高等学校教材

高等代数

◆ 林亚南 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等代数

Gaodeng Daishu

林亚南　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书内容包括矩阵、线性方程组、线性空间、线性映射、多项式、特征值、相似标准形、欧氏空间和二次型。本书力求突出代数学的思想和方法，尤其是矩阵各种等价分类的标准形、线性空间的直和分解和线性空间的同构等思想和方法，力求将几何直观与代数方法有机结合，力求尊重学生由浅入深、循序渐进的认知规律。

本书是高等学校数学类专业的教材，也可用作统计类专业和理工、经管类各专业教师和学生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/林亚南编著. —北京:高等教育出版社，2013.6

ISBN 978-7-04-037238-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①林… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第073824号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 贾翠萍　特约编辑 张建军　封面设计 李卫青
版式设计 童 丹　责任校对 窦丽娜　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18.75	版　　次	2013年6月第1版
字　　数	330千字	印　　次	2013年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	27.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　37238-00

前　言

代数学是研究代数对象的结构理论与表示理论的一门学科。代数对象是在一个集合上定义若干运算,且满足若干公理所构成的代数系统,线性空间则是数学类专业本科生所接触和学习的第一个代数对象。本书力求突出代数学的思想和方法。

高等代数是数学类各专业的基础课程,涉及的内容相对成熟。其内容分为两部分。一部分是基础知识部分,包括行列式、矩阵、线性方程组、二次型、特征值与特征向量、正交向量等内容。这部分内容是非数学类各专业线性代数的基本内容,以初等变换为灵魂的矩阵理论是这部分内容的核心。另外一部分则是研究线性空间,包括线性空间、线性映射 (变换)、相似标准形等内容。高等代数中是如何研究线性空间的? 第一个层次,研究向量之间的线性关系。内容包括线性表示、线性相关性、极大线性无关组、基与维数等。第二个层次,研究子空间。内容包括子空间与子空间的运算 (交与和)、生成子空间、直和分解。这两个层次都是从线性空间内部来研究线性空间。第三个层次是从外部来研究,即从两个线性空间之间的线性映射来研究,这些内容是线性空间理论的基本知识。在研究线性空间中,始终贯穿着几何直观和矩阵方法的有机结合,矩阵的相似标准形和对应的空间分解则是这种有机结合的生动体现和提升,因而是本课程的精华内容。本书力求突出几何直观和矩阵方法的对应和互动。我们强调矩阵理论,把握简洁和直接的代数方法,同时重视线性空间和线性映射 (变换) 的主导地位和分量,从几何观点理解和把握课程内容。

本书力求尊重学生由浅入深、循序渐进的认知规律。安排一些思考题,意在启发深入思考或联想拓广,并精心挑选一批例题。每节的习题是针对性强的基础练习,每章的复习题是提高拓广的题目,富有挑战性。

本书分为九章。

第一章矩阵。我们将行列式内容放在矩阵运算和分块矩阵之后介绍,然后利用行列式刻画可逆矩阵和矩阵的秩。这样处理,矩阵初步理论比较集中而不零散。行列式的定义按照阶数的归纳法定义,再导出行列式的展开式。这样处理,有利于初学者掌握。初学者可以略去 Laplace(拉普拉斯) 定理的证明。

第二章线性方程组。我们从消元法入手介绍具体方法。为讨论解的结构,

引进列向量的线性关系并展开讨论。一方面,许多问题可转化为线性方程组得到解决;另一方面,为下一章抽象的线性空间中向量的线性关系做铺垫,也遵循从特殊到一般的认知规律。

第三章线性空间。充分利用第二章的诸多结论,突出直和分解的思想和方法。

第四章线性映射。介绍两个线性空间之间的线性映射与矩阵的同构对应。在考虑线性变换时,引进了代数的概念,代数作为一种结构在此初步体现。这样处理,体现我们突出代数学的思想和方法的思路。

