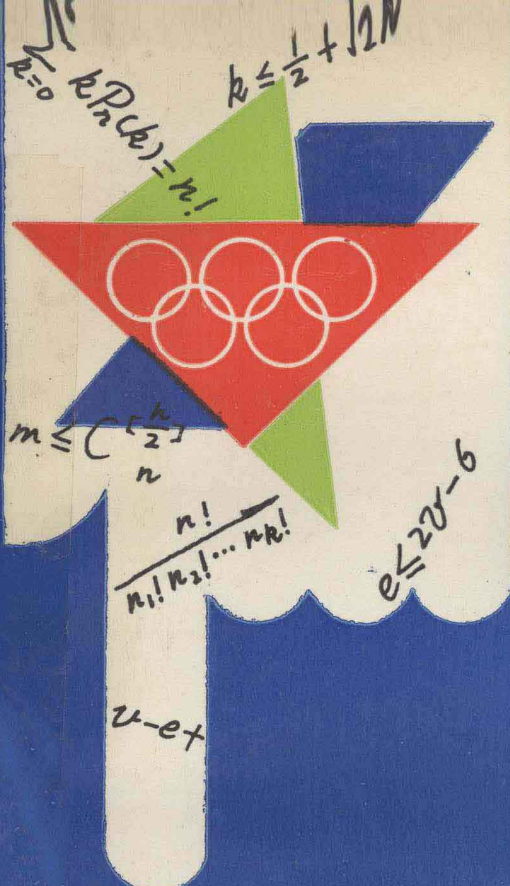

第一卷
下 册

熊 斌
刘诗雄
主 编

武汉大学
出版社

高中竞赛数学教程

高中竞赛数学教程

第　一　卷

（下　册）

主编　熊　斌　刘诗雄
编著　（以姓氏笔画为序）
冯志刚　刘诗雄
董方博　裴光亚
熊　斌

武汉大学出版社

高中竞赛数学教程

（第一卷）

（上、下册）

主编　熊　斌　刘诗雄

*

武汉大学出版社出版发行

（430072 武昌 珞珈山）

武汉华运印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　（上册）11.625 印张　（上册）300 千字
（下册）9.375 印张　（下册）242 千字

1993 年 3 月第 1 版　1995 年 12 月第 2 次印刷

印数：6001—9000（套）

ISBN 7-307-01473-4/G・208

定价：18.90 元

目　　录

第六章　复　　数

A

§6.1　复数的概念与运算

1. 复数的概念

一个复数 z 可以写成几种不同的形式：

代数形式：$z=a+bi, a, b\in \mathbf{R}$；

三角形式：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), r\geqslant 0, \theta\in\mathbf{R}$；

指数形式：$z=re^{\mathrm{i}\theta}, r\geqslant 0, \theta\in\mathbf{R}$；

$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$；角 θ 是 z 的辐角，除相差 2π 的一个倍数外是确定的，当 $0\leqslant\theta<2\pi$ 时，记为 $\arg z$；r 是 z 的模，记为 $|z|$；数 a 与 b 分别称为 z 的**实部**与**虚部**，并记为 $\mathrm{Re}(z)$ 与 $\mathrm{Im}(z)$；$\mathrm{i}^2=-1$.

两个复数相等的充要条件是它们的实部、虚部对应相等，或者它们的模与辐角主值相等.

如果 $z=a+b\mathrm{i}, w=c+d\mathrm{i}, a, b, c, d\in\mathbf{R}$，那么

$$z+w=(a+c)+\mathrm{i}(b+d),$$

在几何上对应于以 z 和 w 为邻边的平行四边形的对角线.

如果 $z=re^{\mathrm{i}\theta}, w=se^{\mathrm{i}\varphi}, r, s\geqslant 0, \theta, \varphi\in\mathbf{R}$，那么 $zw=rse^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}$. 注意 $|zw|=rs=|z||w|$ 及 $\arg zw$ 等于 $\arg z+\arg w$ 或者与 $\arg z+\arg w$ 相差 2π 的整数倍，即在相乘时，模相乘，辐角相加.

我们通过两个例子来说明复数的常用方法.

例 1　设 $|\alpha|=|\beta|=1, \alpha+\beta+1=0$. 求证：$\alpha, \beta$ 均为 1 的立方根.

