金榜®版高等学校教材同步辅导系列

配高教社《概率论与数理统计》（第三版）浙江大学 谢式千等 编

概率论与数理统计
同步辅导与课后习题详解

第三版

金榜教学与研究专家委员会/编审

北京邮电大学 鲁秀梅/主编

吉林大学出版社

金榜®版高等学校教材同步辅导系列

概率论与数理统计
同步辅导与课后习题详解

金榜教学与研究专家委员会/编审

北京邮电大学 鲁秀梅/主编

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导与课后习题详解:第3版/鲁秀梅主编.—长春:吉林大学出版社,2008.7

(金榜版高等学校教材同步辅导系列)

ISBN 978-7-5601-3882-4

Ⅰ.概… Ⅱ.鲁… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第101382号

书名:金榜版高等学校教材同步辅导系列

概率论与数理统计同步辅导与课后习题详解

作者:鲁秀梅 主编

责任编辑、责任校对:黄凤新

封面设计:金榜图文设计室

吉林大学出版社出版、发行

北京市后沙峪印刷厂 印刷

开本:880×1230毫米 1/32

2008年7月 第1版

印张:297.5 字数:7488千字

2008年7月 第1次印刷

ISBN 978-7-5601-3882-4

总定价:567.90元

社址:长春市明德路421号 邮编:130021

发行部电话:0431-88499826

网址:http://www.jlup.com.cn

E-mail:jlup@mail.jlu.edu.cn

前　言

随着近几年大学连续扩招，大学生的就业压力越来越大，社会对高层次、高素质人才的需求倾向也逐步加大。这就要求大学生在学习生活中，必须越来越注重素质的培养和实际能力的提高。因此，大学生对各种基础教材、专业理论教材、教学辅导书、考试用书、工具书等学习用书的需求急剧增加。有鉴于此，我们组织全国多所知名重点大学的专家和教授，依据最新教材，编写了这套大学重点科目辅导系列丛书。本套丛书涉及的学科有数学、物理、力学、化学、电子、电气工程、工程、经济等，基本上覆盖所涉及专业的主干课程和基础课程。我们在编写此系列图书时，一方面坚持对学科内容的覆盖性；另一方面注重因材施教，准确把握不同层次学生的学习要求。

作为一种辅导性教材，本套丛书力求做到有的放矢，恰到好处。体例设计具有如下特色：

1. 知识点概括：每章首先介绍基本理论与方法，尽量避免使用抽象方法，尽可能用简单的方法，做到深入浅出。内容按照基础知识点、重要知识点和疑难知识点进行划分，方便学生对整章内容进行整体性地把握。

2. 易考题型解析及解题技巧总结：在此部分，我们列举了大量难度不等的易考常考题型，并针对每种题型给出解题思路和解题技巧，对学生的学习有着很强的启发性，能够帮助学生开阔思路、活跃思维、举一反三、触类旁通。书中例题都非常新颖，有着实际工程应用背景，很有参考价值，一改国内教材习题大同小异的弊病。

3. 课后习题详解：完全针对最经典教材最新版本的课后习题给予解答。解答过程中力求做到概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全，必要时给以恰当的评注，更有助于学生深入思考以及远离解题误区。

由于编者水平有限，本书难免会有疏漏之处，恳请广大读者朋友批评指正。

联系我们：中国考试培训网 www.julian.com.cn。

编　者

目 录

第一章　概率论的基本概念

一、知识点概括

（一）基础知识点

1. 随机试验与随机事件

(1)随机试验：

如果一个试验具有以下三个特点：

①可以在相同的条件下重复地进行；

②每次试验的结果不确定，但能事先明确试验的所有可能结果；

③进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则在概率论中称该试验为随机试验，简称试验，通常用字母 E 来表示.

(2)样本空间：随机试验的所有可能结果组成的集合称为该试验的样本空间. 通常用字母 S 来表示. 样本空间 S 的元素，也就是试验的每个结果，称为样本点.

(3)随机事件：在一次试验中可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中具有某种规律性的试验结果，称为随机事件，简称为事件. 事件是试验的样本空间 S 的子集.

(4)事件间的关系与运算

事件之间的几种关系：

①包含关系：若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A. 记为 $A\subset B$.

②相等关系：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

③互斥关系：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，基本事件是两两不相容的，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或互斥的. 即 $A\cap B=\varnothing$.

④逆（对立）关系：若对每次试验而言，事件 A,B 中必有一个发生，且仅有一个发生. 则称事件 A 与事件 B 是对立事件，即 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$. 一般地，A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}=S-A$.

