $A' \subset B'$，$A^\circ \subset B^\circ$，$\overline{A} \subset \overline{B}$.

(2) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

一个非空集合的导集可能是空集，也可能不是空集. 例如，若 E 是 R^1 中全体整数之集，则 $E' = \varnothing$. 而当 $E = \{\frac{1}{k} \mid k = 1,2,3,\cdots\}$ 时，$E' = \{0\} \neq \varnothing$. 下边的定理给出了判断导集非空的一个准则.

定理 1.5(Bolzano-Weierstrass 定理)　若 E 是 R^n 中的一个有界的无限集，则 E 至少有一个聚点.

在数学分析中，开区间和闭区间是基本而常用的概念. 下边定义的开集和闭集分别是开区间和闭区间的推广，是实变函数论中的基本概念.

定义 1.8　设 E 是 R^n 中的点集，

(1) 若 E 中每个点都为 E 的内点，即 $E^\circ = E$，则称 E 为开集；

(2) 若 E 的每个极限点都在 E 中，即 $E' \subset E$，则称 E 为闭集.

开集和闭集有如下性质：

定理 1.6　(1) 有限多个开集的交集是开集；任意多个开集的并集是开集.

(2) 开集的余集是闭集，闭集的余集是开集.

定理 1.7(Heine-Borel 有限覆盖定理)　设 F 为 R^n 中的有界闭集，若开集簇 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 覆盖 F，即 $F \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$，则 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 中存在有限个开集 $U_1,\cdots,U_m$ 覆盖 F，即 $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_k$.

定义 1.9　设 E 是 R^n 中的点集，如果 $E \subset E'$，就称是自密集；如果 $E = E'$，就称是完备集.

完备集肯定是自密集，但反之不然.

1.1.4　直线上的开集、闭集及完备集的构造

高维空间中开集、闭集和完备集的结构是很复杂的，但一维空间的情况却比较简单. 我们可以对一维空间中的开集和闭集的结构给出很清楚的描述.

定义 1.10　设 G 是 R^1 中的开集，若非空开区间 $(\alpha,\beta) \subset G$ 且 $\alpha,\beta \notin G$，则称 (α,β) 是 G 的一个构成区间.

定义 1.11　设 F 是 R^1 中的闭集，称 F 的余集 $\complement F$ 的构成区间为 F 的余区间或邻接区间.

定理 1.8　一维空间中的任何非空开集 G 均可唯一地表示成至多可数个互不相交的构成区间之并. 又当非空开集 G 表示为互不相交的开区间之并时，这些开区间必是它的构成区间.

由于闭集的余集是开集，所以下述结论成立：

定理 1.9　设 F 是一维空间中的闭集，则 F 或者是整个直线，或者是直线上挖去有限或

可数个互不相交的开区间之后所得到的集合.

从定义 1.9 可知,完备集是没有孤立点的闭集.而闭集的孤立点必然是它的两个余区间的公共端点,所以由定理 1.9 可以得到下边关于完备集结构的定理:

定理 1.10 一维空间中的完备集是这样的闭集,它的任意两个余区间(如果存在的话)没有公共端点.

§1.2 Lebesgue 测度与可测函数

在前边已经谈到,有些图形的面积不能用微积分的手段进行刻画.我们需要引入新的思想和方法.Lebesgue 测度正是在这样的背景下产生的新理论.因此,Lebesgue 测度是通常的面积、体积等概念的推广.

1.2.1 Lebesgue 测度

对于简单的图形,例如平面上的矩形或三维空间中的长方体,其面积或体积是容易描述的.因此我们就从这一类简单的图形开始讨论,利用这些集合覆盖一般的集合,得到一般情形下集合的"面积"、"体积"等定量概念,并由此引出 Lebesgue 测度.