第五章多项式。强调多项式代数和多项式函数的关系,强调多项式的性质与数域的关联。初学者可以略去多元多项式部分。

第六章特征值。我们突出同构意义下,线性变换与矩阵的对应。证明复方阵相似于上三角形矩阵的结论,并用以证明 Cayley-Hamilton(凯莱 – 哈密顿)定理。

第七章相似标准形。从矩阵相似与特征矩阵相抵关系出发,讨论矩阵的 Frobenius(弗罗贝尼乌斯) 标准形、广义 Jordan(若尔当) 标准形和 Jordan 标准形。从标准形出发,刻画了线性空间对应于 Jordan 标准形的分解定理。本章内容比较丰富,充分体现了几何观点和代数方法的有机结合。对于非数学类专业的学生,本章内容可以选讲。

第八章欧氏空间。关于正交矩阵的正交相似标准形部分,可考虑选讲。

第九章二次型。突出对称矩阵合同关系的标准形。

本书内容的教学可以在安排周四课时 (另外安排周二课时的习题课) 或周五课时情况下,一学年完成。第一学期讲授一到四章,第二学期完成其余内容。

本书是厦门大学国家级精品课程“高等代数”的建设成果之一。在精品课程建设中,我们对每个章节提供了基础训练题目、应用举例、MATLAB 训练、电子课件、教学录像等内容。这些内容可在课程网站 (IP 地址:59.77.1.116; 域名:gdjpkc.xmu.edu.cn) 上查到,我们也将部分收集在与本书配套的指导书中。

本书的初稿是 2003 年开始的上课讲义,多次修改后以讲义的形式曾在厦门大学试用。林鹭副教授、杜妮副教授、张莲珠教授分别使用了讲义,并提出许多宝贵意见。

2003 年开始,笔者和福建师范大学陈清华教授、莆田学院杨忠鹏教授发起,由笔者和厦门大学“高等代数”课程组组织的福建省“高等代数”“线性代数”课程建设研讨会连续举办了十四次,每次按照一个章节展开讨论交流,共有一千多人次任课教师参加会议研讨,近百人次在会上作交流报告,共享成果,本书也得益于许多精彩的报告。笔者也十余次在会上交流本课程教学理念与备

课体会,包括本书的思路。

2011 年,我们邀请省内多所高校的部分任课教师,集中对本书的初稿进行了认真的讨论,并提出了许多宝贵的意见和建议。参加会议的有福建师范大学陈清华教授、福州大学曾有栋教授、莆田学院杨忠鹏教授、漳州师范学院林卫强教授、泉州师范学院张福阁教授、武夷学院刘用麟教授、福建工程学院唐晓文教授,还有集美大学朱荣坤副教授、龙岩学院王灿照副教授和梁俊平副教授、华侨大学王敏雄副教授和林增强副教授、福建师范大学福清分校郭世乐副教授、宁德学院林秀清副教授。对于各位同行的关心和帮助,笔者心怀感激之情。

本书的初稿以讲义的形式挂在厦门大学国家级精品课程“高等代数”课程网站上。网站自动记录显示,至 2012 年 12 月底被全国同行和学生点击超过 50 万次,下载 15 万余次,而约 90% 的点击和下载来自外校。可见受到众多关注,更感谢网友们经常性的肯定和鼓励。

感谢厦门大学和数学科学学院对本课程建设的关心和支持,也感谢全国许多前辈、专家、同行对本书的关注并提供的宝贵意见和建议。特别感谢高等教育出版社数学分社马丽社长和李蕊编辑。若没有她们的关心、支持和催促,本书的完成尚待时日。

我们期待着各位专家学者、各位读者提出宝贵意见。请联系厦门大学数学科学学院林亚南:ynlin@xmu.edu.cn.

