

陈卫忠 伍国军 贾善坡 著

# ABAQUS

## 在隧道及地下工程中的应用

(下册)



中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

万水 ABAQUS 技术丛书

# ABAQUS 在隧道及地下工程中的应用 (下册)

陈卫忠 伍国军 贾善坡 著



中国水利水电出版社  
[www.waterpub.com.cn](http://www.waterpub.com.cn)

## 内 容 提 要

本书系统地阐述地下工程数值模拟的基本原理和方法,通过一系列的工程实例,详细介绍 ABAQUS 在隧道及地下工程设计与施工中的应用,较充分地反映作者及国内外最新研究成果。

本书共分 11 章,前两章为入门介绍,主要包括 ABAQUS 基础知识、ABAQUS 模块简介、隧道及地下工程的设计施工方法;第 3~8 章介绍采用有限元法进行隧道及地下工程设计和施工过程力学分析的基本原理,给出采用 ABAQUS 软件进行隧道及地下工程数值模拟的工程实例,包括隧道施工工法优化、盾构隧道施工过程模拟、分岔隧道围岩稳定性计算、考虑渗流—应力耦合效应的隧道稳定性分析、隧道支护结构可靠性评价及深部岩体围岩稳定性分析;为了帮助二次开发,最后三章介绍 ABAQUS 软件二次开发的基本原理及使用方法,详细介绍如何使用用户子程序,包括常用用户子程序、用户子程序 UMAT 接口原理、用户材料子程序 UMAT 二次开发、岩土参数敏感性分析及岩土工程反演模型的数值实现。

本书主要立足于实际工程应用,将 ABAQUS 相关模拟功能和隧道及地下工程中的具体研究对象结合起来,背景性较强,属于 ABAQUS 软件分析的高级篇。

本书体系合理、内容丰富全面,深入浅出,实用性强,可供土木工程、岩土与隧道工程、地质工程、水利工程、石油工程的专业人员使用,还可作为以上专业研究生的教学参考书。

本书所有实例的命令流及相关文件可以从中国水利水电出版社网站及万水书苑下载,网址为 <http://www.waterpub.com.cn/softdown/> 或 <http://www.wsbookshow.com>。

## 图书在版编目 (C I P) 数据

ABAQUS在隧道及地下工程中的应用 : 全2册 / 陈卫忠, 伍国军, 贾善坡著. — 北京 : 中国水利水电出版社, 2013. 4

(万水ABAQUS技术丛书)  
ISBN 978-7-5170-0570-4

I. ①A… II. ①陈… ②伍… ③贾… III. ①隧道工程—有限元分析—应用软件②地下工程—有限元分析—应用软件 IV. ①U45-39②TU94-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第011845号

策划编辑: 杨元泓 责任编辑: 宋俊娥 封面设计: 李 佳

书 名	万水 ABAQUS 技术丛书 ABAQUS 在隧道及地下工程中的应用 (下册)
作 者	陈卫忠 伍国军 贾善坡 著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: <a href="http://www.waterpub.com.cn">www.waterpub.com.cn</a> E-mail: <a href="mailto:mchannel@263.net">mchannel@263.net</a> (万水) <a href="mailto:sales@waterpub.com.cn">sales@waterpub.com.cn</a>
经 售	电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水) 北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	永清县晔盛亚胶印有限公司
规 格	170mm×240mm 16 开本 总 33.25 印张 总 813 千字
版 次	2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷
印 数	0001—3000 册
总 定 价	112.00 元 (上、下册)

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社发行部负责调换  
版权所有·侵权必究

# 前 言

ABAQUS 是国际上最先进的大型非线性有限元计算分析软件之一，具有强健的非线性计算功能，拥有大量材料模型、单元模型和分析过程等。ABAQUS 软件在我国的土木工程、地矿、水利、石油、核工业等领域得到了广泛的应用，为各领域的工程设计、安全评价及科学研究做出了很大的贡献。随着计算机硬件和软件的飞速发展，该软件在不断改进，应用范围也在不断扩展。