事件之间的几种运算：

①和事件：事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事

件.类似地,称$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件;称$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的和事件.

②积事件:事件$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$称为事件A与事件B的积事件.也记作AB.类似地,称$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$为$n$个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件;称$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$为可列个事件$A_1,A_2,\cdots$的积事件.

③差事件:事件$A-B=\{x|x\in A$且$x\notin B\}$称为事件A与事件B的差事件.

(5)事件的运算定律

在进行事件运算时,会经常用到以下定律.其中A,B,C为事件.

①交换律:$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

②结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

③分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

④德·摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

2. 随机事件的概率及性质

(1)概率的定义:

设E是随机试验,S是它的样本空间.对于E的每一个事件A赋予一个实数,记为$P(A)$,称为事件A的概率,如果$P(\cdot)$满足:

①非负性:对任一事件A,有$P(A)\geqslant 0$;

②规范性:$P(\Omega)=1$;

③可列可加性:设$A_i,A_j\ (i,j=1,2,\cdots)$满足$A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$,则有$P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$,称$P(A)$为事件$A$的概率.

(2)概率的基本性质

①有界性:$0\leqslant P(A)\leqslant 1,P(\varnothing)=0,P(\Omega)=1$;

②有限可加性:若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

③单调性:若$A\subset B$,则$P(B-A)=P(B)-P(A)$;$P(B)\geqslant P(A)$.

④求逆公式:$P(\overline{A})=1-P(A)$.

⑤加法公式:对任意两事件A、B有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

一般地,对任意n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$;$P(A_1\cup A_2\cdots\cup A_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

(3)古典概型

①定义：如果试验满足以下两个条件：

1°试验的样本空间只包含有限个元素；

2°试验的每个基本事件发生的可能性都一样.

称此试验为等可能概型(古典概型).

②计算公式：

若等可能概型(古典概型)随机试验的样本空间 S 由 n 个基本事件构成.

事件 A 由其中 m 个基本事件组成，则 $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

(4)几何概型

①定义：如果试验满足以下两个条件：

1°试验的样本空间是一个可以度量的几何区域.

2°样本点落入 Ω 的某一可度量的子集 A 的可能性大小与 A 的几何测度成正比，与 A 的位置及形状无关.

则称此试验为几何概型.

②计算公式：

A 为 Ω 的一个可度量的子集，则 $P(A)=\dfrac{A\text{ 的几何测度}}{\Omega\text{ 的几何测度}}$.

3. 条件概率

(1)条件概率的定义及性质

①定义

已知 A、B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

②性质

条件概率 $P(\cdot|A)$ 也是概率，所以它具有以下三个性质：

1°非负性：对于每一事件 B，有 $P(B|A)\geqslant 0$；

2°规范性：对于必然事件 S，有 $P(S|A)=1$；

3°可列可加性：设 $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A).$$

(2)乘法定理

设 $P(A)>0$，则有 $P(AB)=P(B|A)P(A)$，或 $P(B)>0$，$P(AB)=P(B)P(A|B)$.

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件；$n\geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$.

(3)全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

称为全概率公式.

(4)贝叶斯(Bayes)公式

设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(A)>0$,$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},i=1,2,\cdots,n.$$

称为贝叶斯公式.

4.独立性

定义1:设 A,B 是两事件,如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A,B 相互独立,简称 A,B 独立.

定义2:设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件,如果对于其中任意2个,任意3个,…,任意 n 个事件的积事件的概率,都等于各事件概率之积,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

定理一:设 A,B 是两事件,且 $P(A)>0$.若 A,B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$.反之亦然.

定理二:若事件 A 与 B 相互独立,则下列各对事件也相互独立.

$$A\text{ 与 }\overline{B},\overline{A}\text{ 与 }B,\overline{A}\text{ 与 }\overline{B}.$$

(二)重要知识点

基础知识点中所概括的事件的关系与运算,古典概型、条件概率,概率的加法公式、乘法公式,全概率公式和贝叶斯公式以及事件的独立性都是重要的考试、考研知识点.

(三)疑难知识点

1.正确运用全概率公式和贝叶斯公式.全概率公式是先验概率公式,是由

"原因"求"结果". 贝叶斯公式称为后验概率公式，是由"结果"求"原因".