林亚南

2012 年 12 月

目　录

第一章

矩　　阵

矩阵是高等代数研究的主要对象.§1.1 给出数域的概念. 矩阵的概念与运算以及运算律在 §1.2 中讨论.§1.3 讨论分块矩阵, 它为一些问题的表达提供便利. §1.4 介绍和讨论行列式. 我们用阶数的归纳法给出行列式的定义, 并讨论行列式的基本性质. §1.5 推导出行列式的不同行不同列元素乘积的代数和展开式, 同时介绍了 Laplace 定理.§1.6 讨论可逆矩阵的概念和基本性质, 并介绍 Cramer(克拉默) 法则. §1.7 详细讨论矩阵的初等变换及其性质. 特别是, 由初等变换导出了矩阵的相抵关系和标准形. 作为在相抵关系下的不变量,§1.8 讨论矩阵的秩的概念和基本性质.

§1.1　数域

数是数学的基本概念. 人们对数的认识经历了漫长的过程. 从自然数到整数, 到有理数, 到实数, 再到复数, 随着人们对自然界的认识不断深化, 数的概念不断拓广. 高等代数中的许多问题, 在不同的数的范围讨论, 会有不同的结果. 我们分别记自然数集合为 $\mathbb{N}$, 整数集合为 $\mathbb{Z}$, 有理数集合为 $\mathbb{Q}$, 实数集合为 $\mathbb{R}$, 复数集合为 $\mathbb{C}$.

我们知道, 两个自然数相加的和仍是自然数, 但是两个自然数相减的差未必是自然数. 两个整数的和、差、积是整数, 但是商 (除数不为零) 未必是整数. 而有理数集 $\mathbb{Q}$ 中任意两个数的和、差、积、商 (除数不为零) 仍在 $\mathbb{Q}$ 中. 实数集 $\mathbb{R}$ 和复数集 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{Q}$ 一样有同样的性质. 我们把它们的共同点抽象出来, 得到数域的定义.

定义 1.1.1　设 F 是复数集合 $\mathbb{C}$ 的子集且包含 0 和 1, 如果 F 中任意两个数的和、差、积、商 (除数不为零) 仍然属于 F, 则称 F 是一个**数域**.

显然 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 是数域. 但是 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 不是数域. 下面命题说明,$\mathbb{Q}$ 是最小的数域.

命题 1.1.1　任意数域必包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

证明　设 F 是一个数域, 则 $0,1\in F$. 对于 $n\in\mathbb{N}$, 因为 $n=1+1+1+\cdots+1$(n 个 1 相加), 所以 $n\in F$,$-n=0-n\in F$. 这样 $\mathbb{Z}\subseteq F$. 对于 $p,q\in\mathbb{Z}$,$q\neq 0$,

由 $p,q\in F$ 得到 $\dfrac{p}{q}\in F$. 故 $\mathbb{Q}\subseteq F$. □

命题 1.1.2 不存在介于实数域 $\mathbb{R}$ 与复数域 $\mathbb{C}$ 之间的其他任何数域.

证明 设 F 是一个数域满足 $\mathbb{R}\subseteq F\subseteq\mathbb{C}$. 设 $\mathbb{R}\neq F$, 则存在一个 $a+b\mathrm{i}\in F(a,b\in\mathbb{R};b\neq 0)$. 由于 $\mathbb{R}\subseteq F$ 且对减法和除法封闭, 有 $b\mathrm{i}=(a+b\mathrm{i})-a\in F$, 进一步 $\mathrm{i}=\dfrac{b\mathrm{i}}{b}\in F$. 这样, 对于任意 $c+d\mathrm{i}\in\mathbb{C}$, 因为 $1,\mathrm{i}\in F$,$c,d\in\mathbb{R}$, 所以$c+d\mathrm{i}\in F$. 即 $F=\mathbb{C}$. □

例 1 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$ 构成一个数域. 因为 $1=1+0\sqrt{2},0=0+0\sqrt{2}$, 所以 $0,1\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 对于 $a+b\sqrt{2},c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 则

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

对于 $c+d\sqrt{2}\neq 0$, 则 c,d 不同时为 0, 故 $c-d\sqrt{2}\neq 0$ 且

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是数域.