证法一 运用代数形式，设 $\alpha=a+b\mathrm{i}, \beta=c+d\mathrm{i}, a, b, c, d\in\mathbf{R}$. 则由 $|\alpha|=|\beta|=1$ 有

$$a^2+b^2=1, \quad ①$$

$$c^2+d^2=1. \quad ②$$

再由 $\alpha+\beta=-1$，根据复数相等的条件得

$$a+c=-1, \quad ③$$

$$b+d=0. \quad ④$$

将上述 4 式联立，解得

$$a=c=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ d=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 可见 $\alpha^3=\beta^3=1$.

证法二 运用三角形式. 由 $|\alpha|=|\beta|=1$，可设

$$\alpha=\cos\theta+\mathrm{i}\ \sin\theta,\ \beta=\cos\varphi+\mathrm{i}\ \sin\varphi,\ \theta,\varphi\in\mathbf{R}.$$

再由 $\alpha+\beta=-1$ 有

$$\begin{cases}\cos\theta+\cos\varphi=-1,\\ \sin\theta+\sin\varphi=0.\end{cases}$$

由此求得 $\cos\varphi=-\frac{1}{2}, \sin\varphi=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而

$$\cos\theta=-\frac{1}{2},\ \sin\theta=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

证法三 考虑几何意义. 由 $\alpha+\beta=-1$ 及 $|\alpha|=|\beta|=1$，可设 $\overrightarrow{OA}=\alpha, \overrightarrow{OB}=\beta, \overrightarrow{OC}=-1$，如图 6-1. 根据复数加法的几何意义，可知四边形 $OACB$ 是平行四边形，且各边相等. 从而

$$\angle XOA=120°,\ \angle XOB=120°.$$

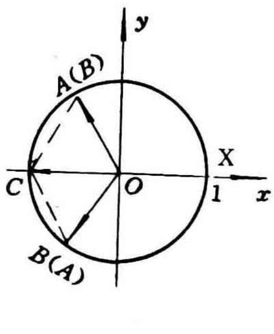

图 6-1

因此 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

证法四 运用共轭复数的运算技巧. 由

$$\alpha+\beta=-1,\ |\alpha+\beta|^2=1,$$

即$(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=1$,展开,利用$\alpha\bar{\alpha}=\beta\bar{\beta}=1$进行化简,得

$$\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+1=0.$$

将$\beta=-\alpha-1,\bar{\beta}=-\bar{\alpha}-1$代入上式,化简成

$$\alpha+\bar{\alpha}+1=0.$$

将上式两边同乘以α,得

$$\alpha^2+\alpha+1=0.$$

从而$\alpha^3=1$. 同理$\beta^3=1$.

例 2 设$z_1,z_2,z_3,\cdots,z_n$为复数,满足$\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|=1$. 求证:上述$n$个复数中,必存在若干个复数,它们的和的模不小于1/4.

证 设$z_k=x_k+\mathrm{i}y_k,x_k,y_k\in\mathbf{R}\ (k=1,2,\cdots,n)$,则$|z_k|\leqslant|x_k|+|y_k|$. 那么由题设有

$$\begin{aligned}1=\sum_{k=1}^{n}|z_k|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k|+\sum_{k=1}^{n}|y_k|\\&=\sum_{x_i\geqslant0}x_i-\sum_{x_j<0}x_j+\sum_{y_k\geqslant0}y_k-\sum_{y_l<0}y_l.\end{aligned}$$

故$\sum\limits_{x_i\geqslant0}x_i,-\sum\limits_{x_j<0}x_j,\sum\limits_{y_k\geqslant0}y_k,-\sum\limits_{y_l<0}y_l$中必有一个不小于$\frac{1}{4}$,不妨设$\sum\limits_{x_i\geqslant0}x_i\geqslant\frac{1}{4}$. 于是

$$\left|\sum_{x_i\geqslant0}z_i\right|=\left|\sum_{x_i\geqslant0}x_i+\mathrm{i}\sum_{x_i\geqslant0}y_i\right|\geqslant\left|\sum_{x_i\geqslant0}x_i\right|\geqslant\frac{1}{4}.$$

2. 复数的运算

包括求模、辐角以及复数的四则运算.

例 3 已知复数$z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha,u=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta$,且$z+u=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$. (1) 求$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$的值. (2) 求证:$z^2+u^2+zu=0$.

