21世纪 CENTURY

高等学校规划教材

计算方法

（第三版）

钱焕延 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

面向21世纪高等学校规划教材

计算方法

（第三版）

钱焕延　编著

西安电子科技大学出版社

2007

图书在版编目(CIP)数据

计算方法/钱焕延编著. —3版. —西安：西安电子科技大学出版社，2007.6
面向21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-5606-0294-3

Ⅰ. 计… Ⅱ. 钱… Ⅲ. 计算方法—高等学校—教材 Ⅳ. O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第066845号

策　　划　毛红兵
责任编辑　张　梁　毛红兵
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　邮　编　710071
http://www.xduph.com　E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2007年6月第3版　2007年7月第16次印刷
开　　本　850毫米×1163毫米　1/16　印张9.75
字　　数　233千字
印　　数　94 001～98 000册
定　　价　14.00元
ISBN 978-7-5606-0294-3/TP·0101

XDUP 0564043-16

第三版前言

本教材自 1994 年出版修订版以来，受到了广大师生和读者的厚爱与支持，在此表示衷心的感谢。

随着计算机应用技术的迅速发展，数值计算已被广泛应用于各个领域。在出版社的关心和支持下，我们根据高等学校相关专业课程的要求，结合多年的教学实践，对本教材作了进一步修订：

(1) 对各章的引言部分进行了修改，并对部分章节的内容进行了增删和调整；

(2) 对图、表和文中的错误进行了修正；

(3) 对各章节标题进行了重新编排以进一步规范。

本教材从实际出发，阐述了数值计算中的基本理论和基本方法。本教材共分七章，主要内容包括误差、一元非线性方程的解法、线性代数计算方法、插值法、数值积分、常微分方程数值解法和最优化方法等。本教材中对常用的方法给出了计算步骤和计算框图，便于读者编制计算程序和上机操作。此外，各章都配备有较丰富的例题和一定数量的习题，便于读者通过练习和实践，加深对相应章节内容的理解和掌握。

本教材注意到专业层次的特点，选材深浅适度，内容力求精选，文字通俗简练。本书适合各类高等学校本、专科相关专业选用，参考学时为 80 左右；而只开设 60 左右学时的有关专业，可略去教材中注有“*”的章节。

本书由南京理工大学钱焕延教授编写。限于编者的水平和经验，书中难免存在疏漏，恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 2 月于南京

第一版前言

本教材按机械电子工业部制定的工科电子类专业教材 1991 年～1995 年编审出版规划，由大专计算机教材编审委员会基础编审小组组织征稿、评选、推荐出版。

本教材由南京有线电厂职工大学赵晓彬同志主编，南京建筑工程学院金炳陶副教授主审。

在生产实践和科学技术领域中，要解决的计算问题非常广泛，使用的数值方法也多种多样。本书从实际出发，采用由简单到复杂，由特殊到一般的叙述方法，阐述了数值计算中的基本理论和基本方法，内容力求精选，文字通俗简练。教材共分为七章：第一章为误差，介绍了绝对误差、相对误差、有效数字和算法的数值稳定性等概念；第二章为一元非线性方程的解法；第三章为线性代数计算方法，该章着重叙述了求解线性方程组的一些数值方法；第四章为插值法，用代数多项式来近似地代替较复杂的函数(或由表格给出的函数)；第五章为数崛值积分，介绍了几个常用的求定积分数值解的方法；第六章为常微分方程数值解法，主要讨论一阶常微分方程初值问题的几个数值方法；第七章为最优化方法，研究多元函数极小化问题。为适应现代电子计算机的高速发展，书中对常用的算法给出了计算步骤，并配有相应的计算框图，以便于读者编制程序和上机操作。此外，各章都配有较丰富的例题和一定数量的习题，通过练习，可以加深对各章内容的理解和掌握。全书参考学时为 80，而对只开设 60 学时的有关专业可略去教材中注有“＊”的部分章节，或根据专业的需要自行删节。

参加教材编审工作的还有苏州市职工大学俞咏薇副教授、本

校胡玉峰老师，他们对本书提出了许多宝贵意见和建议，在此谨向他们表示深切的谢意。

限于编者的水平和经验，书中定有不少缺点和错误，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

1993 年 8 月

目　录

第1章 误 差

在现代科学研究和工程设计中，许多实际问题最终都可以归结为数学问题。为了获得人们所需的结果，必须将实际问题转变为数学理论问题(一般为数学模型)，再将数学理论问题转化为数值计算问题。

