尚实图书
东华出品

XIANXING DAISHU

线性代数

主编 田原 沈亦一

東華大學出版社

线性代数

主　　编　田　原　沈亦一
参编人员　李　娜　陈晓龙　洪银萍
　　　　　梁亦孔　谢秋玲　熊邦松

東華大學出版社

内容提要

本书为高等工科院校教材. 全书共 7 章. 内容包括：行列式，矩阵及其运算，向量组的线性相关性，线性方程组，矩阵的相似对角化，二次型，线性空间与线性变换. 在每节后配有适量的习题. 书末附有习题答案及部分习题解法的提示. 本书内容由浅入深，叙述明确简练，适用于 32～48 课时的教学. 本书也可供工程技术人员、自学考生学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/田原，沈亦一主编. —上海：东华大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5669-0313-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①田…②沈… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 159471 号

责任编辑：杜亚玲
文字编辑：高向华
封面设计：潘志远

线性代数

主编 田 原 沈亦一

出　　版：东华大学出版社(上海市延安西路 1882 号，200051)
本 社 网 址：http://www.dhupress.net
天猫旗舰店：http://dhdx.tmall.com
营 销 中 心：021-62193056　62373056　62379558
印　　刷：苏州望电印刷有限公司
开　　本：710 mm×1 000 mm　1/16
印　　张：12.25
字　　数：260 千字
版　　次：2013 年 7 月第 1 版
印　　次：2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5669-0313-6/O・013
定　　价：28.00 元

前 言

线性代数是高等院校许多专业必修的一门数学基础课，其中线性方程组、矩阵、向量和行列式等知识在后继课程中都有着广泛的应用.线性代数的基本理念源远流长，近年来随着计算机的日益普及，它作为在现代科学的各学科研究发展中最活跃的、最被广泛应用的基础数学分支之一，越来越受到人们的重视.除此之外，线性代数的思想、内容和方法有助于发展学生的思维能力、应用能力和创新能力.

本书以教育部颁布的《高等学校工科各专业线性代数课程基本要求》为依据，根据编者多年教学实践经验编写而成.

编者本着“加强基础、拓宽面向、精简内容、注重应用、增强能力、提高素质”为目标，在内容编排上，以解线性方程组为主线，以矩阵和向量为工具，在强调矩阵的初等变换的基础上，阐述线性代数的基本概念、理论和方法.力求做到通俗易懂，循序渐进，做到将古老的数学思想渗透到数学模型中去，做到理论与实践相结合.编者将某些章节中的一些理论性较强、较抽象的内容的阐述、定理的证明以及一些开拓性的解题方法，归在相应的章节后的附录中，便于教师课堂上教学重点的把握和学生学有余力后对相关知识的加深理解.在例题和习题的选择上，在注重基本知识和基本方法掌握的同时，精选了历年的全国硕士研究生入学统一考试题和实际应用题，力求做到代表性、启发性与实用性的统一.

本书内容包括：行列式，矩阵及其运算，向量组的线性相关性，线性方程组，矩阵的相似对角化，二次型，线性空间与线性变换.在每节后配有适量的习题，书末附有习题答案及部分习题解法的提示，以便读者复习和自我检测.

本书可供高等工科院校作为教学用书，也可供工程技术人员、自学考生学习和参考.

本书由田原、沈亦一主编，第一至第七章，分别由熊邦松、洪银萍、沈亦一、谢秋玲、梁亦孔、李娜和陈晓龙执笔撰写.

本书在编写过程中，得到了上海工程技术大学领导、基础教学学院和数学教学部全体教师的关心和支持，在此表示衷心的感谢.本书也是上海工程技术大学学科建设项目《建设与培养高素质应用型人才相适应的基础学科基地》的成果之一.

尽管我们作了很大的努力，但限于编者水平，加之数学教学改革中的一些问题还有待探索，疏漏及不妥之处难免，恳请读者不吝雅正.

编　者

2013年6月

目　录

第一章 行 列 式

解(线性)方程组在科学研究和日程生活中常会遇到，这也是数学的一个基本问题. 行列式(Determinant)是线性代数一个重要研究对象. 作为线性代数中一个最基本、最常用、最有力的工具，它在数学、物理、力学以及工程技术等各领域中有着广泛的应用.

如未做特殊说明，本章将在实数范围内介绍行列式的概念、性质和行列式的计算，以及利用行列式来求解一类 n 元线性(一次)方程组的克拉默(Cramer)法则.

第一节 行列式的概念

定义 1 设有 n^2 个数排成 n 行(row)n 列(column)，称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

为 n 阶行列式，有时也简记为 $\det(a_{ij})$，其 $a_{ij}\,(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是行列式位于第 i 行第 j 列的元素，元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn}所在的位置称为行列式的主对角线.