本书共分 11 章，前两章为入门介绍，主要包括 ABAQUS 基础知识、ABAQUS 模块简介、隧道及地下工程的设计施工方法；第 3~8 章介绍采用有限元法进行隧道及地下工程设计和施工过程力学分析的基本原理，给出采用 ABAQUS 软件进行隧道及地下工程数值模拟的工程实例，包括隧道施工工法优化、盾构隧道施工过程模拟、分岔隧道围岩稳定性计算、考虑渗流—应力耦合效应的隧道稳定性分析、隧道支护结构可靠性评价及深部岩体围岩稳定性分析；为了使广大用户更好地使用软件的二次开发功能，最后三章介绍 ABAQUS 软件二次开发的基本原理及使用方法，详细介绍如何使用用户子程序及其二次开发，包括常用用户子程序、用户子程序 UMAT 接口原理、用户材料子程序 UMAT 二次开发、岩土参数敏感性分析及岩土工程反演模型的数值实现。

## 本书特色

- 本书的实例均来自科学研究和工程实践，很多实例读者稍微修改就能解决相关工程中类似的科研和工程问题。
- 针对该软件在具体使用方面的不足，详细介绍如何使用用户子程序及其二次开发，满足工程需要。
- 针对岩土介质损伤、渗流—应力耦合、可靠度计算、参数反演等复杂力学问题进行阐述，涵盖地下工程的众多方面，使读者都能在本书中找到复杂力学问题计算的参考。
- 主要针对 ABAQUS 在具体工程的数值实现，可学性非常强，有较大的实用价值。本书主要面向 ABAQUS 的中高级用户。

## 适合的读者对象

本书适合土木工程、岩土与隧道工程、地质工程、水利工程、石油工程的专业人员使用，还可作为以上专业研究生的教学参考书。

## 本书分工与致谢

本书是中国科学院武汉岩土力学研究所施工过程力学组的近几年的集体研究成果。中国科学院武汉岩土力学研究所陈卫忠研究员负责全面工作，并统筹全稿。全书各章分工如下：第 1、2、3、5、7、8 章由伍国军博士执笔；第 4、6、9、10、11 章由贾善坡博士执笔；杨建平博士为本书第 3 章的编写作了奠基性的工作。戴永浩博士、于洪丹博士、谭贤君博士、黄胜博士以及课题组曹俊杰、田洪铭、陈培帅、杨阜东、耿亚梅、王辉、赵武胜以及铁道部第四设计

院的陈立保高工和长江科学院的张计高工等为本书的出版做了大量工作。参与本书工作的还包括陈鲲、李晓宁、丁佳、虞志勇、吴艳、杜英、王晓、余松、夏慧军、陶林、许志清、赵会春、王斌、万雷、张强林、张赛桥等，在此深表感谢。

与此同时，本书的出版还要感谢以下基金的支持：“软弱岩体多场耦合与长期强度特性研究国家自然科学基金”（重大国际合作项目）、“地下工程软岩非线性流变机理及长期稳定性研究”（国家自然科学基金）、973项目“能源储备地下库群灾变机理与防护理论研究”。

最后，需要特别指出的是：本书在编写过程中学习和借鉴了中国仿真论坛 ABAQUS 版的诸多网友的研究成果，这些成果丰富了本书的内容，本书的附录部分即是学习和借鉴上述成果的结晶，在此对不知实名的各位网友表示诚挚的谢意。

由于时间有限，作者水平有限以及伴随计算机的飞速发展，书中疏漏和不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