数值计算必须依靠各类计算工具进行，现代化计算工具主要是电子计算机。但不管多高精度的计算机，都只能取有限位数值进行计算。在数值计算中，从实际问题到获得计算结果的过程，理想的准确值往往是得不到的，人们常常采用与准确值相近的近似值来代替，这样就产生了差异。我们将准确值与其近似值的这种差异称为**误差**。为了刻画近似结果的精度，我们要对此误差作必要的估计和分析。因此误差理论在数值计算中是很重要的。

本章主要介绍误差的基本概念(包括误差的来源、绝对误差和绝对误差限、相对误差和相对误差限、有效数字)、数的表示及运算、算术运算结果的误差、算法的数值稳定性等。

1.1 误差的基本概念

1.1.1 误差的来源

数值计算中，若不是因疏忽导致误写数字或误用公式等，一般来说，不可避免的误差大体有四种：模型误差、量测误差、截断误差和舍入误差。

1. 模型误差

用数值计算方法解决科学技术中的实际问题，必须首先建立数学模型。而数学模型总是在感性认识的基础上，抓住主要因素，忽略一些次要因素的情况下获得的，故只能近似地描述所给的实际问题，这样就会与实际问题之间存在一定的差异，从而出现了误差。这种误差通常称之为**模型误差**。

例如，气体的体积 V 与压强 P 之间的关系式为

$$PV = C$$

其中，C 为常数。该数学模型就是忽略了自然现象中的一些次要因素而获得的，它与实际问题之间就存在模型误差。

2. 量测误差

数学模型常常包含了若干参变量，如长度、温度、重量、比重、加速度、阻力系数等。这些量一般是通过量测得来的，而量测的结果不可能绝对准确，这与量测器具和具体量测人员有关，因此量测的数据总是近似的，从而就产生了误差。这种误差通常称为**量测误差**。

例如，设某金属棒在温度 t 时的长度为 l_t（0℃时金属棒的长度为 l_0），模型长度为 L_t，则

$$l_t \approx L_t = l_0(1 + \alpha t + \beta t^2)$$

其中，$l_0 \equiv 1$；α、β 为参数，可估计为

$$\alpha = 0.001\ 253 \pm 10^{-6}$$

$$\beta = 0.000\ 068 \pm 10^{-6}$$

于是知，$l_t - L_t$ 为模型误差；10^{-6} 是量测 α、β 而产生的误差，因此为量测误差。

3. 截断误差

在计算过程中，我们常用收敛无穷级数的前 n 项代替无穷级数，即抛弃了无穷级数的后段。这样得到的误差称为**截断误差**。

例如

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\ln x(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad -1 < x \leqslant 1$$

当 $|x|$ 很小时，常用 x 代替 $\sin x$ 和 $\ln(1+x)$，它们的截断误差大约分别为 $\frac{1}{6}x^3$ 和 $\frac{1}{2}x^2$。

4. 舍入误差

在具体运算时，还会经常用到一些无理数及循环小数，例如 π、e、$\sqrt{2}$、1/3、1/7 等。在数值计算时，这些数只能近似地表示，这样就产生了误差。这种误差称为**舍入误差**。

舍入的方法较多，有**收尾法**（只入不舍）、**去尾法**（只舍不入）和**四舍五入法**等，本教材将主要采用人们熟知的四舍五入法。

其实，实际计算中总是按有限位数进行的，所以数值计算的每一步都不可避免地有舍入误差的影响。

综上所述，在数值计算中常会出现诸如模型、量测、截断、舍入等误差。一旦数学模型建立以后，我们只考虑后两种误差，即截断误差和舍入误差。因为数值计算方法的研究，主要是在已给数学模型的基础上进行的，所以本教材只考虑截断误差和舍入误差。

1.1.2　绝对误差和绝对误差限

1. 绝对误差

定义 1.1　假设某一量的准确值为 x，近似值为 x^*，则 x 与 x^* 之差叫做近似值 x^* 的**绝对误差**（简称**误差**），记为 $\varepsilon(x)$，即

$$\varepsilon(x) = x - x^* \tag{1-1}$$

$|\varepsilon(x)|$ 的大小标志着 x^* 的精确度。一般地，在同一量的不同

近似值中，$|\varepsilon(x)|$越小，x^* 的精确度越高。

2. 绝对误差限

由于准确值 x 一般不能得到，于是误差 $\varepsilon(x)$的准确值也无法求得，但在实际测量或计算时，可根据具体情况事先估计出它的大小范围。也就是指定一个适当小的正数 ξ，使得