定义 2 在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，由剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相互次序组成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；称$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，i，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

如四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

中元素 a_{31}，a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\ M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31},\ A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

行列式位于不同行不同列的 n 个数相乘，共有 $n!$ 个这样的乘积，行列式即等于这 $n!$ 个乘积的代数和(参见附录一). 也就是说，n 阶行列式表示的是一种运算法则，运算结果是一个数. 本书为突出应用，采用行列式按一行(或列)展开式来定义行列式. 可以证明此定义与附录一中行列式定义等价.

定义 3 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{1.2}$$

上式称为行列式按第 i 行展开，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，$\sum$ 表示求和. 我们不加证明地给出行列式也可以按第 j 列展开：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{1.3}$$

特别地，如果行列式 D 的第 i 行(或第 j 列)除 a_{ij} 外都为 0，则有

$$D=a_{ij}A_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

由(1.2)和(1.3)可知，n 阶行列式按行或列展开降阶，需要计算 n 个 $n-1$ 阶行列式，继续降阶可知其完全展开式将是 $n!$ 项的和或差，其每一项都是 n 个数的乘积. 如三阶行列式为 6 项的和(或差). 显见，当行列式的某行(或列)都是 0 时该行列式等于 0.

注　一阶行列式即 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$. 如一阶行列式 $|9|=9$ 和 $|-9|=-9$. 注意区别于数的绝对值.

对二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，因为 $A_{11}=a_{22}$，$A_{12}=-a_{21}$，因此按第 1 行展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

类似的，对三阶行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

对于二、三阶行列式的计算，还可以采用如下对角线法则. 二阶行列式等于主对角线两数乘积减去次对角线两数乘积，如图 1-1；三阶行列式展开式有 6 项，每一项为取自不同行不同列的 3 个元素的乘积，沿实线的 3 项乘积带正号，沿虚线的 3 项乘积带负号，如图 1-2.

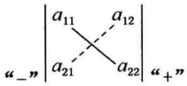

图 1-1

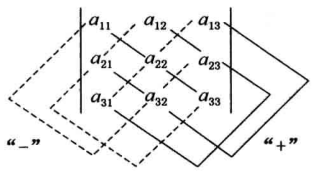

图 1-2

需要注意地是，$n \geqslant 4$ 时，n 阶行列式不再有类似的对角线法则.

【例 1】 二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，用消元法求得其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

容易看出，二元线性方程组的解用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为方程组的系数行列式，而 D_1，D_2 是方程组右边的常数项 b_1，b_2 分别替换系数行列式的第 1、2 列所得.

【例 2】 用二阶行列式求解方程组

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2=9, \\ -5x_1+x_2=13. \end{cases}$$

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=3-(-25)=28\neq 0$，又

$$D_1=\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}=9-65=-56,\ D_2=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -5 & 13 \end{vmatrix}=39-(-45)=84,$$

得方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-56}{28}=-2$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{84}{28}=3$.

【例 3】 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D=3\times 5\times 3+(-2)\times 2\times 4+0\times 1\times(-1)-3\times 2\times(-1)$
$\quad -(-2)\times 1\times 3-0\times 5\times 4=41.$

类似的，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

当其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，其解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_i(i=1,2,3)$ 是系数行列式 D 中的第 i 列被方程组等号右边常数项 b_1，b_2，b_3 替换所得.

【例 4】 如图 1-3 电路网络有 3 个节点 X、Y、Z 和接地点 E，在每个支路上的电阻如图 3(单位：欧姆). 在 X、Y、Z 点向网络各通入电流 1 安培，求 3 个节点的电位(单位：伏特).

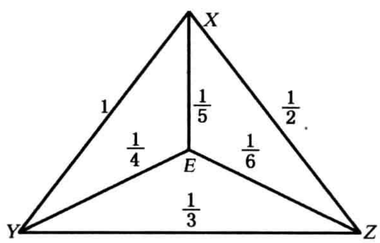

图 1-3

解 设节点 E 电位为 0,节点 X、Y、Z 的电位分别为 U_1, U_2, U_3. 由基尔霍夫电流定律得

$$\begin{cases}(U_1-U_2)+5U_1+2(U_1-U_3)=1,\\(U_2-U_1)+4U_2+3(U_2-U_3)=1,\\2(U_3-U_1)+6U_3+3(U_3-U_2)=1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}8U_1-U_2-2U_3=1,\\-U_1+8U_2-3U_3=1,\\-2U_1-3U_2+11U_3=1.\end{cases}$$

其系数行列式 $D=\begin{vmatrix}8&-1&-2\\-1&8&-3\\-2&-3&11\end{vmatrix}=577\neq 0$, 又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-1&-2\\1&8&-3\\1&-3&11\end{vmatrix}=115,\ D_2=\begin{vmatrix}8&1&-2\\-1&1&-3\\-2&1&11\end{vmatrix}=127,$$

$$D=\begin{vmatrix}8&-1&1\\-1&8&1\\-2&-3&1\end{vmatrix}=108.$$

因此 3 个节点 X、Y、Z 电位分别为

$$U_1=\frac{D_1}{D}=\frac{115}{577},\ U_2=\frac{D_2}{D}=\frac{127}{577},\ U_3=\frac{D_3}{D}=\frac{108}{577}.$$

【例 5】 证明下三角行列式(主对角线上方的元素全为 0)

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 因第 1 行除第 1 个数外均为 0,将行列式依次按第 1 行展开,

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

注意,等式中第 2 个等号后的行列式是$(n-1)$ 阶下三角行列式.

