等学校函授教材

高等数学

张范荪　王作英

测绘出版社

高等学校函授教材

高 等 数 学

张范荪　王作英

测 绘 出 版 社

内 容 简 介

本书的内容是根据“全国普通高等理工院校成人教育《高等数学》教学基本要求”而选定的，其主要内容有一元及多元函数的微分学与积分学、级数以及微分方程．书中含有较多的例题与习题及思考题．

本书的特点是把课程内容与教学指导融为一体，叙述详细，说理浅显，便于自学．可作为函授、电大等成人高等教育教学用书以及从事测绘或其它工程技术人员的自学用书．

高 等 数 学

张范荪　王作英

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092 1/16・印张 39.75・字数 902 千字

1990 年 5 月第一版・1990 年 5 月第一次印刷

印数 0,001—3,000 册・定价 7.80 元

ISBN 7-5030-0023-6/O・3

前　　言

本教材是编者根据长期从事高等数学课程函授教学的实践，并结合历届函授生在学习过程中提出的问题编写而成的．其特点是把课程内容与学习指导融为一体．教材带有教案的某些色彩，对于高等数学的一些基本概念的建立以及基本理论的阐述尽量采取启发式，企图使教材既符合学科自身的规律，又符合人们的认识规律．教材中含有大量的例题（分为一般例题与综合例题），对较复杂的例题都作了详细的分析，用以培养与提高学生的解题能力．每章开始的学习要求及结束的思考题，有助于读者学习后进行自我检查．

本教材的内容，主要是根据“全国普通高等理工院校成人教育《高等数学》教学基本要求”，并参考了一九八七年国家教委颁布的“高等工业学校数学课程教学基本要求”而选定的．目录中注有*号的内容可以根据不同专业或工作的需要进行选读．

本教材已通过测绘教材委员会的审定．

在编写过程中，我们得到了华中师范大学数学系老师们的大力协助，他们评审了教材的初稿并提出了宝贵的修改意见，编者在此表示衷心的感谢．

本教材由武汉测绘科技大学张范荪主编，王作英参加编写了其中的第一篇和第二篇，教材中全部插图由王桥绘制．

由于编者水平所限，教材中难免存在不妥之处，希望读者批评指正．

编　　者

1988 年 11 月

目　　录

第一篇　一元函数的微积分学

引言　高等数学研究的主要对象是变量和函数．研究的方法是以极限概念为基础，在此基础上建立研究函数的两种互逆的运算方法——微分法与积分法，简称微积分．在函数概念中，常会遇见两个或更多个变量之间的关系，前者用一元函数表示，后者用多元函数表示．一元函数是函数概念中最简单、最重要的组成部分，因此，我们首先研究一元函数及它的微积分．

第一章　函数及其图形

本章内容提要与学习要求　本章共分三节，主要内容是介绍函数的基本知识，重点是第一节和第三节．第一节是函数概念，它是高等数学中最重要的概念之一，因而学习时，应当掌握函数概念的实质——变量间的对应规律．第二节介绍函数的几种特性，了解这些性质对我们研究函数及图形很有帮助．第三节是研究函数中最简单的一类函数——基本初等函数，同时建立初等函数的概念．最后，介绍在工程问题中常用的一类初等函数——双曲函数．

学习本章时，读者应通过具体实例理解函数的定义，认清构成函数的两要素；掌握研究函数性质的初步方法；熟悉基本初等函数的性质及其图形；搞清复合函数的概念，会熟练地分析复合函数的复合过程；必须会求函数的定义域．

§1-1-1　函数概念

一、常数与变数

在实际问题中，常常会遇到各种各样的量，如长度、重量、温度、速度等．在某一过程中，有的量取不同的值，有的量只能取一个固定的值，前者叫做变量，后者叫做常量．例如将一块铁加热，铁的重量不变，而铁的温度却变化，在加热的过程中，重量是常量，温度则是变量．

必须注意，一个量是常量还是变量，不是绝对的，要按具体情况分析，例如，在不同的地点，重力加速度是不同的，因而它是变量，但在较小地区内通常将重力加速度看成是常量．

在数学中讨论的量，常抽去其实际意义，而只考虑数值，因此，我们也将常量和变量分别叫做常数和变数．通常用 a、b、c 等字母表示常数，用 x、y、z 等字母表示变数．在高等数学中所讨论的数，一般地都是实数．

数轴是具有方向、原点、单位长度的有向直线. 任何一个实数均可用数轴上的一个点来表示. 反过来，数轴上任何一点都表示一个实数. 因此，实数和数轴上的点构成了一一对应关系.