作者

2009年12月

# 目 录

前言

## 上 册

第 1 章 隧道工程与 ABAQUS 分析	1	2.3 本章小结	52
1.1 隧道的基本概念及工程概述	1	第 3 章 ABAQUS 在隧道中的应用——施工工 法优化	53
1.2 隧道的种类及其作用	2	3.1 概述	53
1.2.1 交通隧道	2	3.2 新奥法	54
1.2.2 水工隧道	3	3.2.1 隧道施工应遵循的基本原则	54
1.2.3 市政隧道	3	3.2.2 新奥法的分类及施工工序	55
1.2.4 矿山隧道	4	3.2.3 开挖方法	55
1.3 隧道及地下工程的有限元分析	4	3.3 ABAQUS 的数值模拟方法	60
1.4 ABAQUS 基础知识简介	5	3.4 隧道施工工法优化研究	60
1.4.1 ABAQUS 各模块简介	6	3.4.1 V 级围岩	61
1.4.2 ABAQUS 分析过程	7	3.4.2 IV 级围岩	68
1.4.3 ABAQUS/CAE 简介	8	3.4.3 III 级围岩	74
1.4.4 ABAQUS 输入文件简介	12	3.4.4 II 级围岩	81
1.4.5 ABAQUS 帮助文档	16	3.5 本章小结	86
1.4.6 ABAQUS 模型导入导出功能	17	第 4 章 隧道盾构施工方法及其应用	87
1.5 本章小结	20	4.1 盾构施工方法简介	87
第 2 章 隧道的围岩分级及其计算模型	21	4.2 盾构隧道施工过程的有限元模拟方法	89
2.1 隧道围岩分级及其应用	21	4.2.1 盾构法隧道的施工过程	89
2.1.1 以岩石强度或岩石的物性指标为 代表的分级方法	22	4.2.2 盾构隧道施工过程的模拟方法	90
2.1.2 以岩体构造、岩性特征为代表的 分级方法	24	4.3 反映施工质量的等代层模型	90
2.1.3 与地质勘探手段相联系的分级方法	25	4.4 盾构法施工的非线性有限元模型	91
2.1.4 以多种因素进行组合的分级方法	26	4.4.1 材料性态的模拟	91
2.1.5 以工程对象为代表的分级法	27	4.4.2 有限元控制方程	92
2.1.6 我国现行铁路隧道围岩分级	27	4.5 工程概述及有限元模型的建立	94
2.2 计算模型	30	4.5.1 工程概况	94
2.2.1 常用的设计模型	30	4.5.2 计算参数	97
2.2.2 荷载—结构计算模型	32	4.5.3 初始条件和边界条件的定义	98
2.2.3 地层—结构计算模型	33	4.6 施工过程描述	99
2.2.4 ABAQUS 在隧道计算模型中的应用	33	4.7 计算结果分析	107
		4.7.1 掘进过程中围岩稳定性分析	113

4.7.2 不同施工质量下围岩稳定性分析	118	6.1.5 有限元离散	234
4.8 本章小结	124	6.2 岩土介质渗透性演化模型	235
<b>第5章 分岔隧道稳定性分析</b>	<b>126</b>	6.2.1 渗透系数与孔隙度的关系	235
5.1 分岔式隧道简介	126	6.2.2 渗透系数与应力之间的关系	235
5.2 ABAQUS 的模拟方法	128	6.2.3 渗透系数与应变之间的关系	236
5.2.1 地应力平衡	128	6.2.4 渗透系数与损伤之间的关系	238
5.2.2 喷锚支护	129	6.3 ABAQUS 渗流-应力耦合相关命令介绍	240
5.2.3 多步骤开挖	132	6.3.1 ABAQUS 渗流和变形的耦合分析	240
5.3 大拱段稳定性计算	133	6.3.2 相关命令介绍	242
5.3.1 大拱段平面计算	133	6.4 低渗透介质非排水卸载数值仿真分析	247
5.3.2 大拱段三维计算	151	6.4.1 模型描述	247
5.3.3 大拱段结果分析	159	6.4.2 总应力分析法	249
5.4 连拱段	159	6.4.3 有效应力分析法	254
5.4.1 连拱段平面计算	160	6.5 地下洞室开挖过程模拟	261
5.4.2 连拱段三维计算	175	6.5.1 模型描述	262
5.4.3 连拱段小结	196	6.5.2 施工过程描述	270
5.5 小间距拱段	197	6.5.3 计算结果分析	271
5.5.1 小间距拱段平面计算	197	6.6 油气储层注采过程模拟	275
5.5.2 小间距拱段三维计算	209	6.6.1 模型描述	276
5.5.3 小间距段小结	226	6.6.2 计算过程描述	279
5.6 本章小结	227	6.6.3 计算结果分析	282
<b>第6章 地下工程渗流场和应力场耦合分析</b>	<b>228</b>	6.7 隧道围岩开挖扰动区数值模拟	285
6.1 岩土介质渗流-应力耦合理论	228	6.7.1 岩体渗透系数与塑性损伤之间的 关系	285
6.1.1 渗流-应力相互耦合的力学机理	228	6.7.2 模型描述	287
6.1.2 多孔介质中流体渗流规律	229	6.7.3 计算结果分析	293
6.1.3 孔隙介质的有效应力原理	232	6.8 本章小结	300
6.1.4 应力平衡方程和渗流连续方程	232		

## 下 册

<b>第7章 隧道支护结构可靠性研究</b>	<b>301</b>	method)	310
7.1 结构可靠性基本原理	301	7.2.5 响应面法	310
7.2 可靠指标的计算方法	304	7.2.6 程序的编制	311
7.2.1 哈-林 (H-L) 法	305	7.3 ABAQUS 可靠性分析	312
7.2.2 非正态变量的等效正态化 (JC 法) 及修正 JC 法	305	7.4 公路隧道衬砌结构可靠性计算	314
7.2.3 分位值法	308	7.4.1 V 级围岩	319
7.2.4 蒙特卡罗法 (Monte-Carlo		7.4.2 IV 级围岩	328
		7.4.3 III 级围岩	334