读者可尝试每次按最后一列展开来降阶证明. 同理可得

上三角行列式(主对角线下方元素全为0) $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

对角行列式(主对角线之外的元素全为0) $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

【例6】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

证 注意到行列式第5列只有一个非零数,所以将行列式按第5列展开可得

$$D=(-1)^{2+5}\times 5\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}=-5\times(-1)^{1+1}\times 4\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=560.$$

【例7】 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解 将行列式逐次按第1列展开:

$$D=(-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{n+1+n-1+1+1+\cdots+1+1}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

由于 n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项，随着 n 的增加，行列式的展开式中项数呈几何级数增加，用定义来计算高阶行列式几乎不可能. 但前述几个行列式表明，如果行列式元素中有很多零，特别是某一行或列有多个零时，计算量将会大大降低. 那么，能不能将行列式化成这些类型的行列式呢？下节行列式的性质提供了这种可能.

习题 1-1

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} a-b & -2a \\ 2b & a-b \end{vmatrix}$，　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$，　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，

(4) $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$，　(5) $\begin{vmatrix} ab & -ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & -cf & ef \end{vmatrix}$，　(6) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 用定义证明.

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = 0$，

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$.

3. 用行列式求解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 3x-2y=6, \\ 3x+8y=96. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x-2y+z=-8, \\ 4x+5y-2z=29, \\ x+y+z=-1. \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1-x_2-x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$

第二节　行列式的性质　克拉默法则

一、行列式的性质

定义 4　设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列互换，所得到的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T} 或 D'，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明见附录一.

这一性质也说明行列式中行、列的地位等同. 凡是对行成立的行列式的性质对列也成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证明见附录一.

推论 1 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

证 互换行列式相同的这两行(列)，即得 $D=-D$，故 $D=0$.

推论 2 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

证 设 n 阶行列式 D_1 是将行列式(1.1)的第 j 行元素用第 i 行对应元素替换所得，然后将 D_1 按第 j 行展开即有

$$D_1=a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn},$$

又 D_1 的第 i 行和第 j 行相同，因此

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j).$$

类似的，将行列式(1.1)的第 j 列元素替换成第 i 列对应元素可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

综上可得 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j; \end{cases}$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\left(\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\right)$$

性质 3 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

证 设 n 阶行列式 D_1 的第 i 行有公因子 k,而 D 是没有该因子时对应的行列式,A_{ij} 是 D 的代数余子式. 显然,D 和 D_1 的第 i 行有相同的代数余子式. 将 D_1 按第 i 行展开

$$D_1=\sum_{j=1}^{n}(ka_{ij})A_{ij}=k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=kD.$$

用 $r_i\div k(c_i\div k)$ 表示从第 i 行(列) 中提出公因子 k.

推论 1 行列式的某一行(列)所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

用 $r_i\times k(c_i\times k)$ 表示将第 i 行(列) 的所有元素乘以 k.

推论 2 行列式的某一行(列)所有的元素全为零,则行列式等于零.

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5 行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式值不变.

用 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$ 表示将第 j 行(列) 的所有元素乘以 k 加到第 i 行(列) 的对应元素上. 例如

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal[c_i+kc_j]{}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

请读者完成以上性质的证明.

利用上述性质可以把行列式某行(列)中尽可能多的元素化为零. 计算行列式的一种常用方法是化行列式为上(下)三角行列式,再利用上节例 5 的结论,从而求得行列式的值.

【例 8】 计算 $D=\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & -6\\ 2 & 1 & -5 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-2r_1}\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 7 & -5 & 13\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 12\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-3r_3}\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 12\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-7r_2]{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 7 & -37\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-\frac{7}{3}r_3}\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 1 & -2 & 7\\ 0 & 0 & 3 & -12\\ 0 & 0 & 0 & -9\end{vmatrix}$$

$=-27$.

上述过程中,第 2 个等号是为了尽量避免后面计算出现分数,减少部分麻烦,必要时还可以互换两行.

【例 9】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}$.

解 行列式 D_n 每一行之和相等,因此将其第 2 列至第 n 列都加到第 1 列

$$D_n\xlongequal[\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3\\ \cdots\\ c_1+c_n}]{}\begin{vmatrix}x+\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ x+\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i & x & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x+\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}\\ x+\sum\limits_{i=1}^{n-1}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{n-1}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n)]{r_i-r_1}(x+\sum_{i=1}^{n-1}a_i)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_{n-1}\end{vmatrix}$$