解 (1) 依题设,有

$$
\begin{aligned}
z+u &= (\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)\\
&=(\cos\alpha+\cos\beta)+\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta)\\
&=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

根据复数相等的充要条件，知

$$
\begin{cases}
\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{4}{5}, & ①\\[2ex]
\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{3}{5}. & ②
\end{cases}
$$

由①得

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{4}{5}. \quad ③$$

由②得

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{5}. \quad ④$$

④÷③得 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{3}{4}$. 所以

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\bigg/\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{24}{7}.$$

证 (2) 由(1)可得

$$\sin(\alpha+\beta)=\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\bigg/\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{24}{25},$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\bigg/\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{7}{25}.$$

而 $zu=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)$ $=\dfrac{7}{25}+\dfrac{24}{25}\mathrm{i}$，所以

$$
\begin{aligned}
z^2+u^2+zu &= (z+u)^2-zu\\
&=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}\right)^2-\left(\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\mathrm{i}\right)=0.
\end{aligned}
$$

例 4 设 $0<\theta<2\pi$，复数 $z=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，$u=a^2+a\mathrm{i}$，且 zu 是纯虚数，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 求复数 u 的辐角主值 $\arg u$(用 θ 的代数式表示).

(2) 记 $w=z^2+u^2+2zu$，试问：w 可能是正实数吗？为什么？

解 (1) 因为

$$zu=(1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(a^2+a\mathrm{i})$$
$$=[a^2(1-\cos\theta)-a\sin\theta]+[a^2\sin\theta+a(1-\cos\theta)]\mathrm{i},$$

且 zu 是纯虚数,所以

$$\begin{cases}a^2\sin\theta+a(1-\cos\theta)\neq 0, & ①\\ a^2(1-\cos\theta)-a\sin\theta=0. & ②\end{cases}$$

由①知 $a\neq 0$,又 $0<\theta<2\pi$,故 $1-\cos\theta\neq 0$. 所以由②可得

$$a=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

所以 $\operatorname{tg}(\arg u)=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

(i) 当 $0<\theta<\pi$ 时,$u=\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$,对应点在第一象限,所以 $\arg u=\frac{\theta}{2}$.

(ii) 当 $\pi<\theta<2\pi$ 时,$\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\pi$,复数 $u=\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$ 在第四象限,所以 $\arg u=\pi+\frac{\theta}{2}$.

(2) w 不可能是正实数. 事实上,依题设有 $w=(z+u)^2$,

$$z+u=(1-\cos\theta+a^2)+(a+\sin\theta)\mathrm{i}.$$

若 $w\in\mathbf{R}^+$,则 $a+\sin\theta=0$,即 $a=-\sin\theta$. 又

$$a=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta},\ \sin\theta\neq 0,$$

所以 $1/(1-\cos\theta)=-1$,从而 $\cos\theta=2$,这不可能.

3. 关于模与共轭复数的运算

模与共轭复数是复数的两个重要概念. 为此,我们先罗列模与共轭复数运算的一些法则和性质.

有关共轭复数的运算:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;　　(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$； (4) $\bar{z}=z\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$；

(5) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

有关模的运算：

(6) $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$； (7) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$；

(8) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，左边等号成立的条件是：与复数 z_1，z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 彼此反向；右边等号成立的条件是：与复数 z_1，z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 彼此同向.

(9) $|z|\geqslant\max\{\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\}$.

例 5 设复数 α，β，γ 满足 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$. 证明：$\dfrac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}$ 是实数.

证 因 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$，所以 $\alpha\cdot\bar{\alpha}=\beta\cdot\bar{\beta}=\gamma\cdot\bar{\gamma}=1$. 从而

$$\bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha},\ \bar{\beta}=\frac{1}{\beta},\ \bar{\gamma}=\frac{1}{\gamma}.$$

记 $p=\dfrac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}$，则

$$\bar{p}=\overline{\left[\frac{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta\gamma}\right]}=\frac{\overline{(\beta+\gamma)}\ \overline{(\gamma+\alpha)}\ \overline{(\alpha+\beta)}}{\overline{\alpha\beta\gamma}}$$

$$=\frac{(\bar{\beta}+\bar{\gamma})(\bar{\gamma}+\bar{\alpha})(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}=\frac{\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\left(\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)}{\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{1}{\gamma}}$$

$$=\frac{(\gamma+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\cdot\alpha\beta\gamma=p.$$

故命题得证.