7.5 本章小结	340	10.7.2 常规三轴压缩试验	443
<b>第 8 章 深部岩体工程分析</b>	<b>341</b>	10.7.3 拉伸试验	445
8.1 深部岩体工程简介	341	10.8 本章小结	446
8.2 ABAQUS 数值模拟功能	342	<b>第 11 章 岩土工程反演理论及其在 ABAQUS</b>	
8.2.1 损伤	342	<b>中的实现</b>	<b>447</b>
8.2.2 非线性蠕变岩体本构关系	343	11.1 岩土工程反分析方法简介	447
8.2.3 考虑渗流的岩体本构关系	346	11.1.1 反分析的概念与原理	447
8.3 储气库的计算分析	348	11.1.2 反分析的发展现状	449
8.3.1 流变本构模型	348	11.2 岩土介质参数敏感性分析方法	451
8.3.2 储气库的长期稳定性分析	348	11.2.1 岩土力学参数反演中的灵敏度	
8.4 深埋引水隧洞的稳定性分析	363	理论	452
8.4.1 裂隙岩体应力渗流耦合本构模型	364	11.2.2 基于灰色关联法的岩土参数识别	
8.4.2 锦屏二级引水隧洞稳定性分析	366	及灵敏度计算	455
8.5 本章小结	378	11.2.3 基于非参数统计的参数敏感性分	
<b>第 9 章 ABAQUS 二次开发基础</b>	<b>379</b>	析法	456
9.1 ABAQUS 二次开发概述	379	11.3 岩土工程常用反演模型	457
9.2 ABAQUS 用户子程序接口	380	11.3.1 地应力场反演模型	458
9.3 ABAQUS 用户子程序	381	11.3.2 位移反演模型	461
9.3.1 用户子程序分类	381	11.3.3 渗流场反演模型	462
9.3.2 常用用户子程序简介	382	11.4 工程优化算法介绍	463
9.4 应用举例	394	11.4.1 回归分析方法	463
9.4.1 初始地应力场的定义	394	11.4.2 正交设计方法	466
9.4.2 围岩蠕变分析	400	11.4.3 遗传算法	467
9.5 本章小结	405	11.5 考虑渗流—应力耦合效应的岩土参数	
<b>第 10 章 ABAQUS 用户材料子程序二次开发</b>		敏感性分析	470
<b>及应用</b>	<b>406</b>	11.5.1 工程概况	470
10.1 ABAQUS 材料模型库和单元库简介	406	11.5.2 有限元模型	471
10.1.1 ABAQUS 材料库	406	11.5.3 计算参数	474
10.1.2 ABAQUS 单元库	407	11.5.4 计算条件	476
10.2 用户子程序 UMAT 接口原理	407	11.5.5 计算结果分析	477
10.3 本构积分算法	410	11.6 基于遗传算法的岩土力学参数反演	
10.4 ABAQUS 对于材料非线性问题的处理	412	分析	481
10.5 UMAT 材料子程序实现及应用	414	11.6.1 工程概况	481
10.5.1 修正 Mohr-Coulomb 模型	415	11.6.2 反演方法的实现	481
10.5.2 屈服函数和势函数的求导	418	11.6.3 反演分析条件	483
10.5.3 UMAT 的 FORTRAN 程序	420	11.6.4 反演结果分析	483
10.6 D-P 模型与 M-C 模型参数之间的关系	436	11.7 构造应力场反演算例验证	484
10.7 算例分析	439	11.7.1 模型描述	484
10.7.1 模型描述	439	11.7.2 反演条件	487



11.7.3 反演结果分析.....	488	附录 B ABAQUS 的相关约定 .....	503
11.8 本章小结.....	489	附录 C ABAQUS 中对应力应变的部分理解 .....	512
附录 A 地下工程常用指令小结 .....	490	参考文献 .....	514

## 第 7 章 隧道支护结构可靠性研究

知识要点:

- 结构可靠性基本原理
- 可靠指标的计算方法
- ABAQUS 可靠性分析
- 隧道衬砌结构可靠性研究

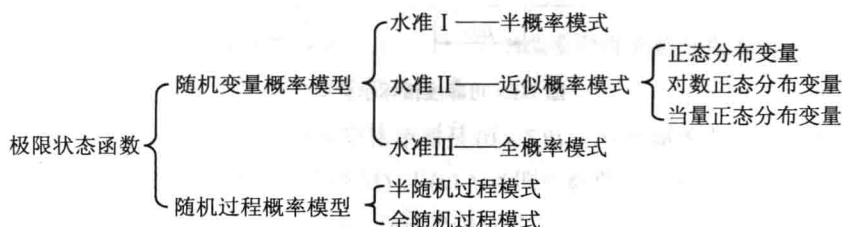
本章导读:

本章首先介绍结构可靠性的基本原理和可靠度指标的常用计算方法, 然后对 ABAQUS 在可靠性分析方面的功能作简单陈述, 并提出基于连续介质方法的 ABAQUS 可靠性分析方法及步骤, 最后建立圆形隧道开挖支护的平面模型, 并对在不同围岩类别、不同埋深条件下的衬砌截面分别作敏感性和可靠性分析。

### 7.1 结构可靠性基本原理

结构设计时, 应使所设计的结构在其使用期内, 力求在经济合理前提下满足安全性、适用性和耐久性的要求, 而结构的安全性、适用性和耐久性三者总称为结构的可靠性, 可靠性的数量描述一般用可靠度。结构的可靠度是指结构或构件在规定的时间内, 在规定的条件下完成预定功能的概率。结构完成预定功能的标志由极限状态来衡量: 结构整体或部分在超过某状态时, 结构就不能满足设计规定的某一功能要求的这种状态, 称为结构的极限状态。结构的极限状态一般由状态函数 (或称功能函数) 加以描述。

结构可靠度分析按不同的发展阶段, 大致可归纳出如下几种理论模式:



目前, 在国际上已进入实用阶段的概率设计法是随机变量的近似概率模式 (水准 II)。我国《工程结构可靠度设计统一标准》、《建筑结构可靠度设计统一标准》、《铁路工程可靠度设计统一标准》等均采用的极限状态设计方法就属于这一水准。

设影响结构可靠度的  $n$  个随机变量为  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 对应的功能函数为:

$$Z = G(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7-1)$$

结构功能函数的取值严格地把结构区分为三种不同的状态，如式(7-2)所示，即可靠状态、极限状态和失效状态。

$$Z = G(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{cases} > 0 & \text{可靠状态} \\ = 0 & \text{极限状态} \\ < 0 & \text{失效状态} \end{cases} \quad (7-2)$$

那么，结构的可靠度即功能函数  $Z > 0$  的概率为：

$$P_s = P(Z > 0) = \int \dots \int_{Z > 0} f_z(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (7-3)$$

结构的失效概率即功能函数  $Z < 0$  的概率为：

$$P_f = P(Z < 0) = \int \dots \int_{Z < 0} f_z(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (7-4)$$

由概率论可知：

$$P(Z > 0) + P(Z < 0) = 1 \quad (7-5)$$

即可靠度和失效概率的关系为

$$P_s + P_f = 1 \quad (7-6)$$

要计算结构的可靠度或失效概率，原则上可通过上述的多维积分式计算而得，但当功能函数中含有多个基本随机变量或函数为非线性时，上述计算就变得十分复杂，甚至难以求解，且在很多的实际结构可靠性问题中，变量  $x_i$  的密度函数  $f(x_i)$  或者它们的联合密度函数  $f_z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  很难有足够的资料确定。在可靠度分析中常采用可靠指标  $\beta$  来表示结构的可靠度，可靠指标  $\beta$  的定义为：

$$\beta = \mu_z / \sigma_z \quad (7-7)$$

式中， $\mu_z$  为结构功能函数的均值； $\sigma_z$  为结构功能函数的标准差。

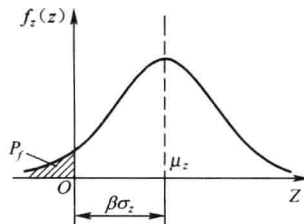


图 7-1 可靠度指标示意图

由图 7-1 可知，失效概率  $P_f = P(Z < 0)$  是概率密度函数  $f_z(z)$  的尾部与  $OZ$  轴所围成的面积（阴影部分面积），结构的可靠概率即为  $f_z(z)$  与  $OZ$  轴所围成的非阴影部分面积。结构可靠指标  $\beta$  的物理意义是：从均值  $\mu_z$  到原点以标准差  $\sigma_z$  为度量单位的距离（标准差的倍数，即  $\beta\sigma_z$ ）。 $\beta$  值与  $P_f$  是对应的， $\beta$  值越大，其对应的  $P_f$  越小，结构的可靠度越高。

