考研数学大纲配套系列辅导用书推荐

高教版 2014

考研数学 历年真题解析（数学一和数学二适用）

全国硕士研究生入学
统一考试辅导用书编委会

主 审 张 宇 王 莉

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

考研数学大纲配套系列辅导用书推荐

2014

全国硕士研究生入学
统一考试辅导用书编委会

考研数学
历年真题解析（数学一和数学二适用）

主 审 张 宇 王 莉

KAOYAN SHUXUE LINIAN ZHENTI JIEXI (SHUXUE1 HE SHUXUE2 SHIYONG)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

本书特色

分析历年真题中涉及的数学基本知识和公式、概念，归纳基本运算方法，以利于考生理出知识框架。在试题解析中，指出了试题考查的知识点，以利于备考生明确试题的立意。对部分试题给出了考生的典型运算错误及错误产生的原因，以利于备考生防范。对部分试题给出了特殊解题技巧或试题的可能变化形式，或对试题中某些条件的作用进行解说，或指出某些题目在命制时出于考查知识点或难度等因素而有意放宽题设条件等说明，目的是利于考生深入复习。

适用范围

适合理工类的考生在考研数学的整个复习阶段使用。

图书在版编目(CIP)数据

2014考研数学历年真题解析/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编. --北京:高等教育出版社，2013.5

数学一和数学二适用

ISBN 978-7-04-037282-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第080320号

策划编辑 刘 佳 责任编辑 张耀明 封面设计 于 涛 版式设计 范晓红
责任校对 刘娟娟 责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京天来印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 15.75
字 数 380千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2013年5月第1版
印 次 2013年5月第1次印刷
定 价 32.00元

物 料 号 37282-00

出版说明与使用指导

2010年以来，我国报考硕士研究生的考生呈逐年增加的趋势。另一方面，教育部对硕士研究生的数学知识，能力与素质的要求亦更加明确，表现在数学试题上更加规范化。编者通过从事考研辅导及日常的教学工作中了解到，考生由于所学的专业不同，对数学知识的要求各不一样，使用的教材也参差不齐，给参加考试带来难度，所以希望有一本基础知识系统、讲解精练、重点突出及针对性强的数学复习资料。

本书是为参加全国硕士研究生入学统一考试的考生所编写的一本数学复习资料。其目的旨在帮助考生加强与巩固基础知识、了解试题的变化趋势与动态、掌握解决数学问题的基本手段与方法、总结规律性的论证与运算技巧等。以期达到提高考生的应试能力。

本书内容由两大部分组成，第一部分为2004年至2013年全国硕士研究生入学统一考试数学试题。第二部分为这十年试题的解析，内容包括试题答案、考点、解题思路与步骤、试题解析、解题技巧、典型错误、评注、拓展变化及应试对策等内容。

为提高使用效果，达到编者的预期目的，建议考生在阅读本书时注意如下几方面事项：

1. 考点是按教育部考试中心颁布的《数学考试大纲》的内容与要求编写。通过这部分内容考生一方面要掌握该题所涉及的主要概念、方法与理论，另一方面要根据不同的概念、方法与理论出现的频率熟悉考试的重点内容。

2. 解题思路与步骤方面也应根据两类不同题型的特点区别对待。对于客观试题(选择题与填空题)，由于只要结果无需过程，对不同的解法、不同角度的处理方法的掌握是更重要的。而对于解答题(计算题、证明题、应用题及综合问题)，对解题的过程与步骤的掌握又显得更为重要。在历年评卷中，这些主要步骤都是采分点。

3. 试题解析与解题技巧方面，读者要善于认识与掌握其规律性，如积分的计算技巧中，关于被积函数的奇偶性及区间(域)的对称性所具有的性质几乎每年试题都涉及，建议考生将这部分的规律性结果，即对于重积分、曲线(曲)积分计算的相应方法归纳总结，系统掌握。

4. 易错点评或典型错误是我们多年参与评卷工作而总结出的问题，值得借鉴。

5. 拓展变化与应试对策方面，本书多以注解的形式给出，这部分内容对提高考生的认识高度与解题能力是非常有效的，应是重点掌握的内容。

我们希望读者能够按上述建议，充分利用好本书，以期达到在短时间内提高效率、了解试题变化动态、提高应试能力的目的。本书也可作为全日制高等学校的低年级本科生学习的课外参考资料。本书在编写过程中得到了张宇老师、王莉老师的悉心指导，以及李播和跨考教育考研团队的支持，在此深表感谢！

编　者

2013年3月

目　录

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题(第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 为常数,且 $c\neq 0$,则

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

(2) 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

(A) $x-y+z=-2$.　　(B) $x+y+z=0$.

(C) $x-2y+z=-3$.　　(D) $x-y-z=0$.

(3) 设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$, $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx\ (n=1,2,\cdots)$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$,则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$

(A) $\dfrac{3}{4}$.　　(B) $\dfrac{1}{4}$.　　(C) $-\dfrac{1}{4}$.　　(D) $-\dfrac{3}{4}$.

(4) 设 $L_1: x^2+y^2=1$, $L_2: x^2+y^2=2$, $L_3: x^2+2y^2=2$, $L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线.记 $I_i=\oint_{L_i}\left(y+\dfrac{y^3}{6}\right)dx+\left(2x-\dfrac{x^3}{3}\right)dy\ (i=1,2,3,4)$,则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$

(A) I_1.　　(B) I_2.　　(C) I_3.　　(D) I_4.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵.若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,且 $\boldsymbol{B}$ 可逆,则

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0,b=2$.　　(B) $a=0,b$ 为任意常数.