实际上, 在例 1 中用 $\sqrt{p}$ 代替 $\sqrt{2}$(p 为素数), 结论仍然成立. 所以存在无穷多个数域.

思考 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

习题

1. 求包含 $\sqrt{3}$ 的最小数域, 并证明.
2. 证明 $\mathbb{Q}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域.

§1.2 矩阵和运算

解方程组是代数中的基本问题. 本教材的前两章围绕着解线性方程组展开讨论. 中学数学中已经介绍了如何求解含两个 (或三、四个) 未知量, 两个 (或三、四个) 方程组成的线性方程组. 实际问题中出现的线性方程组可能含有大量未知量, 而未知量的个数和方程的个数未必相等, 这些方程组未必有解, 如果有解也未必唯一.

我们讨论的数域 F 上的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是未知量,$a_{ij} \in F(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.

我们将未知量的系数按照它们在 (1) 中的位置排列成下面的一个表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

再将常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 按照它们在 (1) 中的位置加在上面表的最后一列, 得到下面的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

一般地, 由数域 F 上的 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的如下矩形阵列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 F 上 m 行 n 列**矩阵**, 简称 $m \times n$ 矩阵. 一般地, 矩阵用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ 表示. 记为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, 其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列**元**, 简称为 $\boldsymbol{A}$ 的第 (i,j) 元.

注意到一行一列的矩阵是一个数, 设 $\boldsymbol{A} = (a)_{1\times 1}$, 在不引起混淆的情况下, 我们直接记 $\boldsymbol{A} = a$.

式 (2) 称为线性方程组 (1) 的**系数矩阵**, 式 (3) 称为线性方程组 (1) 的**增广矩阵**.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元全是实数, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**实矩阵**; 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元全是复数, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**复矩阵**.

称两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times t}$ **相等**, 如果它们的行数相等, 列数相等, 且对应元相等. 即 $m=s, n=t$, 且对任意的 $i,j(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n)$, 都有 $a_{ij}=b_{ij}$. 矩阵的意义不在于将一些数排成一个表, 而在于可以进行一些有实际意义的运算.

定义 1.2.1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 定义 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的**加法**为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行数列数分别相等时才可以做加法. 今后如不注明,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均指加法有意义. 矩阵的加法本质上是对应元相加, 所以有

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

所有元均为零的矩阵, 称为**零矩阵**, 记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$, 或简记为 $\boldsymbol{O}$. 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$, 显然有

(3) $\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

对于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 定义 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$. 所以对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

我们可以定义矩阵的减法为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$, 作为加法的逆运算.

例 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

定义 1.2.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是数域 F 上的矩阵,$c\in F$, 定义 c 和 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘**为 $c\boldsymbol{A}=(ca_{ij})_{m\times n}$.

数乘本质上是数与矩阵的每个元相乘, 所以对任意的 $c,d\in F$ 和任意的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 都有

(5) $c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}$.

(6) $(c+d)\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{A}$.

(7) $(cd)\boldsymbol{A}=c(d\boldsymbol{A})$.

(8) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

显然有 $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

下面我们介绍矩阵的乘法, 它是比较复杂但特别重要的, 这也是矩阵的意义所在.

设 x_1, x_2 和 y_1, y_2, y_3 是两组变量, 满足

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{cases}, \tag{4}$$

其中 $a_{ij} \in F(i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$. 又设 z_1, z_2 是另一组变量, 满足

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases}, \tag{5}$$

其中 $b_{ij} \in F(i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$.