$$P_f = \phi(-\beta) \quad (7-8)$$

式中， $\phi(\cdot)$  表示标准正态分布函数。

结构的功能函数在于其具有的一定抗力来承受各种作用效应，因而可把构成功能函数的

随机变量分为结构抗力和作用效应两大类, 如以  $R$  来表示抗力, 以  $S$  来表示作用效应, 则功能函数可写成:

$$Z = G(R_1, R_2, \dots, R_m, S_{m+1}, S_{m+2}, \dots, S_n) \quad (7-9)$$

或者 
$$Z = G_R(R_1, R_2, \dots, R_m) - G_S(S_{m+1}, S_{m+2}, \dots, S_n) \quad (7-10)$$

最后 
$$Z = R - S \quad (7-11)$$

此即功能函数的 R-S 模型, 结构抗力  $R$  是结构构件承受外界作用的能力, 以非负随机变量为概率模型, 作用效应  $S$  是指作用在结构上的各种作用而引起的结构内力或位移等作用的效果, 以非负随机变量为概率模型。设功能函数仅与  $R$  和  $S$  有关, 则结构功能函数为:

$$Z = G(R, S) = R - S \quad (7-12)$$

对应的极限状态方程:

$$Z = R - S = 0 \quad (7-13)$$

显然: 当  $Z > 0$  时, 结构处于可靠状态, 相应的概率越大, 表明构件越可靠; 当  $Z < 0$  时, 结构处于失效状态, 其相应概率越大, 表明构件越不可靠, 可用图 7-2 表示:

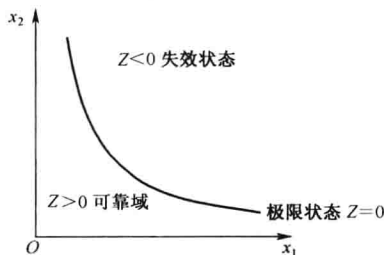


图 7-2 结构的工作状态

若随机变量  $R, S$  是连续型的, 则  $Z$  即式 (7-12) 也是连续型的, 这时, 构件的失效概率可表示为

$$P_f = P\{z < 0\} = F_Z(0) \quad (7-14)$$

式中:  $F_Z(Z)$  为  $Z$  的分布函数

$$z = r - s, \quad r \in R, \quad s \in S, \quad z \in Z \quad (7-15)$$

设  $Z = R - S$  的概率密度函数为  $f_z(x, y)$ ,  $R, S$  的概率密度函数分别为  $f_R(r)$ 、 $f_S(s)$ , 且一般可以认为  $R$  和  $S$  是两个互相独立的随机变量, 故有

$$f_Z(r, s) = f_S(s)f_R(r) \quad (7-16)$$

由概率论知识可知, 构件失效概率可表示为下面的积分形式

$$\begin{aligned} P_f = F_Z(0) &= \iint_{r-s < 0} f_Z(r, s) dr ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) \left[ \int_R^{+\infty} f_R(r) dr \right] ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) \left[ \int_{-\infty}^R f_S(s) ds \right] dr \end{aligned} \quad (7-17)$$

如果  $R$  和  $S$  均可近似地看作正态变量, 则功能函数  $Z$  亦为正态变量, 此时功能函数的概率密度为:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right)^2 \right] \quad (7-18)$$

失效概率则为:

$$P_f = P(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right)^2 \right] dz \quad (7-19)$$

把  $Z$  的正态分布  $N(\mu_Z, \sigma_Z)$ , 转变为标准正态分布  $N(0,1)$ , 即采取变换

$$x = \frac{1}{\sigma_Z} (Z - \mu_Z) \quad (7-20)$$

则得失效概率

$$P_f = P(X < -\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta} \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right) dx = \phi(-\beta) \quad (7-21)$$

式中:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (7-22)$$

$\mu_Z$ 、 $\sigma_Z$  分别是构件的均值和标准方差, 它们按下式计算:

$$\mu_R = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i \quad (7-23)$$

$$\mu_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \quad (7-24)$$

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\mu_R - R_i)^2} \quad (7-25)$$

$$\sigma_S = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\mu_S - S_i)^2} \quad (7-26)$$