例 6 设复数 z 在 $|z|=1$ 的条件下变动. 试求 $|z^3-3z-2|$ 的最大值和最小值.

解

$$\begin{aligned}|z^3-3z-2|&=|(z+1)^2(z-2)|\\&=|z+1|^2\cdot|z-2|.\end{aligned}\qquad ①$$

因为 $|z|=1$，所以

$$|z+1|^2=(z+1)\overline{(z+1)}=z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}+1$$
$$=2+2\mathrm{Re}(z),$$
$$|z-2|^2=(z-2)\overline{(z-2)}=5-4\mathrm{Re}(z).$$
令 $z=x+y\mathrm{i}, x, y\in\mathbf{R}$，则 $x\in[-1,1]$，有
$$|z^3-3z-2|=(2+2x)\cdot\sqrt{5-4x}$$
$$\leqslant\left[\frac{(2x+2)+(2x+2)+(5-4x)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}.$$
当且仅当 $2x+2=5-4x$，即 $x=\frac{1}{2}$ 时等式成立. 此时 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
也就是说，$z=(1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i})/2$ 时 $|z^3-3z-2|$ 达到最大值，最大值是 $3\sqrt{3}$. 又由①易见 $z=-1,2$ 时，达到最小值 0.

例 7 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为两组复数. 试证明：
$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2,$$
式中等号除 $b_k=0\quad(k=1,2,\cdots,n)$ 成立外，当且仅当存在复数 λ，使 $a_k=\lambda\overline{b_k}\quad(k=1,2,\cdots,n)$ 时成立.

证 当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时，不等式显然成立.

现设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为 0，λ 为一待定复数，并设 $a_k=\lambda\overline{b_k}+c_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 于是
$$|a_k|^2=a_k\overline{a_k}=(\lambda\overline{b_k}+c_k)(\bar{\lambda}b_k+\overline{c_k})$$
$$=|\lambda|^2|b_k|^2+|c_k|^2+\bar{\lambda}b_kc_k+\lambda\overline{b_k}\,\overline{c_k}.$$
所以
$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2=|\lambda|^2\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2+\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2+\bar{\lambda}\sum_{k=1}^{n}b_kc_k+\lambda\sum_{k=1}^{n}\overline{b_k}\,\overline{c_k}.\quad ①$$
因为 $a_kb_k=(\lambda\overline{b_k}+c_k)b_k=\lambda|b_k|^2+b_kc_k$，所以
$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2+\sum_{k=1}^{n}b_kc_k.\quad ②$$
令 $\lambda=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\Big/\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^2$，那么由②可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_kc_k=0$，从而①变为

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2=|\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2+ \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2=\left(|\lambda| \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^2+\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2$$
$$=\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right|^2+\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \geqslant \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right|^2.$$

至此,不等式得证,且等号成立的条件是

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2=0,$$

即 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$,也就是 $a_k=\lambda \overline{b_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

上述不等式是著名的**许瓦尔兹不等式**. 特别地,当 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为两组实数时,成为**柯西不等式**.

4. 应用

这里的应用侧重于运算,暂不涉及复数的几何意义.

例 8 如果 a,b 与 n 为正整数,证明:有正整数 x,y 使得

$$(a^2+b^2)^n=x^2+y^2.$$

证 令 $z=a+b\mathrm{i}$,于是 $(a^2+b^2)^n=(|z|^2)^n=(|z|^n)^2$. 设 $z^n=x+\mathrm{i}y$,因为 a,b 为整数,所以 x,y 也为整数,从而

$$(a^2+b^2)^n=(|z|^n)^2=|x+\mathrm{i}y|^2=x^2+y^2.$$

例 9 已知

$$\frac{\cos x+\cos y+\cos z}{\cos(x+y+z)}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\sin(x+y+z)}=a.$$

证明:$\cos(y+z)+\cos(z+x)+\cos(x+y)=a$.

证 令 $s=x+y+z$,由已知得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=a \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}s}.$$

取共轭得 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}=a \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}$. 从而

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+z)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+x)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s})=a.$$

因而结论成立.

例 10 设$G_n=x^n\sin nA+y^n\sin nB+z^n\sin nC$，其中$x,y,z,A,B,C$为实数并且$A+B+C$是$\pi$的整数倍. 证明：如果$G_1=G_2=0$，那么对所有正整数$n$，$G_n=0$.

