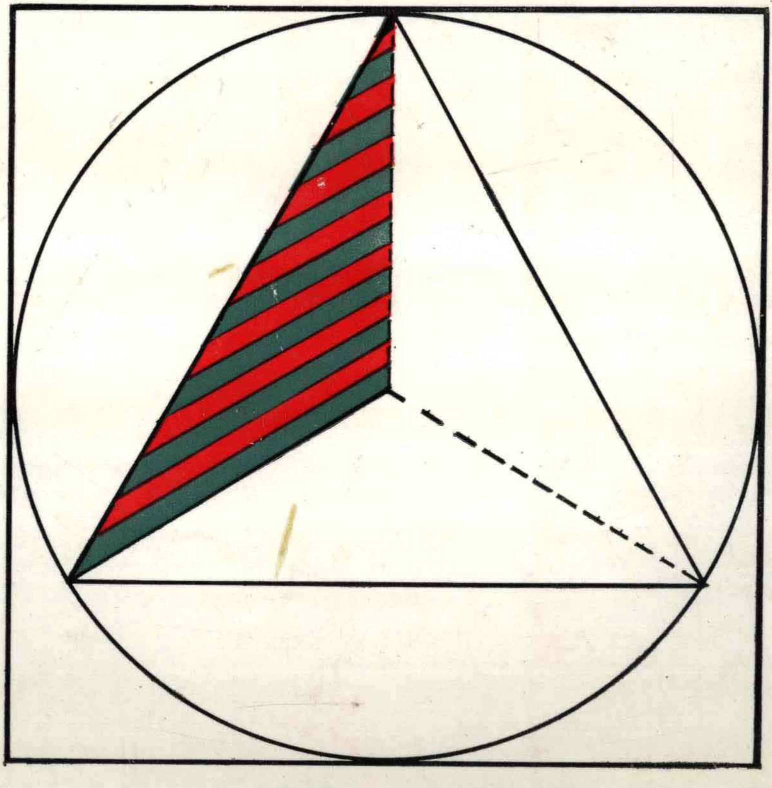
數學奧林匹克

SHU XUE AO LIN PI KE

王振鳴主編

數學教育叢書



南海出版公司

数学教育丛书

数学奥林匹克

王振鸣　主编

南海出版公司

1992 年・海口

数学奥林匹克

作　　者：王振鸣主编

责任编辑：肖仁
装帧设计：英华

南海出版公司出版发行
惠 民 县 印 刷 厂 印 刷

850×1168毫米 32开本　6.5印张　160千字
1992年2月第1版　1992年2月第一次印刷
印数：1—4100

ISBN7—80570—680—8/G·188

定价：4.00元

序

当今的世界，已进入第三次科学技术革命的新时代。知识激增、信息高度发达，已成为我们这个伟大时代的重要特征。随着科学技术的飞速发展和现代科学的数学化趋势的增强，社会对人才智能提出了更高的要求，也引起了数学教育思想的深刻变革，促进了数学教育的发展。

我国数学教育家曹才翰先生指出："在国际、国内的教育领域中，数学教育始终是最活跃的一个学科。"国际上，从六十年代的"新数学"、七十年代的"回到基础"，到八十年代的"问题解决"，数学教育的发展一日千里；在国内，学术组织林立、专业会议频繁，数学教育的研究呈现出一派生意盎然的兴旺景象。

数学教育学是研究数学教育规律的科学，是教育学、心理学、逻辑学、数学、哲学、思维学和数学史等科学的交叉学科。近年来，数学教育学已初步形成为包括教学论、学习论、课程论、方法论等多个分支学科的庞大学科群。

从 1987 年起，我们山东省高等师范院校数学教育研究会建立了教学论、方法论、学习论、思维论和数学史等专题组，开展了多种形式的学术研究和学术交流活动，在国内各种刊物上发表了一批论文，并出版了研究会论文集。在深入开展学术研究的同时，我省各高等师范院校相继开设了有关必修和选修课，促进了我省数学教育的发展。

为了适应数学教育的发展，满足高等学校和中学教师继续教育的需要，为了反映数学教育的新思想、新观点，我们研究会组织编写了《数学教育丛书》，这是我省从事数学教育研究和教学的同志们的一项研究成果。

数学教育学是一门新兴科学，正处于建设和发展阶段，它的理论

建构和学科体系还有待于深入研究。因此，编写这套丛书只是对建立数学教育学的一种尝试。我们期望得到读者的批评和建议，以便进一步修改和完善。

山东省高等师范院校
数学教育研究会理事长
汪德营
1990年10月

前　言

国际中学生的数学竞赛称为国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad)，简称IMO，因此我们常常将中学生数学竞赛称为数学奥林匹克。