式中,  $m$  分别为  $R$ 、 $S$  的统计样本数量。这时, 构件的可靠度为

$$P_r = 1 - P_f = 1 - \phi(-\beta) = \phi(\beta) \quad (7-27)$$

$\phi(\beta)$  就是标准正态变量  $N(0,1)$  的概率分布函数, 在概率论和统计学书籍中均附有这种函数表可查。

## 7.2 可靠指标的计算方法

目前, 实用的计算可靠指标  $\beta$  的方法有以下几种: 一次二阶矩法、当量正态分布法 (JC 方法)、分位值法、多重积分方法及随机抽样法 (Monte-Carlo 法)。此外, 随着计算技术的发展, 有限元—一次二阶矩法、有限元—最大熵法、有限元—Monte-Carlo 法, 也先后应用于结构可靠度分析。具体计算采用哪一种方法, 应根据结构极限状态方程中基本随机变量的概率分布和方程式的线性或非线性等情况使用。现将常用的几种方法的基本理论简述如下:

### 7.2.1 哈-林 (H-L) 法

该法是由 A.M. Hasofer 和 C. Lind 提出的, 也称一次二阶矩验算点方法。假设基本随机变量  $x_i$  是独立正态分布的变量, 则  $Z$  代表以基本变量为坐标的欧氏  $n$  维空间的一个曲面, 将功能函数公式 (7-9) 在验算点处泰勒展开:

$$z = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \quad (7-28)$$

由于在极限状态曲面上, 故

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (7-29)$$

$$u_z = \sum_{i=1}^n (u_i - x_i^*) \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \quad (7-30)$$

$$\sigma_z = \left( \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=x^*} \right)^2 \cdot \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7-31)$$

所以可靠指标为:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \cdot (u_i - x_i^*)}{\left( \sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=x^*} \right)^2 \cdot \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (7-32)$$

验算点的分量值为:

$$x_i^* = u_i + \sigma_{x_i} \cdot \alpha_i \cdot \beta \quad (7-33)$$

公式中  $\alpha_i$  为灵敏度系数:

$$\alpha_i = \frac{- \left( \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=x^*} \right) \cdot \sigma_{x_i}}{\sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x=x^*} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2} \quad (7-34)$$

若已经知道各个基本随机变量的均值和方差, 可根据以上公式求出可靠指标值。要指出的是验算点并不预先知道, 因此在展开泰勒级数时必须先假定一个点, 例如各个基本随机变量的均值点, 另外首先假定一个  $\beta$ , 由式 (7-33) 来计算新的  $x_i^*$ , 将  $x_i^*$  代入极限状态方程来计算  $g$  值, 检验  $g(x_i^*) = 0$  是否满足, 若不满足则计算前后两次  $\beta$  和  $g$  差值之比  $\Delta\beta/\Delta g$ , 估计一个新的  $\beta$  值  $\beta_{j+1} = \beta_j - g_j(\Delta\beta/\Delta g)$ , 重复以上步骤, 直到  $g=0$  为止, 最后由  $P_f = \phi(-\beta)$  计算出失效概率。计算过程中, 用迭代法逐步逼近真正的验算点, 修正所得值, 直到结果满意为止。

### 7.2.2 非正态变量的等效正态化 (JC 法) 及修正 JC 法

#### 1. JC 方法计算结构可靠指标

H-L 法是假设基本随机变量为正态分布的情况, 但是在实际设计中, 结构的基本变量不一

定为正态变量, 对于基本变量为非正态分布的情况 Rackwitz 和 Fiessl V 提出 R-F 法 (JC 法)。

JC 法的基本原理: 首先把随机变量  $x_i$  原来的非正态分布用正态分布代替, 但是对于代替的正态分布函数要求在设计验算点  $x_i^*$  处累积概率分布函数 (CPF) 值和概率密度函数 (PDF) 值都和原来的分布函数的 CDF 和 PDF 值相同, 然后根据这两个条件求得等效正态分布的均值和标准差, 最后用 H-L 法计算可靠指标值。

由 JC 法基本原理知道某一特点  $x^*$  处满足:

$$F_x(x^*) = \Phi\left(\frac{x^* - u'}{\sigma'}\right) \quad (7-35)$$

$$f_x(x^*) = \phi'\left(\frac{x^* - u'}{\sigma'}\right) = \frac{1}{\sigma'} \cdot \phi\left(\frac{x^* - u'}{\sigma'}\right) \quad (7-36)$$