2. 正确区分两事件相互独立与两事件互不相容：两个事件相互独立是指一个事件发生的概率与另一事件是否发生没有关系. 两个事件互不相容是指两个事件不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$. 从而一事件发生的概率与另一事件是否发生密切相关.

二、易考题型解析及解题技巧总结

易考题型一　(2000 年，数学一)设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$______.

【解】　由题意可知

$$P(\overline{A\cup B})=\frac{1}{9},P(\bar{B}|A)=P(\bar{A}|B)$$

$\because A,B$ 相互独立，$\therefore P(\bar{B})=P(\bar{A})$ 即 $P(A)=P(B)$

又$\because P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-P(A)-P(A)+P(A)P(A)=\frac{1}{9}$

即 $1-2P(A)+P^2(A)=\frac{1}{9}$

解之 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(A)=\frac{4}{3}>1$(舍去).

故 $P(A)=\frac{2}{3}$.

【解题技巧总结】　此类题型是关于事件的关系与运算. 主要解题思路如下：

(1)首先要根据题意写出不同事件之间的关系并写出相应的表达式；

(2)根据已写出事件之间的关系进行正确的运算.

易考题型二　玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0,1,2 只残次品的概率相应为 0.8,0.1 和 0.1. 一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客随机地察看 4 只：若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回. 试求：

(1)顾客买下该箱的概率 α；

(2)在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β.

【解】　设 A 表事件"顾客买下所察看的一箱"，B_i 表事件"箱中恰好有 i

件残次品"$(i=0,1,2)$根据题设可知

$P(B_0)=0.8, P(B_1)=0.1, P(B_2)=0.1$,

$P(A|B_0)=1, P(A|B_1)=C_{19}^4/C_{20}^4=\frac{4}{5}, P(A|B_2)=C_{18}^4/C_{20}^4=12/19$.

(1)由全概率公式可得:

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx0.94.$$

(2)由贝叶斯公式可得:

$$\beta=P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8}{0.94}=0.85.$$

【解题技巧总结】 本题主要考查全概率公式和贝叶斯公式的应用.

全概率公式:

设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是完全事件组, $P(B_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则对于事件 A,有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

贝叶斯公式:

在全概率公式的条件下,如果 $P(A)>0$,则有

$$P(B_j|A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}(i,j=1,2,\cdots,n.)$$

易考题型三 设 A、B 是两个随机事件,且 $0<P(A)<1, P(B)>0$, $P(B|\overline{A})=P(B|A)$,则必有(　　)

A. $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$.　　　　B. $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$.

C. $P(AB)=P(A)P(B)$.　　　　D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

【答案】 C

【解】 由题设可知 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$.

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(B|\overline{A})P(\overline{A})}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(\overline{A})}{P(B)}.$$

故由条件不能判定 $P(A|B)$与 $P(\overline{A}|B)$之间的关系,因此 A,B 排除.

由 $B=(AB)\cup(\overline{A}B), (AB)\cap(\overline{A}B)=\varnothing$ 及 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$知

$$\begin{aligned}P(B)&=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=[P(A)+P(\overline{A})]P(B|A)=P(B|A)\end{aligned}$$

故 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(A)\cdot P(B)$.

故本题选 C.

【解题技巧总结】 本题主要考查条件概率和积事件的概率，解此类题型要注意以下两点：

(1)从样本空间讲，计算积事件概率 $P(AB)$ 的样本空间为 Ω，计算 $P(B|A)$ 的样本空间为 Ω_A；

(2)凡涉及 A、B 同时发生的用 $P(AB)$；凡有"包含"关系，"先后"关系，"主次"关系的用 $P(B|A)$.

乘法公式：

设 $P(A)>0,P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

一般地，设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

三、课后习题详解

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1)记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2)生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数.

(3)对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品"，如连续查出 2 个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果.

(4)在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

【解】 (1)设小班人数为 n，则 n 个人分数之和可能取值为 $0,1,2,\cdots,100n$，则平均数的可能取值为 $\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{100n}{n}$，所以样本空间为

$S=\left\{\frac{i}{n}\,\middle|\,i=0,1,2,\cdots,100n\right\}$.

(2)$S=\{x|x\geqslant 10,x\in\mathbf{Z}\}$.

(3)若用 0 表示次品，1 表示正品，则样本空间为

$S=\{00,100,0100,0101,1010,0110,1100,1110,1011,1101,0111,1111\}$.

(4)$S=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$.

2. 设 A,B,C 为三事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1)A 发生，B 与 C 不发生.

(2)A 与 B 都发生，而 C 不发生.