证 将G_n看作表达式

$$H_n=x^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nA}+y^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nB}+z^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nC}$$

的虚部. 设对于$n=0,1,2,\cdots,k$，H_n为实数. 考虑H_{k+1}. 我们有$H_1H_k=H_{k+1}+H$，其中

$$\begin{aligned}H&=x\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}y^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kB}+x\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}z^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kC}+y\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}x^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kA}+y\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}z^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kC}\\&\quad+z\mathrm{e}^{\mathrm{i}C}x^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kA}+z\mathrm{e}^{\mathrm{i}C}y^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kB}\\&=xy\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B)}(y^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)B}+x^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)A})\\&\quad+xz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+C)}(z^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)C}+x^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)A})\\&\quad+yz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(B+C)}(y^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)B}+z^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)C})\\&=xy\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B)}(H_{k-1}-z^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)C})\\&\quad+xz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+C)}(H_{k-1}-y^{(k-1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)B})\\&\quad+yz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(B+C)}(H_{k-1}-x^{k-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-1)A})\\&=H_{k-1}(xy\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B)}+xz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+C)}+yz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(B+C)})\\&\quad-xyz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B+C)}H_{k-2}\\&=H_{k-1}P-xyz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B+C)}H_{k-2},\end{aligned}$$

其中$P=xy\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B)}+xz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+C)}+yz\mathrm{e}^{\mathrm{i}(B+C)}$.

注意$H_2=H_1{}^2-2P$，根据已知条件，H_1与H_2为实数，所以P一定是实数. 又由假设，H_{k-1}与H_{k-2}为实数. 因为$A+B+C$是π的倍数，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(A+B+C)}$为实数. 综合起来，上面的式子表明$H$为实数. 根据归纳假设，$H_k$是实数，而$H_{k+1}=H_1H_k-H$，所以$H_{k+1}$为实数，于是由数学归纳法即得本题的结论.

习题 6.1

A 组

1. 设a,b,c均为非零复数，且$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{a}$，则$\dfrac{a+b-c}{a-b+c}$的值为(　　)，令

$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

(A) 1　(B) $\pm\omega$　(C) $1,\omega,\omega^2$　(D) $1,-\omega,-\omega^2$

2. 填空题

(1) 设非零复数 x,y 满足 $x^2+xy+y^2=0$,则代数式

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1990}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{1990}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(2) 使复数

$$z=\frac{\sin x+\sin 2x+\mathrm{i}(2\cos^2 x\sin x-\mathrm{tg}x)}{\cos x-\mathrm{i}}$$

成为实数的所有 x 构成的集合是________.

(3) 设复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3,|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$,则

$$\log_3|(z_1\overline{z_2})^{200}+(\overline{z_1}z_2)^{200}|=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(4) 设 n 为使 $a_n=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}\right)^n$ 取实数的最小自然数,则对应此 n 的 $a_n=$________.

3. 证明:若对复数 z_1,z_2 成立着 $|z_1-\overline{z_2}|=|1-z_1z_2|$,则 $|z_1|,|z_2|$ 中至少有一个等于 1.

4. 证明:对于任意实数 t,复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+\mathrm{i}\sqrt{|\sin t|}$ 的模 $|z|\leqslant\sqrt[4]{2}$. 又当实数 t 取何值时,$0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}$?

5. 设两复数 α,β 满足 $\alpha^2+\beta^2=\alpha\beta$, $|\alpha-\beta|=2$. 试求

(1) $\frac{\beta}{\alpha}$ 的辐角主值;　(2) $|\alpha|$;

(3) 在复平面内以 $0,\alpha,\beta$ 对应的点为顶点的三角形面积.

6. 若 $|z|=2,u=|z^2-z+1|$,求 u 的最大值和最小值.

B 组

7. 设 $z=\sum\limits_{k=1}^{n}z_k{}^2,z_k=x_k+y_k\mathrm{i}$ $(k=1,2,\cdots,n)$,$x_k,y_k\in\mathbf{R}$,p 是 z 的平方根的实部. 求证:$|p|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$.

8. 证明:$4\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5}-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}=\frac{1}{4}\pi$.

9. 设 $(1+x+x^2)^{100}$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{200}x^{200}$. 求 $a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{198}$ 的值.