定义 1.12 设 $\{a_i\}_{i=1}^n$,$\{b_i\}_{i=1}^n$ 是两组数,满足 $a_i < b_i, i = 1,\cdots,n$,称点集

$$I = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid a_i < x_i < b_i, i = 1,\cdots,n\}$$

为 R^n 中的开区间.如果将上式中的不等式 $a_i < x_i < b_i (i = 1,\cdots,n)$ 换为 $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i (i = 1,\cdots,n)$,则称 I 为闭区间.类似地,可以定义半开半闭区间(左开右闭或左闭右开).对给定的区间 I(不论开闭),令 $|I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$,称之为区间 I 的体积.

定义 1.13 设 $E \subset R^n$,称下面定义的非负数(可以是 $+\infty$)为 E 的 Lebesgue 外测度(简称外测度):

$$m^* E = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ 且 } I_i \text{ 为开区间或空集}\}.$$

我们强调,在定义外测度时,覆盖集合 E 的区间都是开区间.事实上,换为其他类型的区间并不影响外测度的值,但在以后的讨论中会带来很多不便.

用 Riemann 积分刻画图形面积时,总是用有限多个区间作逼近.在外测度的定义中,覆盖集合 E 的开区间的个数可以有限的,也可以是可数多个.正是这一变化导致了 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的区别.

定理 1.11 外测度具有如下基本性质:

(a) 非负性:$m^* E \geqslant 0$;当 E 为空集时,$m^* E = 0$;

(b) 单调性:若 $A \subset B$,则 $m^* A \leqslant m^* B$;

(c) 次可数可加性:$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n$.

计算集合的外测度并不是一件容易的事.但对某些特殊的集合,其外测度的计算非常简单.下面的例子中罗列了一些常见集合及其外测度.

例如(1) 若 $E = \varnothing$,则 $m^* E = 0$;

(2) 若 $E=R^n$，则 $m^*E=+\infty$；

(3) 设 E 是 R^1 中全体有理数之集，则 $m^*E=0$；

(4) 设 E 是 R^n 中的任意区间(不论开闭)，则 $m^*E=|E|$.

在定义集合 E 的外测度时，用开区间覆盖集合 E，是从外部逼近 E. 因此从直观上看，外测度比集合 E 的“实际面积”要大. 要准确刻画 E 的“实际面积”，应该像 Riemann 积分的定义一样，还要考虑从内部逼近 E，使内外一致，从而得到“实际面积”. Lebesgue 测度最初的定义方式正是这样，引入了外测度之后，再定义内测度，若二者相等，则得到 Lebesgue 测度. 但这种定义方式比较麻烦，在讨论问题时很不方便. 后来德国数学家 Caratheodory 给出了一种简捷的定义，被数学界普遍采用.

定义 1.14　若 $\forall T\subset R^n$，有 $m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \complement E)$(Caratheodory 条件)，则称 E 为 Lebesgue 可测集，此时 E 的外测度称为 E 的 Lebesgue 测度，简称测度，记作 mE.

从可测集的定义和外测度的性质可得到下述结论：

定理 1.12　(1) 集合 E 可测的充要条件是其余集 $\complement E$ 可测；

(2) 如果集合 E 的外测度为零，则 E 是可测集.

例如 R^1 中全体有理数之集是可测集，从而，全体无理数之集也是可测集.

可测集关于差，余，有限交和可数交，有限并和可数并，以及极限运算都是封闭的. 更确切地说，下述结论成立：

若 A,B,A_i 可测，则下述集合也可测：

$$A\cup B,A\cap B,\quad A-B,\quad \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i,\quad \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\quad \overline{\lim_{i\to\infty}}A_i,\quad \underline{\lim_{i\to\infty}}A_i.$$

Lebesgue 测度具有许多性质，下面的三条性质是最基本的. 其他性质都可以从这三条性质推出来. 因此这些性质也被当做公理定义 Lebesgue 测度.

定理 1.13　Lebesgue 测度满足如下性质：

(a) 非负性：$mE\geqslant 0$；

(b) 标准性：设 E 是 R^n 中的区间，则 $m^*E=|E|$；

(d) 可数可加性：若 $\{A_i\}$ 是可测集合列，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 也可测.