我国在IMO中连年取得引人瞩目的好成绩，成为国际上公认的IMO强国，为祖国争得了荣誉。这一成绩反映了我国数学教育的水平，反映了青年一代的能力与水平，凝聚着广大教师和致力于科普工作的一批数学家的心血。

数学是掌握现代科技的一门重要的基础学科。数学竞赛活动为早期发现人才、培养人才做出了贡献，使在数学方面有兴趣、有才能的学生的能力得了充分的发挥，也使一批有才能、有事业心的教师通过这一活动发挥了自己的聪明才智，并且在辅导学生的同时提高了自己的业务水平。因此数学竞赛越来越受到广大师生和家长的欢迎，得到了有关领导的支持。

本书编写的宗旨是向在职数学教师和师范院校的学生介绍国内外数学竞赛的内容与解竞赛题的主要方法，也可作为辅导数学竞赛的培训教材。由于本书的主要对象是教师，因此，没有将初、高中内容分开编写，但高、初中竞赛的辅导都可从中选取到比较充分的内容。

本书与本丛书中已出版的"数学解题方法论"互有联系，独立成书。总体说来，前者是基础，本书是对解题方法的进一步研究，选材主要来自国内外数学竞赛题。

鉴于国内外数学竞赛的资料多数已公开出版，本书不再选配习题，读者可在学习本书内容的同时，再选做一些没有选入的竞赛题。

限于编者的水平，书中的错误和不足之处在所难免。特别是提供的解法不一定是最好的，欢迎广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正。

编　者

1992年11月

目　　录

第一章　数学奥林匹克简介

§1·1　历史发展简介

解题的竞赛在数学发展的历史过程中由来已久。近代的数学竞赛，虽然也是解题的竞赛但主要在学生之间进行。大家公认最早开展并坚持数学竞赛的国家是匈牙利。匈牙利自1894年起，每年举行一次数学竞赛，仅在二次世界大战时中断了6年，1956年因政治事件停止了一届，至1987年已进行了87届。

苏联也是开展数学竞赛活动最早的国家之一。据说1886年时就举行了数学竞赛。1934年由列宁格勒大学主办了中学生数学奥林匹克，首次将数学竞赛与奥林匹克体育竞赛相联系。1935年又由莫斯科大学主办了中学生数学奥林匹克，以后每年举行。除了1942年至1944年中断了三年外，到1987年已举办了五十届。苏联数学竞赛的特点是分年级进行，每个年级都是要求在四小时内解答五道试题。高年级的优胜者被免试推荐进入大学。

东欧的其他国家也先后开展了数学竞赛的活动，罗马尼亚早在1902年就开展了这项活动，而保加利亚、波兰、捷克斯洛伐克相继于1949年到1951年开始了数学竞赛活动。在此基础上，国际间的数学竞赛很自然地开展起来。从小型的国与国之间的比赛开始，1956年东欧国家正式确定了开展国际数学竞赛的计划。

1959年7月在罗马尼亚举行了第一届国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad，简称IMO)，有6个东欧国家和苏联共52名学生参加了竞赛。以后每年举行一次(仅在1980年中断过一次)，至1991年已举办了32届，参加的国家包括欧、美、亚、非、澳各大洲的五十多个国家。

我国的数学竞赛始于1956年，是由已故卓越的数学家华罗庚教授倡导举办的，他亲自担任北京竞赛委员会主席，主持了命题工作。

同年上海、天津、武汉也举办了数学竞赛。

我国的数学竞赛经历了曲折的道路。1958 年以后的几年，因国家处于经济困难时期，中断了数年。1962 年恢复了竞赛。1965 年以后又因政治上的原因，数学竞赛被迫中断了十余年，直到 1978 年，随着政治上的拨乱反正，华罗庚教授再一次主持了全国八省市数万名学生参加的大规模的高中数学竞赛，1979 年发展为除台湾省外的全国数学竞赛。1981 年以后，国内竞赛逐步纳入轨道，得到蓬勃发展。1985 年以后，我国开始参加历届 IMO，并连续取得优异成绩。