10. 确定并证明：是否可能在半径为 1 单位的圆周上找出 1990 个点，使得任两点间的距离是一有理数.

§6.2 复数及其运算的几何意义

复数可以用点和向量表示，复数集与复平面上的点集及其复平面上从原点出发的向量是一一对应的. 复数的模实际上是向量的长度，复数的辐角实际上是两向量所成的角. 复数的加法运算按照向量的平行四边形法则进行. 复数的乘、除法运算在几何上的反映就是伸缩和旋转. 具体说来，设 $z=re^{i\theta}$，复数 z_1 与向量 OZ_1 对应，那么 zz_1 的几何意义是把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 θ 角，再把 $|\overrightarrow{OZ_1}|$ 变为它原来的 r 倍. z_1/z $(z\neq 0)$ 的几何意义是把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 θ，再把 $|\overrightarrow{OZ_1}|$ 变为它原来的 $1/r$ 倍. 因此，利用复数解平面几何题的内容十分丰富，我们将另辟专讲. 本节仅从平面上点的轨迹、运用向量和几何的观点解复数题两个方面来说明复数的几何意义.

1. 平面上点的轨迹

例 1 已知平行四边形顶点 $A(0,0)$，$B(4,-3)$，点 P 内分对角线 AC 为 $2:1$. 当点 D 在以 A 为圆心，3 为半径的圆周上运动时，求点 P 的轨迹.

解 如图 6-2，设 A,B,C,D,P 对应复数 $0,z_B,z_C,z_D,z_P$，则

$$\begin{cases} z_C = z_B + z_D, & ① \\ z_C = \dfrac{3}{2}z_P. & ② \end{cases}$$

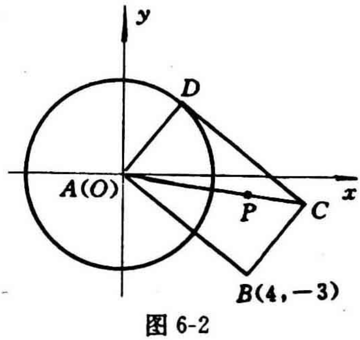

图 6-2

由①得 $z_D=z_C-z_B$. 由 $|z_D|=3$ 及②知 $\left|\dfrac{3}{2}z_P-z_B\right|=3$. 所以

$$\left|z_P-\frac{2}{3}z_B\right|=2. \qquad ③$$

将 $z_B=4-3\mathrm{i}$ 代入③，得

$$\left|z_P-(\frac{8}{3}-2\mathrm{i})\right|=2.$$

这说明所求轨迹是以点(8/3，−2)为圆心、半径长为 2 的圆.

解析几何问题，有时使用复数更为方便，当涉及对象可直接施行向量加减法运算来简化计算或与旋转有关时，尤其如此.

例 2 设复数 z 满足$\frac{z+1}{z+2}$的一个辐角的绝对值为$\frac{\pi}{6}$. 试求复数 z 所对应的点 Z 的轨迹，复数 z 的辐角主值取值范围.

解 设−2，−1 对应的点分别是 A,B. 依题设$\angle AZB=\frac{\pi}{6}$，故如图 6-3，点 Z 的轨迹为两段弓形弧（除去端点），它们的圆心分别是 O_1,O_2，其对应复数为$-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，圆的半径长均为 1.

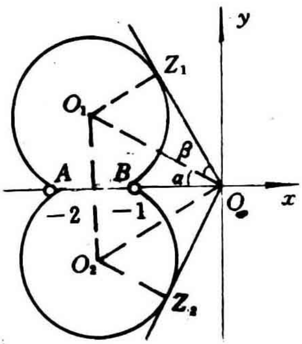

图 6-3

又如图 6-3 所示，$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$，且 $\beta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，所求复数 z 的辐角主值的取值范围为

$$(\frac{5\pi}{6}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3},\pi)\cup(\pi,\frac{7\pi}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}).$$

例 3 设 Z_1 与 Z_2 两点分别在两个圆周上以相同的角速度按相同的方向旋转. 求证：以 Z_1 与 Z_2 的连线为一边所作成的正三角形的另一顶点 P 也一定在一个圆周上运动.

证 设此两圆分别为单位圆 $|z|=1$ 及圆 $|z-a|=\rho$，其中，a 为复常数，$\rho>0$. 不妨设 Z_1,Z_2 两点用复数表示为