(C) $a=2,b=0$.　　(D) $a=2,b$ 为任意常数.

(7) 设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，$p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}(i=1,2,3)$，则

(A) $p_1>p_2>p_3$.　　(B) $p_2>p_1>p_3$.

(C) $p_3>p_1>p_2$.　　(D) $p_1>p_3>p_2$.

(8) 设随机变量 $X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$，给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$，则 $P\{Y>c^2\}=$

(A) α.　　(B) $1-\alpha$.　　(C) 2α.　　(D) $1-2\alpha$.

二、填空题(第 9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=$ ________.

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解为 $y=$ ________.

(11) 设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ (t 为参数)，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

(12) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________.

(13) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$ ________.

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\leqslant a+1\mid Y>a\}=$ ________.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

(16)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3$，$a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ) 证明：$S''(x)-S(x)=0$；

(Ⅱ) 求 $S(x)$ 的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(Ⅱ) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$ 两点,将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ. Σ 与平面 $z=0$, $z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(Ⅰ)求曲面 Σ 的方程;

(Ⅱ)求 Ω 的形心坐标.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$,记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量,证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\geqslant 2.\end{cases}$

(Ⅰ)求 Y 的分布函数;

(Ⅱ)求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 θ 的矩估计量;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量.

2013年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题（第1～8小题，每小题4分，共32分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.）

（1）设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是

（A）比 x 高阶的无穷小.　　（B）比 x 低阶的无穷小.

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小.　　（D）与 x 等价的无穷小.

（2）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$

（A）2 .　　（B）1 .　　（C）-1 .　　（D）-2 .

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则

（A）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.　　（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导.　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e},\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant \mathrm{e}.\end{cases}$ 若反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则

（A）$\alpha<-2$.　　（B）$\alpha>2$.　　（C）$-2<\alpha<0$.　　（D）$0<\alpha<2$.

（5）设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

（A）$2yf'(xy)$.　　（B）$-2yf'(xy)$.　　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$.　　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$.

（6）设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\displaystyle\iint\limits_{D_k}(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（$k=1,2,3,4$），则

（A）$I_1>0$.　　（B）$I_2>0$.　　（C）$I_3>0$.　　（D）$I_4>0$.

（7）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

（A）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价.

（B）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价.

（C）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

（D）矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0,b=2$. (B) $a=0,b$ 为任意常数.

(C) $a=2,b=0$. (D) $a=2,b$ 为任意常数.

二、填空题(第 9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}\,dt$,则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$ ________.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$,则 L 所围平面图形的面积是 ________.

(12) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为________.

(13) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$, $y_2=e^{x}-xe^{2x}$, $y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解,则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$________.

(14) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ (i,j=1,2,3)$,则 $|A|=$ ________.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

当 $x\to0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小,求 n 与 a 的值.

(16)(本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$,直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积. 若 $V_y=10V_x$,求 a 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x=3y$, $y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成,计算 $\iint\limits_{D}x^2\,dx\,dy$.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数,且 $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ) 存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

（21）（本题满分 11 分）

设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$.

（Ⅰ）求 L 的弧长；

（Ⅱ）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1$，$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形. 求 D 的形心的横坐标.

（22）（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

（23）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题(第 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^n n!$.

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续,那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\,dx\ (k=1,2,3)$,则有

(A) $I_1<I_2<I_3$. (B) $I_3<I_2<I_1$.

(C) $I_2<I_3<I_1$. (D) $I_2<I_1<I_3$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1$

$+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$

(A) $\frac{1}{5}$.　　(B) $\frac{1}{3}$.　　(C) $\frac{2}{3}$.　　(D) $\frac{4}{5}$.

(8) 将长度为 1 m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为

(A) 1.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $-\frac{1}{2}$.　　(D) -1

二、填空题(第 9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$ ________.

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ ________.

(11) $\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

(12) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\,dS=$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为 ________.

(14) 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\mid\overline{C})=$ ____.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18)(本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\y=\cos t\end{cases}\left(0\leqslant t<\frac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0,f'(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲

线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19)(本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$,再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)计算行列式 $|A|$;

(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 将 f 化为标准形.

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(Ⅰ)求 $P\{X=2Y\}$;

(Ⅱ)求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$,其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 记 $Z=X-Y$.

(Ⅰ)求 Z 的概率密度 $f(z;\sigma^2)$;

(Ⅱ)设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本,求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(Ⅲ)证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题（第 1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.）

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　（B）$(-1)^n(n-1)!$.

（C）$(-1)^{n-1}n!$.　　（D）$(-1)^n n!$.

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

（A）充分必要条件.　　（B）充分非必要条件.

（C）必要非充分条件.　　（D）既非充分也非必要条件.

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\,dx(k=1,2,3)$，则有

（A）$I_1<I_2<I_3$.　　（B）$I_3<I_2<I_1$.

（C）$I_2<I_3<I_1$.　　（D）$I_2<I_1<I_3$.

（5）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是

（A）$x_1>x_2,y_1<y_2$.　　（B）$x_1>x_2,y_1>y_2$.

（C）$x_1<x_2,y_1<y_2$.　　（D）$x_1<x_2,y_1>y_2$.

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x$，$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$，$y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (xy^5-1)\,dxdy=$

（A）π.　　（B）2.　　（C）-2.　　（D）$-\pi$.

（7）设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1$

$+\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

二、填空题(第 9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

(12) 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$ ________.

(13) 曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________.

(14) 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵. 若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，则 $|BA^*|=$ ________.

三、解答题(第 15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

(16)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)（本题满分 12 分）

过点 $(0,1)$ 作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

(19)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的表达式；

(Ⅱ) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\,\mathrm{d}t$ 的拐点.