§1·2 全国数学联合竞赛的组织与要求

1980 年中国数学会在大连召开了第一届数学普及工作委员会会议，研究和布署了数学竞赛工作，商定将全国数学竞赛作为中国数学会及各省数学会的一项经常性工作，将全国范围内的数学竞赛正式定名为“全国各省、市、自治区联合高中数学竞赛”，1990 年后改名为“全国高中数学联赛”。1985 年开始，又举办了全国初中数学联赛。高、初中联赛每年各举行一次，分别在每年十月中旬和四月上旬的第一个星期日举行，由各省市在中国数学会的支持下轮流担任东道主。1981 年到 1991 年全国高中联赛分别由北京、上海、安徽、贵州、天津、四川、河南、江西、山东、吉林、江苏主办。试题先从各省、市、自治区征集，由主办省市组织力量进行初选，然后由主办单位邀请国内有关专家及前后届主办单位代表，召开命题会议确定试题，以保证试题的质量及其连续性、稳定性。

为统一和明确命题的要求，1989 年中国数学会普及工作委员会在济南召开了数学竞赛命题研讨会。会议决定今后高、初中数学联赛每次都分为一试、二试两部分，集中于半天之内完成。初中联赛一试时间为一小时，总分为 80 分；二试时间为一个半小时，总分为 60 分，一、二试合计为 140 分。高中联赛一试为二小时，总分 120 分；二试二小时，总分 105 分，一、二试合计总分 225 分。

命题会议还指出：数学竞赛命题必须坚持普及与提高相结合的

方针，才有旺盛的生命力。所以竞赛第一试的试题应以普及为主，试题内容不超出中学数学教学大纲的范围，试题着重考查学生掌握基本知识和基本技能的情况。竞赛第二试的试题以提高为主，在中学数学教学大纲的基础上，着重考查学生分析问题和解决问题的能力，并对能力的考查有较高的要求。

会议认为一份好的数学竞赛试题，应该同时具备以下特征：

(1)试卷的科学性。试卷在任何细小的环节上都应无懈可击，保证准确无误。

(2)试卷的目的性。试卷必须兼顾数学竞赛在普及与提高两个方面的目的，必须既有利于促进中学数学教学，又有利于发现尖子人才。因此，试卷必须既能测定学生掌握双基的情况，又能测定学生综合与灵活运用知识的能力。

(3)试卷的创新性。试卷必须由立意新颖，不落俗套的试题组成有利于考查学生的智力开发水平，提高学生学习数学的兴趣。

(4)试卷的适度性。试卷的计算量要适度，试卷整体的难度要适当。试卷各种不同难度的试题的比例也要适度。

为保证命题工作的稳定性，命题会议决定以上对命题的范围、要求、考试时间等规定，至少三年不变。

为更好地明确竞赛要求，普委会于1991年公布了初、高中数学竞赛大纲。

§1·3 中国在国际数学奥林匹克(IMO)中的崛起

IMO是世界上规模和影响最大的中学生学科竞赛活动。如果说体育奥林匹克是人类体能的大赛，那么数学奥林匹克则是世界青年智力方面的大赛。IMO推动了各国数学教育的交流，促进了数学教育水平的提高，激发了广大中学生学习数学的兴趣，为早期发现、早期培养人才发挥了重要的作用。走向IMO是中国数学工作者长期的追求。一个国家在国际数学奥林匹克中的水平，不仅反映了一个国家的中学数学教育的水平，也反映了一个国家当前以至今后一个时期

内数学学科的实力，同时，也反映了一个国家的国民的文化素质。

我国1985年才开始参加IMO，第一年只派了两名选手参赛，成绩属中下等水平。为了提高我国选手的参赛水平，自1986年开始，每年在寒假前举办数学冬令营（1991年改名为“中国数学奥林匹克”，简称CMO）。冬令营实际上是一次高水平的国内数学竞赛，在全国联赛基础上，从全国各省、市选出数十名优秀选手参加冬令营。在冬令营期间，仿照IMO的考试方式再进行一次选拔赛。即在两天内，每天各用4个半小时考三道题，每题7分，两天考试满分42分。这些题目的难度超过全国联赛试题的难度。从冬令营选拔赛中再选出20人左右组成国家集训队，经过短期集训，经集训队中再选出6名选手组成中国参加IMO的代表队。