变数所能取得的值的范围常可用区间表示. 所谓区间，是指介于两个实数之间的一切实数，而这两个实数叫做区间的端点.

设 a 与 b 为两个实数，且 $a<b$. 满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数 x 构成开区间，用符号 (a, b) 表示. 在数轴上表示如图 1-1-1(a).

满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的一切实数 x 构成闭区间，用符号 $[a, b]$ 表示. 在数轴上表示如图 1-1-1(b).

满足不等式

$$a<x\leqslant b \text{ 或 } a\leqslant x<b$$

的一切实数 x 构成半开区间，用符号 $(a, b]$ 或 $[a, b)$ 表示. 在数轴上表示如图 1-1-1(c) 或 (d).

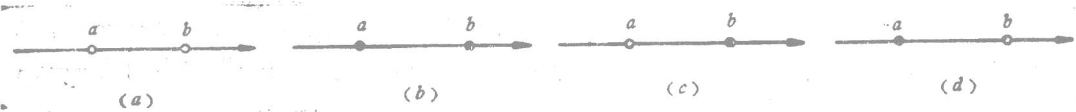

图 1-1-1

所谓闭的或开的，是指包含或不包含区间的端点.

满足不等式

$x>a$ 或 $x\geqslant a$ 或 $x<b$ 或 $x\leqslant b$ 或 $-\infty<x<+\infty$ 的一切实数 x 构成无限区间，用符号 $(a, +\infty)$ 或 $[a, +\infty)$ 或 $(-\infty, b)$ 或 $(-\infty, b]$ 或 $(-\infty, +\infty)$ 表示.

注意：上面引用的符号"$-\infty$"、"$+\infty$"分别读作"负无穷大"、"正无穷大"，它们不能作为数看待*，所以象符号 $[-\infty, \infty]$ 或 $[a, \infty]$ 都是没有意义的.

[例 1] 解下列不等式，并用区间表示不等式的解.

① $-2\leqslant-2x+3<3$； ② $|x|\leqslant2$； ③ $|x+1|>3$.

解：① 因 $-2\leqslant-2x+3<3$，有 $-5\leqslant-2x<0$.

于是 $0<x\leqslant\frac{5}{2}$，用区间表示就是 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

② 因 $|x|=\begin{cases} x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时} \\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时} \end{cases}$

*为省略起见，"$+\infty$"有时也简记为"∞".

故当$x\geqslant 0$时，$x\leqslant 2$；当$x<0$时$x\geqslant -2$. 于是$-2\leqslant x\leqslant 2$，用区间表示就是$[-2, 2]$.

③ 因 $|x+1|=\begin{cases} x+1，当 x\geqslant -1 时 \\ -(x+1)，当 x<-1 时 \end{cases}$

故当$x\geqslant -1$时，$x+1>3$即$x>2$；当$x<-1$时，$-(x+1)>3$即$x<-4$. 于是$x>2$或$x<-4$，用区间表示就是$(2, \infty)$或$(-\infty, -4)$.

在以后讨论问题时，往往要在a点研究某个性质，但是又不能孤立地从a点着手，而必须从a点附近全面地来看才能收效，所以还该用到与区间有关的邻域概念.

以a点为中心，且长度为$2\delta(\delta>0)$的开区间$(a-\delta, a+\delta)$，叫做点a的δ邻域. 也就是满足不等式

$$a-\delta<x<a+\delta$$

的一切实数x. 不等式$a-\delta<x<a+\delta$与$|x-a|<\delta$是等价的，所以用$|x-a|<\delta$表示邻域，如$|x-3|<\dfrac{5}{2}$表示点3的$\dfrac{5}{2}$邻域.

二、函数的定义

在某一变化过程中，往往同时有两个变量总是互相联系，并遵循着一定的规律变化.

［例 2］ 圆的半径r和它的面积A是两个变量，对于半径r（$r>0$）的每一个值，都对应着确定的面积A，这个规律由公式

$$A=\pi r^2$$

给出.