用 (5) 式代入 (4) 式, 我们得到

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2 \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2 \end{cases}. \tag{6}$$

如果用矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

表示变量 x_1, x_2 和 y_1, y_2, y_3 的关系, 用矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

表示变量 y_1, y_2, y_3 和 z_1, z_2 的关系, 用矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

表示变量 x_1, x_2 和 z_1, z_2 的关系, 我们称 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

一般地, 有

定义 1.2.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times k}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{k\times n}$, 定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘法**为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

当 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数才可做乘法, 这时 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数,$\boldsymbol{AB}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数, c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元乘积之和. 今后如不注明, 均指 $\boldsymbol{AB}$ 乘法有意义.

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&2&-1\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\3&1&4&1\end{pmatrix}$. 注意到 $\boldsymbol{B}$ 是 4 列,$\boldsymbol{A}$ 是 2 行, 所以 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{AB}=1$,$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&0&4\\1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

例 2 中 $\boldsymbol{AB}$ 有意义但 $\boldsymbol{BA}$ 没有意义; 例 3 中 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的行数和列数不相同; 例 4 中虽然 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 的行数与列数都相同, 但 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 这说明矩阵乘法不满足交换律, 这与数的乘法有本质的不同, 务必注意.

我们指出, 利用矩阵的乘法, 线性方程组 (1) 可以表示为

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

矩阵的乘法满足:

(9) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

(10) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

(11) $c(\boldsymbol{AB}) = (c\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(c\boldsymbol{B})$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数都等于 n 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶方阵**. 元 $a_{ii}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 称为**对角线元**. 若一个方阵非对角线元都等于零, 则称之为**对角矩阵**. 对角矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

简记为 $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$. 特别地, n 阶对角矩阵

$$\mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1)$$

称为 n **阶单位矩阵**, 记为 $\boldsymbol{E}_n$, 或简记为 $\boldsymbol{E}$. 我们有

(12) $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n$.

我们证明乘法的结合律 (9), 其余留作习题. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times p}, \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{p\times q}$. 显然 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 均为 $m \times q$ 矩阵.

再证明对应元相等.$\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行为 $\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{r1}, \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{r2}, \cdots, \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rp}\right)$, $\boldsymbol{C}$ 的第 j 列为

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{pj} \end{pmatrix}.$$

所以 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 的第 (i, j) 元为

$$\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{r1}\right) c_{1j} + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{r2}\right) c_{2j} + \cdots + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rp}\right) c_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}\right) c_{kj} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ir}b_{rk}c_{kj}.$$

同理,$\boldsymbol{BC}$ 的第 j 列为

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} b_{1k}c_{kj} \\ \sum_{k=1}^{p} b_{2k}c_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} b_{nk}c_{kj} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行为

$$\begin{pmatrix} a_{i1}, & a_{i2}, & \cdots, & a_{in} \end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的第 (i,j) 元为

$$\begin{aligned} &a_{i1}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{1k}c_{kj}\right) + a_{i2}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{2k}c_{kj}\right) + \cdots + a_{in}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{nk}c_{kj}\right) \\ =&\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{rk}c_{kj}\right) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ir}b_{rk}c_{kj}. \end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.

思考　举例说明,乘法的消去律不成立. 即

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \nRightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C},$$

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{CA} \nRightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}.$$

易见, 对于零矩阵 $\boldsymbol{O}$, 总有 $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{O} = \boldsymbol{AO}$.

对于 n 阶方阵, 可以任意进行加法、数乘和乘法, 结果仍为 n 阶方阵. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂为 $\boldsymbol{A}^r = \boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}$($r$ 个 $\boldsymbol{A}$ 相乘). 显然, 对于正整数 r,s,有

$$\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{A}^s = \boldsymbol{A}^{r+s};\quad (\boldsymbol{A}^r)^s = \boldsymbol{A}^{rs}.$$

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^m = \boldsymbol{A}^m + \mathrm{C}_m^1\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{B} + \mathrm{C}_m^2\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{B}^2 + \cdots + \mathrm{C}_m^{m-1}\boldsymbol{AB}^{m-1} + \boldsymbol{B}^m,$$

其中 C_m^i 是组合数 $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$.