当 $\{A_i\}$ 两两互不相交时，下式成立：

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mA_i.$$

我们非常关心 R^n 中哪些集合是可测集. 也就是说，Lebesgue 可测集构成的集合类是什么样的. 前面已经知道，各种区间都是可测集. 通过对区间作各种各样的运算，就可以得到很广泛的可测集合类. 虽然还远不是可测集的全部，但已经很“接近”全部可测集了. 我们先考虑 R^n 中开集的结构.

在高维空间中，关于开集的结构没有定理 1.8 这样好的结论，但开集仍然可以表示为区间的并.

定理 1.14　R^n 中开集总可以表示为半开半闭区间的并.

于是，根据定理 1.12，定理 1.13 和定理 1.13 的(b)，立即得到结论：

定理 1.15　R^n 中的开集、闭集均为可测集.

下面的定理告诉我们，给定一个可测集后，可以用开集（或闭集）从外部（或内部）任意逼近这个集合.

定理 1.16 （可测集与开集和闭集的关系）

(1) 若 E 可测，则对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 开集 G，使得 $E \subset G$ 且 $m(G-E) < \varepsilon$；

(2) 若 E 可测，则对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 闭集 F，使得 $F \subset E$ 且 $m(E-F) < \varepsilon$.

按照前边的思路，对开集和闭集作各种各样的运算，又可以得到更广泛的可测集. 为了清楚地表达出这些集，我们引入下面的定义：

定义 1.15 (1) 设集合 G 可以表示为可数个开集 $\{G_i\}$ 的交，即

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i,$$

则称 G 为 G_δ 型集；

(2) 设集合 F 可以表示为可数个闭集 $\{F_i\}$ 的并，即

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

则称 F 为 F_σ 型集；

(3) 从 R^n 中的所有开集出发，作有限次或可数次交、并、余运算得到的集合称为 Borel 型集.

由定义及可测集的运算性质可以立即看出，G_δ 型集和 F_σ 型集必是 Borel 集，它们都是可测集. G_δ 型集和 F_σ 型集比开集和闭集更加广泛. 既然开集和闭集能够任意逼近可测集，那么利用 G_δ 型集和 F_σ 型集逼近可测集时，精确度应该更高，事实正是如此.

定理 1.17 （可测集与 G_δ 型集和 F_σ 型集的关系）

(1) 若 E 可测，则存在 G_δ 型集 G，使得 $E \subset G$，而且 $m(G-E) = 0$；

(2) 若 E 可测，则存在 F_σ 型集 F，使得 $F \subset E$，而且 $m(E-F) = 0$.

推论 给定一个可测集 E，则存在 Borel 集 B，使得 $mE = mB$ 并且可以进一步满足 $B \subset E$，也可以满足 $E \subset B$.

由此可知，可测集和 G_δ 型集（或 F_σ 型集）只差一个零测度集. 而 Borel 集比 G_δ 型集和 F_σ 型集都更广泛，那么可测集和 Borel 集是不是完全相同呢？答案是否定的. 可以证明，存在不是 Borel 集的可测集（参见：周民强《实变函数》）.

可测集类是非常广泛的，常见的集合，如开集、闭集等，都是可测集. 我们自然会问，是不是 R^n 中所有的集合都可测？答案再一次是否定的. 尽管具体地构造出一个不可测集很费力，但不可测集的确存在，而且很多. 有兴趣的读者可以参考有关文献，如那汤松的名著《实变函数论》.

最后，请读者利用测度考虑本章开头提到的两个图形的面积.

$$E_1 = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 \mid 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \xi_1, \xi_2 \text{ 均为有理数}\},$$

$$E_2 = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 \mid 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1, 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 1, \xi_1, \xi_2 \text{ 均为无理数}\}.$$

我们只给出答案：$mE_1 = 0$，$mE_2 = 1$. 请读者仔细体会两者的区别.

1.2.2 可测函数

微积分所讨论的函数大部分是连续函数，对于 Dirichlet 函数这样的不连续函数，则完全束手无策. 在工程技术中，会遇到大量的不连续函数，甚至经常出现比 Dirichlet 函数性质还

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com