陈建和⊙著

论不定方程

湖南师范大学出版社

陈建和⊙著

论不定方程

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

论不定方程／陈建和著．—长沙：湖南师范大学出版社，2013.5
ISBN 978－7－5648－1149－5

Ⅰ.①论…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①不定方程　Ⅳ.①O122.2
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 067918 号

论不定方程

陈建和　著

◇责任编辑：廖小刚
◇责任校对：刘亮前
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.88853867　88872751　传真/0731.88872636
网址/http：//press.hunnu.edu.cn
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：长沙市宏发印刷有限公司
◇开本：787 mm×1092 mm　1/16
◇印张：8
◇字数：150 千字
◇版次：2013 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978－7－5648－1149－5
◇定价：28.00 元

序 言

数学是科学中最精准的语言.

引力定律:$F=G\dfrac{Mm}{R^2}$,质能方程:$E=mc^2$,欧拉等式:$e^{i\pi}+1=0$.

数学是科学中最普遍的工具.

“在我的一生中,还没有如此勤奋地工作过,我已沉湎于数学的伟大,直到今天,我一直在领略数学微妙部分的纯正的高贵.”年轻的物理学家借用同样年轻的非欧几何建立了广义相对论之后,写下了他内心深处对数学的感受.

数学有许多的分支,几何、代数、拓扑、微分方程等,但唯有数论,未解决的问题比已经解决的问题多得多.数论研究的对象是数,主要是自然数.自然数,是远古的人们对自然世界数量的感知,是数学巨人自身的胚胎,也是每个现代人童年科学知识的启蒙.克罗内克的“上帝创造自然数”可以作为一种诠释.由自然数到小数,由有理数到无理数,由正数到负数,由实数到虚数,人类对数的认识由感性认识上升到理性认识.不定方程是数论的一个重要部分.高斯在1816年给他的朋友的信中写道:“我的确承认,费马大定理作为一个孤立的命题对我没有多少兴趣,因为可以容易地提出许多那样的命题,人们既不能证明它也不能否定它.”经过漫长的三百年,通过

许多数学家的努力，怀尔斯最终完成了对费马大定理的证明，那是人类理性的光辉.

费马大定理是关于三个未知数的不定方程，人们自然地要问四个未知数和四个以上未知数的不定方程.欧拉留下了关于任意个未知数的猜想：

$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{m-1}^n=x_m^n$，$m\in\mathbf{N}$，$n\in\mathbf{N}$，$m\geqslant 3$，当 $n<m$ 时，不定方程有正整数解，当 $n\geqslant m$ 时，不定方程没有正整数解.

这本书是关于不定方程的.

莱布尼兹认为："了解重大发现，特别是那些决非偶然的，经过深思熟虑而得到的重大发现的真正起源，是极为有益的."建立微积分，莱布尼兹这样写道："我终于发现了代数学对超越量的推广，也就是我的无限小算法，它包括了微分以及求和，它一旦被发现，所有这类我绞尽脑汁的问题，似乎都变成了儿童的游戏."古代的中国，求出球的体积，付出了几代数学家的努力，现代用微积分，几分钟就可求出球的体积.下面再引用伯努利的一段话："由此可见，布里亚杜编纂的大部头著作《无穷算术》是多么的劳而无功.他在该书中花了九牛二虎之力才算出的前六次幂之和，只不过是我用一页纸就能完成的工作的一部分而已."不同的数学工具，处理同样的问题，有着截然不同的效率，这也是可以理解的.举一个另类的例子.哥伦布发现新大陆，当时要把这个消息送至欧洲，需要几个月，而现在几分钟够了，船送信息和电磁波发射信息，不同的工具，那效率不可同日而语.技术的进步和知识的创新，使我们有更多的选择，这也是人类文明进步的一个最重要的推动力.

我们知道，老虎、狮子和大象是不同的，各有其特性，但在生物学家的眼里，它们与树和花草是有共性的，它们都是生物，在动物学家看来，它们同马和牛更是有共性的，它们都是动物，而且都是哺乳动物.海水、沙子、游

鱼，物理学家认为，它们和自然界的一切物质一样，都是由基本的微观粒子组成，这就是它们的共性，也是一切物质世界的共性. 一个三角形，一个四边形，一个圆，一个三棱柱，一个正方体，一个球体，对数学家而言，它们是有共性的，都可以“微”，都可以“积”. 牛顿和莱布尼兹建立微积分，就是因为他们抓住了事物的共性，抽象出了一般的理论. 微积分可以求面积，不管是什么曲线封闭而成的面积；微积分可以求体积，不管是什么曲面封闭而成的体积. 人们的直觉可以得到正方体和长方体的体积公式，但人们的直觉不可能得到球的体积公式.