［例 3］ 某企业的收入与纳税是两个变量，按某种税收规定：收入在一千元以内，纳税十元；收入在五千元以内，纳税一百元；收入在五千元以上，纳税按收入的4%计算. 这两个变量之间的规律由公式

$$y=\begin{cases} 10，当 0<x<1000 时 \\ 100，当 1000\leqslant x<5000 时 \\ 0.04x，当 x\geqslant 5000 时 \end{cases}$$

给出，其中变量x表示收入，变量y表示纳税.

［例 4］ 气象台用自动温度记录仪，在一昼夜内画出的气温曲线如图 1-1-2 所示，它表示从时间$t=0$（小时）到$t=24$（小时）之间气温T（°C）的变化. T与t是两个变量，从图上可得一天内任一时刻t的温度T. 例如$t=4$小时，$T=-2$°C.

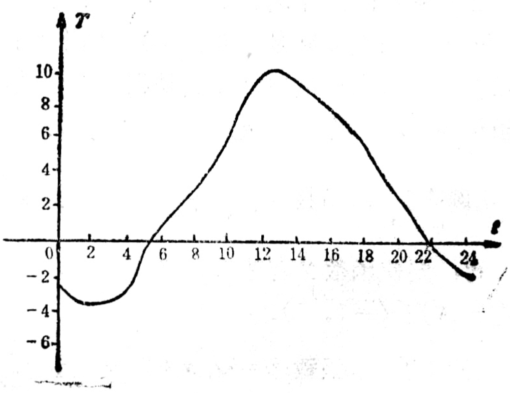

图 1-1-2

在以上诸例中，如果将各个变量的具体意义撇开，可以看到它们的共同点是：都有两

个变量，而且当一个变量的值在某一范围内确定之后，另一个变量则按照一定的规律以确定的值与之对应．我们把这样两个变量之间的关系抽象为函数．

定义　设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在某一范围 X 内任取一值，按照一定的规律，变量 y 总有确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$．x 叫自变量，y 叫因变量．

自变量 x 的取值范围 X，叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域．确定 x 与 y 的关系的规律叫做对应规律．

根据函数定义容易判断：例 2 中圆的面积 A 是半径 r 的函数，函数关系是用 $A=\pi r^2$ 给出，f 即指把自变量平方后再乘常数 π，其定义域是 $(0,\infty)$．

例 3 中

$$y=\begin{cases}10, & \text{当 } 0<x<1000 \text{ 时}\\ 100, & \text{当 } 1000\leqslant x<5000 \text{ 时}\\ 0.04x, & \text{当 } x\geqslant 5000 \text{ 时}\end{cases}$$

在 $(0,\infty)$ 内每一个 x 值，都有确定的 y 值与之对应，因此，纳税 y 是收入 x 的函数．只是当 $0<x<1000$ 时，用第一个表达式；当 $1000\leqslant x<5000$ 时，用第二个表达式；当 $x\geqslant 5000$ 时，用第三个表达式，其定义域是 $(0,\infty)$．类似这样在定义域内的不同范围上用不同关系式表示的一个函数，称为分段函数．

例 4 中气温 T 是时间 t 的函数，这一函数关系是用图象法给出，那么 f 即由图中的曲线反映出来，其定义域是 $[0,24]$．

对于自变量 x，在定义域内取定的每一个值 x_0，函数 y 有确定的值 $y_0=f(x_0)$ 与之对应，$y_0=f(x_0)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值．

函数是我们今后讨论的主要对象，因此要非常熟悉函数的定义，并深刻理解它的含义，这就要搞清下面两个问题：

1．定义域是允许自变量取值的范围．在实际问题中，函数的定义域是根据函数的实际意义来确定的．如例 2 中，自变量 r 表示圆的半径，只有 r 大于零时才有意义，所以函数 $A=\pi r^2$ 的定义域是 $(0,\infty)$．如果讨论的函数仅仅写出它的数学式，而不考虑它的实际意义，那末函数的定义域是指在实数范围内使数学式有意义的自变量的数值的全体．如函数 $y=\pi x^2$ 的定义域是 $(-\infty,\infty)$．

［例 5］　求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域．

解：要使函数 y 有意义，必须 $1-x^2>0$，即 $x^2<1$，于是有 $-1<x<1$，故函数 y 的定义域是 $(-1,1)$．

［例 6］　求函数 $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 的定义域．

解：函数 y 由两部分 $\sqrt{x+3}$ 和 $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 构成，要使 y 有意义，必须使这两部分同时有意义，于是 y 的定义域是它们公共部分，即

$$\begin{cases} x+3\geqslant 0 \\ x^2+3x+2\neq 0 \end{cases}$$

解之得 $x\geqslant -3$，但 $x\neq -2$、$x\neq -1$，故函数 y 的定义域是 $[-3, -2)$、$(-2, -1)$、$(-1, \infty)$.