(3)A,B,C 中至少有一个发生.

(4)A,B,C 都发生.

(5)A,B,C 都不发生.

(6)A,B,C 中不多于一个发生.

(7)A,B,C 中不多于两个发生.

(8)A,B,C 中至少有两个发生.

【解】 (1)$A\overline{B}\overline{C}$;(2)$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$;(3)$A\cup B\cup C$;(4)ABC;(5)$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;(6)$\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}$;(7)$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;(8)$AB\cup BC\cup AC$.

3. 设 A,B 是两事件且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$.

问(1)在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值,最大值是多少?

(2)在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值,最小值是多少?

【解】 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

所以(1)当 $P(A\cup B)$ 最小时,$P(AB)$ 最大.而当 $A\cup B=B$ 时 $P(A\cup B)$ 最小,此时 $P(AB)$ 取到最大值,最大值为 $P(AB)=P(A)=0.6$.

(2)当 $P(A\cup B)$ 最大时,$P(AB)$ 最小,而当 $A\cup B=S$ 时,$P(A\cup B)$ 取得最大值 1,此时,$P(AB)$ 取得最小值,最小值为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.7-1=0.3.$$

4. 设 A,B,C 是三事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4,P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=1/8$.求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

【解】 由题意 $P(AB)=P(BC)=0$ 可知 $P(ABC)=0$,

所以
$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\&\quad-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

5. 在一标准英语字典中有 55 个由两个不相同的字母所组成的单词,若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列,求能排成上述单词的概率.

【解】 由题意,样本空间 S 的样本总数为 P_{26}^2,而事件的样本数为 55.故

$$p=\frac{55}{P_{26}^2}=\frac{11}{130}.$$

6. 在房间里有 10 个人,分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章,任选 3 人记录其纪念章的号码.(1)求最小号码为 5 的概率.(2)求最大号码为 5 的概率.

【解】 由题意样本空间 S 的样本点总数为 C_{10}^3.

(1)最小号码为 5,则必须其中一人取到 5 号,而其余 2 人从 6~10 号中任取,故样本总数为 C_5^2,所求概率为 $p_1=C_5^2/C_{10}^3=\frac{1}{12}$.

(2)与(1)同理最大号码为 5 的样本点数为 C_4^2,所求概率为 $p_2=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个定货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所定颜色如数得到定货的概率是多少？

【解】 该试验是从 17 桶中任取 9 桶，故样本空间的样本点总数为 C_{17}^{9}，而样本点数为 $C_{10}^{4}C_{4}^{3}C_{3}^{2}$，所求概率为 $p=C_{10}^{4}C_{4}^{3}C_{3}^{2}/C_{17}^{9}=\dfrac{252}{2431}$.

8. 在 1500 个产品中有 400 个次品、1100 个正品. 任取 200 个. (1)求恰有 90 个次品的概率；(2)求至少有 2 个次品的概率.

【解】 由题意样本空间总数为 C_{1500}^{200}

(1)恰有 90 个次品的选法种数为 $C_{400}^{90}\cdot C_{1100}^{110}$，则所求概率为$C_{400}^{90}\cdot C_{1100}^{110}/C_{1500}^{200}$.

(2)由概率的性质，设事件 $B=\{$至少有 2 个次品$\}$，$C_i=\{$恰有 i 个次品$\}$，则 $\bar{B}=C_0\cup C_1$

$$\therefore P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(C_0\cup C_1)=1-P(C_0)-P(C_1)$$

$$=1-C_{1100}^{200}/C_{1500}^{200}-\frac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}.$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

【解法一】 依题意样本点总数 $10\times9\times8\times7$，记 A 表示事件"4 只鞋子中至少有 2 只配成一双"，则 $\bar{A}$ 表示事件"4 只鞋子均不成双"，即"从 5 双不同鞋子中任取 4 双，再从每双中任取一只". 则 $\bar{A}$ 所包含的样本点数为 $C_5^4\times2^4$. 故 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-C_5^4\times2^4/C_{10}^4=\dfrac{13}{21}$.