在微观世界里，许多的粒子都有它的反粒子，电子的反粒子就是正电子，它是狄拉克预言的，安德森发现的，这是物理学家最早发现的正反粒子对. 在数学里，有正数和负数. 粒子和反粒子，正数和负数，它们是对立的，也是统一的. 自然世界有确定性的一面，也有不确定性的一面，它们是对立的，也是统一的. 在数学世界里，是不是只有确定性的一面呢？M·克莱因的名著《数学，确定性的丧失》值得一读.

前面提到的欧拉的猜想，体现了“统一”这一深刻思想. 只要指数小于未知数的个数，方程就有解，至于指数是2，是3，还是任意其他自然数，都是一样的. 自然世界有四种基本的力：电磁力、弱相互作用、强相互作用和万有引力. 除引力外，物理学家已经尝试把三种基本力统一起来，这是物理学家追求“统一”思想的生动的体现. 古希腊的哲学家认为，物质都是由原子构成的，是一种朴素的“统一”思想. 不定方程，是不是可以“统一”起来加以研究呢？

抓住不定方程的共性，抽象出一般的理论，然后用理论来处理一般性的问题. 现有的理论关于不定方程所获得的定性的结果以及定量的结果，新的数学理论可以获得同样的结果，不定方程中大部分的不定方程，现有

的数学理论不能处理，但新的数学理论可以处理它们，不但可以求整数解，还可以求不定方程的有理数解. 这是作者写这本书的主要原因.

数学的真理同科学的其他真理一样，是客观存在的，人们可以发现它，理解它，检验它，运用它. 数学的真理并不是人们创造出来的. 哈密顿说过“数学是人类思想的自由创造.”我虽然不完全同意这一观点，但还是用它作为我写下这本书的另一个理由. 思考是人类的共性，也是人类区别于万物的特性.“一条鱼能对它终身畅游其中的水知道些什么?”

写到这里，窗外夕阳西下，偌大的湖面，波光粼粼，苍茫的远山，沐浴着天际的晚霞，浮想起古代思想家庄子的一句名言“判天地之美，析万物之理.”

作者

2013 年 1 月 18 日

目 录

第一章　一元 n 次方程

一元一次方程,非常容易得到求根公式,一元二次方程的求根公式也不难,一元三次方程和一元四次方程的求根公式,就非常难了,但还是被 16 世纪的数学家找到. 五次或五次以上的的代数方程的求根公式,在 16 世纪后的两百多年里,数学家付出了巨大的努力,但都无一例外的失败了. 拉格朗日(Lagrange)在 1770 年发表了 200 多页的论文《关于代数方程解法的思考》,他正确地指出根的置换(或排列)的理论是解代数方程的关键所在,或借用他自己的话来说是"整个问题的真正哲学". 19 世纪伽罗瓦(Galois)的新理论,找到了"整个问题的真正哲学".

一、一元 n 次方程

1. 一元一次方程 $ax+b=0(a\neq 0)$

$x=-\dfrac{b}{a}$.

2. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

韦达(Viete)给出了一个求根公式,$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

3. 一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$

将 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 转化为 $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$，令 $\frac{b}{a}=r$，$\frac{c}{a}=s$，$\frac{d}{a}=t$，得 $x^3+rx^2+sx+t=0$. 设 $x=y-\frac{r}{3}$，$(y-\frac{r}{3})^3+r(y-\frac{r}{3})^2+s(y-\frac{r}{3})+t=0$，将此式转化为 $y^3+(s-\frac{r^2}{3})y+(t+\frac{2r^3}{27}-\frac{rs}{3})=0$. 令 $s-\frac{r^2}{3}=p$，$t+\frac{2r^3}{27}-\frac{rs}{3}=q$，我们得到方程 $y^3+py+q=0$. 令 $y=z-\frac{p}{3z}$，$z^3-\frac{p^3}{27z^3}+q=0$，变换为 $z^6+qz^3-\frac{p^3}{27}=0$. $z^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$. 注意到 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=-\frac{p}{3}$，即可得到著名的卡丹(Cardano)公式. 不过，卡丹公式是由塔塔里亚(Tartaglia)最早发现的.