1986年我国选派了6名学生正式组队参加在华沙举办的第27届IMO，取得团体总分第四名的好成绩，1987年在古巴举办第28届IMO，中国队取得总分第八名，六名参赛学生都获了奖（一、二、三等奖各二名）。1988年第29届IMO在澳大利亚首都堪培拉举行，规模空前，有49个国家（地区）参加。这年适逢澳大利亚建国200周年，气氛十分热烈。这一年，中国队获得令人瞩目的总分第二的好成绩。以后连续几年，中国均取得较好成绩，使中国进入了IMO强国的行列。特别第30届IMO于1989年在德国布伦瑞克举行时，中国队以比第二名高出14分的优异成绩获得总分第一名，有4名选手获得一等奖，在国际上引起了极大的反响。成绩的取得是十分不易的，表现了中国学生的聪明才智，也反映了他们的勤奋与坚强的毅力。当然与我国数学教育水平的提高及教练员辛勤的辅导是分不开的。

第31届IMO于1990年在中国北京举行，这也是IMO第一次在亚洲国家举行。我国政府及有关人士极其关心和支持这项工作。31届IMO共有54个国家参加竞赛，是IMO有史以来参赛国家最多的一届。我国成功地举办了这一届竞赛，选题工作做得十分出色，得到参赛各国的好评。我国选手也不孚众望，又一次获得了总分第一名的优异成绩。第32届IMO是1991年在芬兰举行，我国选手获得团体

总分第二名。

我国当前虽然已被世界公认为 IMO 强国之一，然而要保持下去还要付出艰巨的努力。因为各国都有一批数学家致力于这项工作，且竞赛选手也每年在不断更换，所以竞争十分激烈，成绩大起大落的国家在 IMO 的竞赛史上屡见不鲜。

今后，我们仍要坚持在普及的基础上不断提高的方针。立足于国内的实际情况，积极开展数学课外活动，不断提高数学教育水平，为我国早期发现、早期培养人才做出贡献。

第二章　数学奥林匹克解题的思维特征

上一章已经看到我国中学生在国际数学竞赛中成绩卓著。这些成绩极大地鼓舞了中学数学教师和中学生。很多教师正在以极高的热情去辅导他们的学生，很多中学生也满怀信心地以极大的兴趣在接受辅导和努力钻研。为了提高这种辅导和学习的效果，现在分析一下数学竞赛解题的思维特征是十分必要的。

思维特征之一：双基的活用与巧用。

一般来说，数学竞赛题的难度高于普通题。“难”有各种表现。表现之一就是必须活用、巧用双基才能把它解出，否则，如果仅仅停留在一般的运用上是难以奏效的。因此活用巧用双基就成为解数学竞赛题重要的思维特征之一。

例1　已知　$x = \dfrac{\sqrt{111} - 1}{2}$，求多项式

$(2x^5 + 2x^4 - 53x^3 - 57x + 54)^{1989}$ 的值。

（1989年浙江省初二数学竞赛题）

解：　由 $x = \dfrac{\sqrt{111} - 1}{2}$ 有 $2x + 1 = \sqrt{111}$，两边平方可化成 $2x^2 + 2x - 55 = 0$，用除法可知

$$\begin{aligned}&(2x^5 + 2x^4 - 53x^3 - 57x + 54)^{1989}\\ =&\,[(x^3 + x - 1)(2x^2 + 2x - 55) - 1]^{1989}\\ =&\,(-1)^{1989} = -1。\end{aligned}$$

对中学生来说，把 x 的值代入多项式去计算是正常的思路，也是一种基本技能。而本题若按常规直接代入是难以计算的。上面的解法巧用、活用一元二次方程、多项式除法的基础知识及代入法的基本技能。首先把 x 的值转化成 x 的二次三项式的值，由个体的值变成群体的值。然后把多项式从整体上进行分解，析出包含所得二次三项式的成份，而计算则用整体代入。这种计算方法对中学生来说是观念上

的飞跃。再看一例：

例 2　有甲、乙、丙三种货物，若购甲 3 件，乙 7 件，丙 1 件，共需 315 元，若购甲 4 件，乙 10 件，丙 1 件共需 420 元，现购甲、乙、丙各一件共需多少元？（1985 年全国初中数学联赛题）

解：　设购甲、乙、丙一件各需 x 元、y 元、z 元，依题意有

$$\begin{cases} 3x + 7y + z = 315, \\ 4x + 10y + z = 420。\end{cases}$$

（三个未知数只有两个方程！但经过下面的变形，把未知数的和作为一个群体看作一个未知数，使三个未知数转化成了两个未知数）

原方程组化成

$$\begin{cases} 2(x + 3y) + (x + y + z) = 315, \\ 3(x + 3y) + (x + y + z) = 420。\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x + y + z = 105。$$