【解法二】 样本点数为 $10\times9\times8\times7$，记 A_1 为事件"取出的 4 只鞋子中恰有 2 只配成一双"，A_2 为事件"取出的 4 只鞋子恰好配成两双."记 A 表示事件"4 只鞋子中至少有 2 只配成双"，则有 $A=A_1\cup A_2$，且 $A_1A_2=\varnothing$，A_1 所包含的样本总点数为从 5 双鞋子中任取一双，再从另外 4 双中取不能配对的两只，有 $C_5^1(C_8^2-C_4^1)$种取法. 从而 $P(A_1)=C_5^1(C_8^2-C_4^1)/C_{10}^4=\dfrac{12}{21}$. A_2 所包含的样本点数为从 5 双鞋子中任取 2 双的取法个数，有 C_5^2 种取法. 从而

$$P(A_2)=C_5^2/C_{10}^4=\frac{1}{21}.$$

所以 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\dfrac{13}{21}$.

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

【解】 由题意，样本空间所含样本点总数为 P_{11}^{7}，而事件"排列结果为 ability"

的样本点总数为 $1\times2\times2\times1\times1\times1\times1=4$.

故 $p=\frac{4}{P_{11}^{7}}=\frac{1}{415800}$.

11. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

【解】 依题意，样本空间总数为 4^3，记 A_i 表事件"杯子里的最大个数为 i"$(i=1,2,3)$. 则 A_1 的样本点数为 A_4^3. 故 $P(A_1)=A_4^3/4^3=\frac{3}{8}$. A_2 表示有一只杯子中放 2 只球，故在 3 个球中任取 2 球，并且在 4 只杯子中任取一只放该 2 球，而另一球放在其余 3 只杯子中的一只，共有 $C_3^2C_4^1C_3^1$ 种放法.

故
$$P(A_2)=C_3^2C_4^1C_3^1/4^3=\frac{9}{16}.$$

A_3 表示 3 只球都放在 4 个杯子中的一只，有 C_4^1 种放法，故

$$P(A_3)=C_4^1/4^3=\frac{1}{16}.$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 个铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

【解】 该试验是从 50 只铆钉中任取 3 只. 则样本空间的样本点总数为 C_{50}^3，而事件"一个部件强度太弱"表示 3 只强度太弱的铆钉同时取出，并放在同一个部件上共有 $C_3^3C_{10}^1$ 种情况. 故发生"一个部件强度太弱"这一事件的概率为

$$p=\frac{C_3^3C_{10}^1}{C_{50}^3}=\frac{1}{1960}.$$

13. 已知 $P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B|A\cup\overline{B})$.

【解】 由题意知 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.7$，$P(\overline{B})=1-P(B)=0.6$，又 $A=AB\cup A\overline{B}$，而 $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$，所以 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，有 $P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2$

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$

$$=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=\frac{1}{4}.$$

14. 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

【解】 因为 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{1}{12}$，$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$.

又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

15. 掷两颗骰子,已知两颗骰子点数之和为7,求其中有一颗为1点的概率(用两种方法).

【解法一】 点数之和为7的情况有三种:一种是6和1,一种是5和2,一种是4和3.其中一颗为1点的情况是6和1,只有一种情况,所以所求概率是$\frac{1}{3}$.

【解法二】 该试验可视为求条件概率,设事件A为两颗骰子之和为7.

事件B为一颗骰子点数为1,所求概率即为$P(B|A)$.又因为

$P(A)=\frac{6}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{6}$,

$P(AB)=\frac{2}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{18}$,

所以,$P(B|A)=P(AB)/P(A)=\frac{1}{3}$.

16. 据以往资料表明,某一3口之家,患某种传染病的概率有以下规律:

$P\{$孩子得病$\}=0.6$,$P\{$母亲得病$|$孩子得病$\}=0.5$,

$P\{$父亲得病$|$母亲及孩子得病$\}=0.4$.

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

【解】 若记A为事件"孩子得病",B为事件"母亲得病",C为事件"父亲得病",则$P(A)=0.6$,$P(B|A)=0.5$,$P(C|AB)=0.4$,又因$P(AB)=P(B|A)P(A)=0.3$,$P(ABC)=P(C|AB)P(AB)=0.12$,事件$AB=ABC\cup AB\overline{C}$,$(ABC)(AB\overline{C})=\varnothing$,由加法定理$P(AB)=P(ABC)+P(AB\overline{C})$所以$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=0.3-0.12=0.18$,即为所求概率.

17. 已知在10只产品中有2只次品,在其中取两次,每次任取一只,作不放回抽样,求下列事件的概率

(1)两只都是正品;

(2)两只都是次品;

(3)一只是正品,一只是次品;

(4)第二次取出的是次品.

【解】 设A_i为事件"第i次取出的是正品"$(i=1,2)$,则该试验的样本空间总数为C_{10}^2.

(1)$P(A_1A_2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$.