2. 对应规律是因变量 y 与自变量 x 的函数关系的具体表现，它的表示方法可以是各种各样的，但常见的有三种方法：一种是公式法，就是用数学式来表示函数，如 $A=\pi r^2$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$等；另一种是图示法，就是用图形来表示函数，例如自动记录的气温曲线；再一种是表格法，就是用列表来表示函数，如三角函数表、对数表等. 无论它们的表示方法如何不同，其共同本质都是刻划因变量与自变量的依从关系，所以对应规律是函数概念中最本质的因素.

由以上分析可知，如果一个函数的对应规律及定义域已确定，那末函数值便随之而定，所以对应规律及定义域是函数定义中的两个基本要素. 至于定义中两个变量用什么字母表示是无关重要的，如 $y=x^3$ 与 $u=v^3$ 或 $s=t^3$ 都表示同一个函数.

[例 7] 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x\neq 0)$，求 $f(x)$.

解：令 $u=\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{u}$，代入原式得 $f(u)=\dfrac{1}{u}+\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}=\dfrac{1}{u}+\dfrac{\sqrt{u^2+1}}{|u|}$ 所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$.

在函数的定义中，只说 x 在某一范围 X 内任取一值，y 总有确定的值与之对应，而没有要求 y 一定要随 x 变化而变化，因此，常数可以看作是函数.

如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数只有一个确定值与之对应，这种函数叫做单值函数. 如 $A=\pi r^2$，$y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}$等都是单值函数.

如果自变量在定义域内任取一个确定值时，函数有两个或两个以上的值与之对应，这种函数叫做多值函数.

例如在直角坐标系中，半径为 a，圆心在坐标原点的圆的方程是

$$x^2+y^2=a^2$$

由方程确定 y 是 x 的函数. 当 x 在定义域 $(-a,a)$ 内取定一个数值时，由 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 确定 y 有两个值，所以 y 是 x 的多值函数.

今后如无特别声明，我们所研究的函数都是指单值函数. 遇到多值函数就把它分为单值支来讨论. 如双值函数 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$，就可以分成两个单值支 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$，这两个都是单值函数.

三、从实际问题建立函数

用数学解决实际问题，就必须用数学式把问题中各因素之间的函数关系表达出来，这

是用数学解决实际问题时的重要一环．从实际问题建立函数关系大致分以下三步：

第一步　若能作图，根据题意画出草图，可帮助我们直观理解问题的含意；

第二步　分析问题中哪些是常量，哪些是变量．在变量中选择哪一个作因变量，哪一个作自变量（当实际问题中变量的个数不只两个时，则应在确定自变量后，注意找出其余变量与自变量的关系，如果不存在这种关系，则不属一元函数的问题）；

第三步　根据已知的几何知识、物理知识和有关专业知识，分析各量之间的内在联系，然后用数学式把这关系表达出来，即为所求的函数．

［例 8］　将一个底半径为 2 厘米，高为 10 厘米的圆锥形杯做成量杯，要在上面刻上表示容积的刻度，就需要找出溶液高度与其对应容积之间的函数关系．

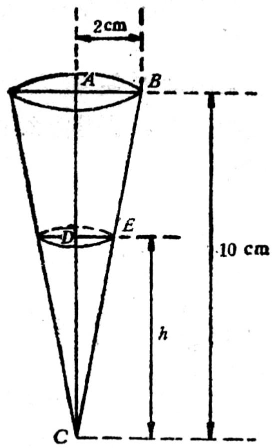

图 1-1-3

解：设溶液高度为 h 时，它对应的容积用 V 表示，r 是平行于底面的截面半径．

由圆锥体的体积公式知

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (1)$$

上式中 V、r 和 h 都是变量，由于问题要求找出 V 与 h 的函数关系，因此需要将 r 消去．

由图 1-1-3 知，$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$，因此

$$\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB} \text{ 即 } \frac{h}{10}=\frac{r}{2}，\text{则有 } r=\frac{1}{5}h \qquad (2)$$