从上述两例可以看出活用巧用双基的思维，来自于对概念的深刻理解，对技能的熟练掌握，而这正是我们教学目的的重要组成部分，它给我们在教学上的启示是：

（1）教师对概念必须在其实质上讲深，不可表面化。学生必须把概念学深学透，不可浅尝辄止。

（2）在基本技能、基本方法的教学中，不可把学生限制在某种一成不变的规格化的用法中，否则会使学生如同井底之蛙，目光狭窄，思维呆滞，这是活用、巧用之大敌。

思维特征之二：特殊与一般的有机结合。

“特殊”是“一般”的基础，“一般”是“特殊”的概括。这是人们认识客观世界的两个层次，在数学竞赛的某些解题过程中，把数学对象的特殊与一般的思考有机地结合起来有时是十分重要的。

例 3　计算 $\overbrace{99\cdots9}^{n个} \times \overbrace{99\cdots9}^{n个} + \overbrace{199\cdots9}^{n个}$ 。

（1983 年杭州初中数学竞赛题）

解：　设 S_n 为所求的值

（作为 n 的一般结果是难以发现计算途径的。不妨先去研究特殊情况，让 $n=1,2,3,\cdots$ 试试！）

$n=1$ 时，$S_1=9\times9+19=100=10^2$；

$n=2$ 时，$S_2=99\times99+199=(100-1)^2+100+(100-1)$

$=100^2-2\times100+1+200-1=100^2$；

$n=3$ 时，$S_3=999\times999+1999=(1000-1)^2+1000+(1000-1)$

$=1000^2-2\times1000+1+2\times1000-1=1000^2$；

由特殊推广到一般：

$$\overbrace{99\cdots9}^{n个} \times \overbrace{99\cdots9}^{n个} + \overbrace{199\cdots9}^{n个}=(10^n-1)^2+2\times10^n-1$$

$=10^{2n}-2\times10^n+1+2\times10^n-1=10^{2n}$。

我们看到上面的一般性结论是在特例的启发下获得的，而解题的最后完成却仍要借助于一般。我们再看一个思维高度灵活地往返于特殊与一般之间的实例。

例 4　我们注意到 $6!=8\cdot9\cdot10$，试求能使 $n!$ 表示成 $n-3$ 个连续自然数之积的最大整数 n。（第八届美国数学邀请赛试题）

解：题意表明存在正整数 $n\geqslant6$ 和非负整数 k 使

$$n!=(n+k)(n+k-1)\cdots(k+4), \quad ①$$

$$即\ n!=\frac{(n+k)!}{(k+3)!}\ 。 \quad ②$$

由于①式右边的因式个数为 $n-3$，少于左边因数的个数 n，所以 $k\geqslant1$。

首先，设 $k=1$，则 $n!=\dfrac{(n+1)!}{4!}$，得 $n=23$。

其次，设 $k>1$，则由②

$$(k+3)! = (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1).$$

即 $(k+3)(k+2)\cdots 5(4!) = (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)$。 ③

若 $n>23$，则 $n+1>24=4!$，③式右边每个因数都大于左边的对应因数，从而两边不可能相等。

综上所述，最大整数 $n=23$。

这个题本身是要求从一般中去推断某种特殊性质。研究这个问题，首先从一般入手，写出①式。由①式发现 k 的一般性质：$k\geqslant 1$、但进一步确定 n 的最大值发生了困难。回到特殊去！令 $k=1$ 得到 $n=23$，它是否最大？从特殊又进入一般：研究 $k>1$ 的一般情况！在一般中又用 n 的特殊值 23 对照，发现 n 大于 23 是不可能的，从而解决了问题。

由一般退到特殊，再由特殊发现一般的思维过程，是退与进辩证关系的典型表现，在思想方法上它启发了我们：解一个问题时，如果对一般情况难以下手，不妨找几个特例研究一下。反之，如果被某个具体问题所困惑，那么不妨转化成一般性问题，从而排除特殊状态中非本质现象的干扰，使问题的本质突出出来，有利于问题的解决。

思维特征之三：随机应变的双向思维。

逆向思维是相对于正向思维而言的，而所谓正向也是以通常出现的思维习惯为准。习惯性思维实际上就是定势思维。要突破定势的束缚一般说来并非易事。这就表明逆向思维有一定的难度。这里说的是逆向思维的产生和逆向思维本身都有一定的难度。而解题的效果，通常是当逆向优于正向时，才去选择它。下面的例子充分说明这一点。

例 5　首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$$

及

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$$