卡丹公式：$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$.

当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 时，卡丹公式只能以虚数根式求解，对于此种不可约情形，韦达对方程给出了新的求根公式.

$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\alpha$，$x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\alpha+120°)$，$x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\alpha+240°)$，其中 α 由下式确定，$\cos3\alpha=-\frac{q}{2}\div\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$，$\alpha$ 在 0°到 60°之间.

一元三次方程有三个根，有可能都是实数根，也有可能是一个实数根和两个互为共轭的复数根. 不过，16 世纪的数学家还没有虚数的概念.

4. 一元四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0(a\neq 0)$

一元四次方程由费拉里(Ferrari)解决. 方法是将一元四次方程化为两

个一元二次方程与一个一元三次方程求解.

5. 一元五次以上方程

拉格朗日发现不能用求一元二次方程、一元三次方程、一元四次方程的方法来求解一元五次和一元五次以上的代数方程.

鲁菲尼(Ruffini)-阿贝尔(Abel)定理:一般地,五次和五次以上的代数方程是不可能由代数根式求解.

伽罗瓦(Galois)建立了一般的理论:五次和五次以上方程代数可解的判别准则.伽罗瓦为群论奠定了基础.群论在物理学中被用来研究对称性.

二、一元 n 次方程与无理数和超越数

$\sqrt{2}$是无理数,也是一元二次方程 $x^2=2$ 的一个根.

希伯索斯(Hippasus)发现了$\sqrt{2}$是无理数,毕达哥拉斯(Phthagoras)学派却信奉万物皆有理数.无理数的出现被视为数学史上的第一次危机.事实上,这并非数学的危机,而是数学的机遇,找到了有理数的对立面"无理数".所谓的危机,只是信仰遇到了危机.

是不是所有的无理数都是代数方程的根呢?

埃尔米特(Hermite)巧妙地证明了 e 不是一元 n 次方程的根,从而证明了 e 是超越数.接下来,林德曼(Linderman)也巧妙地证明了 π 是超越数.

$\sqrt{2}$是无理数,可用反证法,同样的方法可以证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$,$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$是无理数,但不可用来证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$也是无理数,为什么?

设$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}=\dfrac{p}{q}$，$(p,q)=1$，$p,q\in\mathbf{N}$.

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^2=\dfrac{p^2}{q^2}$，(A)

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=(\dfrac{p}{q}-\sqrt{7})^2$，(B)

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\dfrac{p}{q}-\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$，(C)

$(\sqrt{2})^2=(\dfrac{p}{q}-\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$，(D)

不难看出，(A)、(B)、(C)、(D)四式两边平方之后含根号的项分别为6，4，4，6，不比$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$的四项少，因此，用这种方法证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$是无理数是行不通的.

下面利用一元n次方程证明：

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\cdots+\sqrt{n}$为无理数，$n\in\mathbf{N}$，为非平方数.

证明：$x=\sqrt{2}$，$x^2=2$，(A)，$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$.

设$(x-\sqrt{3})^2=2$，我们有$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

$(x-\sqrt{3})^2=2$可以化为$\sqrt{3}=\dfrac{x^2+1}{2x}$.

方程两边平方有$(\sqrt{3})^2=(\dfrac{x^2+1}{2x})^2$，整理得$x^4-10x^2+1=0$，(B)，$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$x_3=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$，$x_4=\sqrt{2}-\sqrt{3}$为方程(B)的四个根.

设$(x-\sqrt{5})^4-10(x-\sqrt{5})^2+1=0$，我们有$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$，$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$，$x_3=-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$，$x_4=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

将$(x-\sqrt{5})^4-10(x-\sqrt{5})^2+1=0$转化为$\sqrt{5}=\dfrac{x^4+20x^2-24}{4x^3-16x}$，(C)，进

一步转化为 $x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576=0$,(D)

$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$,$x_2=-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$,$x_3=-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$,$x_4=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$为方程(D)的根.$-x_1$,$-x_2$,$-x_3$,$-x_4$也为方程(D)的根.

$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$为方程(D)的最大实数根,$x_5=-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}$ 为方程(D)的最小实数根.

下面证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$为无理数.

在方程(D)的基础上建立方程(E).

$(x-\sqrt{7})^8-40(x-\sqrt{7})^6+352(x-\sqrt{7})^4-960(x-\sqrt{7})^2+576=0$,(E)

由(D)知方程(E)的最大实数根为$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

$-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$为方程(E)的最小实数根.