将式（2）代入式（1）中，求得 V 与 h 的函数关系为

$$V=\frac{1}{75}\pi h^3$$

它的定义域是 $[0,\ 10]$．

［例 9］　有重量为 G 的物体放在地面上，有一大小为 F 的力作用于该物体上，此作用力与地面的交角是 $\theta\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，欲使此力沿地面的分力与物体对于地面的摩擦力平衡，F 与 θ 应有什么关系？

解：如图 1-1-4，作用力沿地面的分力的大小为 $F\cos\theta$，垂直地面的分力的大小为 $F\sin\theta$．根据库仑定律，物体对于地面的摩擦力的大小 R 是

$$R=\mu(G-F\sin\theta)$$

其中 μ 是物体对于地面的摩擦系数．

因为要使作用力沿地面的分力与摩擦力平衡，故有

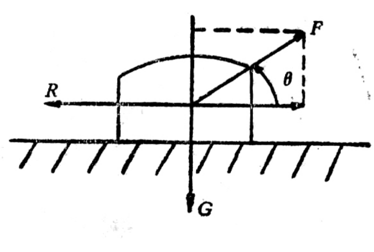

图 1-1-4

$$F\cos\theta=\mu(G-F\sin\theta)$$

即

$$F=\frac{\mu G}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$$

μ、G为常数．由题意知函数的定义域为$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

四、反函数

在两个变量的一个函数关系中，自变量和因变量的地位往往是相对的，所以不仅需要研究在变量x变化时，变量y如何相应地变化，有时也需要研究在变量y变化时，变量x如何相应地变化．

例如，对于函数

$$y=2x-5 \tag{3}$$

由自变量x的值能确定因变量y的对应值，其规律是自变量的值先乘以2再减5．如果我们把y看做自变量，则根据x、y间的关系式（3），由自变量y的值也能确定因变量x的对应值，其规律可由式（3）解出x而得到

$$x=\frac{1}{2}(y+5) \tag{4}$$

我们称式（4）所表示的函数是式（3）所表示的函数的反函数．一般地说，设已给出y是x的函数$y=f(x)$，如果将y当做自变量，x当做因变量，则由函数关系$y=f(x)$所确定的函数$x=\varphi(y)$叫做$f(x)$的反函数；相应地把$f(x)$叫做直接函数．

例如，函数$y=x^3$的反函数是$x=\sqrt[3]{y}$；函数$y=10^x$的反函数是$x=\lg y$等等．

讨论函数的习惯，一般是用x表示自变量，y表示因变量．所以常常将函数$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$改写为$y=\varphi(x)$．例如函数$y=x^3$的反函数是$y=\sqrt[3]{x}$；函数$y=10^x$的反函数为$y=\lg x$等．

反函数的图形：如果$x=\varphi(y)$是$y=f(x)$的反函数，那末由于它们是变量x与y的同一个方程，所以它们在同一个坐标平面内表示同一个图形．

如果我们同时用横坐标x表示直接函数和反函数的自变量，下面来证明：反函数$y=\varphi(x)$的图形与它的直接函数$y=f(x)$的图形关于直线$y=x$对称，如图1-1-5．

事实上，设$P(a,b)$是函数$y=f(x)$的图形上的任何一点，则$b=f(a)$，从而$a=\varphi(b)$．这就表示反函数$y=\varphi(x)$的图形上必有一点$Q(b,a)$与$P(a,b)$对应．由图1-1-5容易证明$\triangle OMQ$

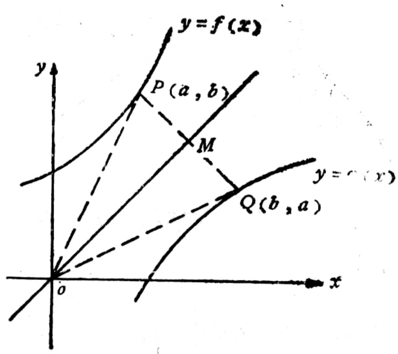

图 1-1-5