$$|\varepsilon(x)| = |x - x^*| \leqslant \xi \tag{1-2}$$

这时，ξ 就称为近似值 x^* 的**绝对误差限**。

有时也用

$$x = x^* \pm \xi \tag{1-3}$$

表示近似值的精度或准确值的所在范围。

在实际问题中，绝对误差一般是有量纲的量。例如，测得某一物件的长度为 10 m，其绝对误差限为 0.01 m，通常将准确长度 s 记为

$$s = (10 \pm 0.01)\mathrm{m}$$

即准确值在 10 m 左右，但不超过 0.01 m 的绝对误差限。上述这些量均具有长度的量纲(L)。

1.1.3 相对误差和相对误差限

1. 相对误差

绝对误差并不足以表示近似值的好坏。例如，设

$$x_1 = 100 \pm 1$$
$$x_2 = 1000 \pm 1$$

显然，近似值 $x_1^* = 100$ 的绝对误差限与 $x_2^* = 1000$ 的绝对误差限相同，不过，后者应比前者精确。

可见，决定一个量的近似值的精确度，除了要看绝对误差的大小之外，还必须考虑到该量本身的大小，也即误差相对于该量本身的情况。据此，我们引进相对误差的概念。

定义 1.2 绝对误差与准确值之比

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x} = \frac{x - x^*}{x}, x \neq 0 \tag{1-4}$$

称为 x^* 的**相对误差**。

由于准确值 x 往往是不知道的，因此在实际问题中，常取

$$\varepsilon_r(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x^*}$$

很显然，上例 x_2^* 的相对误差为 1/1000，而 x_1^* 的相对误差为 1/100。一般地，在同一量或不同量的几个近似值中，$|\varepsilon_r(x)|$值小者精确度高。由于相对误差是一个比值，因此它是无量纲的量。

由式(1-4)可知，相对误差可以由绝对误差求出；反之，绝对误差也可由相对误差求出，其关系是

$$\varepsilon(x) = x\varepsilon_r(x) \tag{1-5}$$

在对近似值运算结果的误差进行分析时，相对误差更能反映出误差的特征。因此，在误差分析中，相对误差比绝对误差显得更为重要。

2. 相对误差限

在实际计算中，由于 $\varepsilon(x)$与 x 都不能准确地求得，因此相对误差 $\varepsilon_r(x)$也不可能准确地得到，所以也像绝对误差那样，只能估计它的大小范围，即指定一个适当小的正数 η，使

$$|\varepsilon_r(x)| = \frac{|\varepsilon(x)|}{|x|} \leqslant \eta \tag{1-6}$$

这时，η 就称为近似值 x^* 的**相对误差限**。

例 1.1 给定 $g(x)=10^7\times(1-\cos x)$，试用四位数学用表求 $g(2°)$的近似值。

解 可用两种方法进行计算，具体步骤如下：

(1) 方法一：

由于

$$\cos 2^\circ \approx 0.9994$$

故直接计算 $g(2^\circ)$，有

$$g(2^\circ) = 10^7(1-\cos 2^\circ) \approx 10^7(1-0.9994) = 6000$$

(2) 方法二：

应用三角函数公式，有

$$g(x) = 10^7(1-\cos x) \equiv 2\times 10^7 \sin^2 \frac{x}{2}$$

由于，$\sin 1^\circ \approx 0.0175$，故

$$g(2^\circ) = 2\times 10^7 \sin^2 1^\circ \approx 2\times 10^7 (0.0175)^2 = 6125$$

两种方法都用同一数学用表，表的每一个数都准确到小数后第四位，但答案为什么不一致？哪个答案较正确？

下面我们来分析用这两种方法解题时各自产生的相对误差：记

$$t_1 = (1-A)10^7,\quad A = \cos x$$

$$t_2 = 2\times 10^7 B^2,\quad B = \sin\frac{x}{2}$$

三角函数表给出了四位数字，它准确到小数后第三位，而第四位是经过“四舍五入”得到的，即有

$$|A - A^*| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

$$|B - B^*| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

这里 A^*、B^* 分别为 A、B 的近似值。于是

$$|\varepsilon_r^*(t_1)| = \frac{|(1-A)10^7 - (1-A^*)10^7|}{|1-A^*|10^7}$$

$$= \frac{|A-A^*|}{|1-A|} \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{1-A^*}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{1-0.9994} = \frac{1}{12} \approx 8.3\%$$