将方程(E)改写为 $x^8+156x^6-418x^4-5972x^2-215=\sqrt{7}(8x^7+152x^5-1448x^3-1080x)$,(F)

由方程(F)可以看出,如果方程两边不为零,x 的任何实数根都不可能为有理数,否则方程(F)的左边为有理数,右边为无理数.

下面证明方程(F)的两边不能为零.

若 $8x^7+152x^5-1448x^3-1080x=0$,(G)

方程(F)的左边也必须为零.

于是有 $x^8+156x^6-418x^4-5972x^2-215=0$,(H)

$f(x)=8x^7+152x^5-1448x^3-1080x$ 为奇函数.

$g(x)=x^8+156x^6-418x^4-5972x^2-215$ 为偶函数.

对于方程(F)的根,我们有 $f(x)=-f(-x)=0$,$g(x)=g(-x)=0$.

方程(F)可以改写为 $g(-x)-\sqrt{7}f(-x)=0$,(I)

(I)可进一步变换为下式:

$$(-x-\sqrt{7})^8-40(-x-\sqrt{7})^6+352(-x-\sqrt{7})^4-960(-x-\sqrt{7})^2+576=0.$$

因为 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 为有理数，有 $8x^7+152x^5-1448x^3-1080x=0$，则 $x=-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{7}$ 也为方程(E)的根，显然与方程(E)的最小实数根为 $-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 矛盾，由此知方程(F)的两边不能为零. 我们得到结果 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 为无理数，当然，方程(F)的其他七个根也为无理数.

显然用上面的方法可以得到一般的结论：

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\cdots+\sqrt{n}$ 为无理数，$n\in\mathbf{N}$，为非平方数.

对于无理数和超越数，康托尔(Cantor)给出了一个重要的结论：无理数比有理数多得多，超越数比代数数多得多.

下面利用康托尔这一结论推出一个新的结论.

结论Ⅰ：小数点后，由 0 到 9 十个数字构成的超越数比由一个数字，两个数字，直至九个数字所构成的超越数之和要多得多.

说明：小数点后由两位数字组成的超越数是指小数点后的每位数字，要么是 a，要么是 b，而 a 和 b 是 0 至 9 中两个不同的数字. 例如最简单的刘维尔(Liouville)数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}10^{-n!}=0.110001000000000000000000010\cdots$，便是小数点后由两位数字 0 和 1 组成的超越数. 其余类似.

对于这个结论，给出一个简单的推导：

任何一个超越数，小数点后必定有无穷位.

任何一个代数无理数，小数点后必定有无穷位.

任何一个有无限循环位的有理数，小数点后必定有无穷位.

下面讨论小数点后 m 位的情形.

由 0 至 9 十个数字中的一个来填小数点后 m 位，仅给出 C_{10}^{1} 个组合.

由 0 至 9 十个数字中的二个来填小数点后 m 位，给出 $C_{10}^{2}\times 2^{m}$ 个组合.

由 0 至 9 十个数字中的三个来填小数点后 m 位，给出 $C_{10}^{3}\times 3^{m}$ 个组合.

依次类推，由 0 至 9 十个数字中的十个来填小数点后 m 位，给出 $C_{10}^{10}\times 10^{m}$ 个组合.

下面来考察一个极限值.

$S_m=C_{10}^{1}+C_{10}^{2}\times 2^{m}+C_{10}^{3}\times 3^{m}+\cdots+C_{10}^{8}\times 8^{m}+C_{10}^{9}\times 9^{m}$，

$L_m=C_{10}^{10}\times 10^{m}=10^{m}$，

$K_m=\dfrac{S_m}{L_m}$

取 $m=10$，得 $K_{10}\approx 13.2$，取 $m=20$，得 $K_{20}\approx 1.8$，取 $m=30$，得 $K_{30}\approx 0.48$，取 $m=40$，得 $K_{40}\approx 0.15$，取 $m=50$，得 $K_{50}\approx 0.052$.

显然有 $\lim\limits_{m\to+\infty}K_m=0$.

由于康托尔证明了无理数比有理数，超越数比代数数多得多，因此，由上推知由 0 至 9 十个数字组成的超越数比由两个数字、三个数字，直至九个数字组成的超越数之和要多得多. 正因为如此，超越数 π、e 有 0 到 9 十个数字是很自然的. 至于 0 到 9 等概率出现的超越数比 0 到 9 非等概率出现的超越数要多得多，作为一个问题留给读者.