解得当量均值和方差:

$$u'_i = x_i^* - \sigma'_i \cdot \phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)] \quad (7-37)$$

$$\sigma'_i = \phi[\phi^{-1}(F_{X_i}(x_i^*))] / f_{X_i}(x_i^*) \quad (7-38)$$

式中,  $F_X(\cdot)$ ,  $f_X(\cdot)$  分别表示原函数和密度函数;  $\Phi(\cdot)$ ,  $\phi(\cdot)$  分别表示正态函数和正态密度函数;  $\phi^{-1}(\cdot)$  表示正态函数的反函数。

## 2. 改进 JC 法计算结构可靠指标

在工程实际问题中, 基本随机变量不仅符合非正态分布, 而且常常是相关的, 变量之间的相关性会影响可靠指标值, 对考虑随机变量之间的相关性问题一般采用协方差矩阵将相关变量空间转换为不相关的变量空间。

设极限状态方程为 (7-9), 将其在设计验算点  $x_i^*$  展开并取线性项得:

$$z = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \quad (7-39)$$

则  $z$  的均值和方差为:

$$u_z = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*) \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \quad (7-40)$$

$$\sigma_z = \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x^*} \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_{x_i} \cdot \sigma_{x_j} \right] \quad (7-41)$$

式中  $\rho_{ij}$  为相关系数。

$$\alpha_i = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_{ij} \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x^*} \cdot \sigma_{x_j}}{\left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_j} \right|_{x^*} \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_{x_i} \cdot \sigma_{x_j} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (7-42)$$

式中  $\alpha_i$  为灵敏度系数。

则式 (7-41) 为:

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \cdot \sigma_{x_i} \quad (7-43)$$

所以可靠指标为:

$$\beta = \frac{u_z}{\sigma_z} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_{x_i} - x_i^*) \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*} \cdot \sigma_{x_i}} \quad (7-44)$$

式(7-44)可化为:

$$x_i^* = u_{x_i} - \alpha_i \cdot \beta \cdot \sigma_{x_i} \quad (7-45)$$

由于非正态分布随机变量的当量正态化并不改变随即变量的线性相关性, 所以  $\rho_{ij}$  在当量正态化过程中保持不变。

因此, 若  $x_i$  为非正态分布, 则公式(7-40)~(7-45)中  $u_{x_i}$  和  $\sigma_{x_i}$  相应取等效正态分布的均值  $u'_{x_i}$  和标准值  $\sigma'_{x_i}$ 。

### 3. 有理多项式技术在 JC 法计算可靠指标中的应用

有理多项式技术是用来计算功能函数的偏导数。

对  $\left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x^*}$  的计算引入有理多项式技术。

首先令  $x_2 - x_n$  分别等于  $u_{x_2} - u_{x_n}$ , 再设  $m$  个  $x_1^i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ,  $m$  一般取 3 或 5 即可) 为已知值, 其中  $x_1^i \in [u_{x_1} - 3\sigma_{x_1}, u_{x_1} + 3\sigma_{x_1}]$ , 则可得到  $m$  个函数值如下:

$$g_{11} = g(x_1^1, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \quad (7-46)$$

$$g_{12} = g(x_1^2, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \quad (7-47)$$

函数  $g$  关于  $x_1$  的函数可以用有理多项式技术近似表示为:

$$g(x_1, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \approx a_1 + \frac{x_1 - x_1^1}{a_2 + \frac{x_1 - x_1^2}{a_3 + \dots + \frac{x_1 - x_1^{m-1}}{a_m}}} \quad (7-48)$$

上式也可写为:

$$g(x_1, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \approx \phi_1(x_1) \quad (7-49)$$

其中:

$$\phi_i(x_i) = a_i + \frac{x_i - x_i^i}{\phi_{i+1}(x_i)} \quad (7-50)$$

$$\phi_m(x_i) = a_m \quad (7-51)$$

上式中系数由表 7-1 求得。



表 7-1 变量有理多项式系数

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	.....
$a_1 = g_{11}$	--	--	--	
$a_{21} = g_{21}$	$a_2 = (x_1^2 - x_1^1)/(a_{21} - a_1)$	--	--	
$a_{31} = g_{31}$	$a_{32} = (x_1^3 - x_1^1)/(a_{31} - a_1)$	$a_3 = (x_1^3 - x_1^2)/(a_{32} - a_2)$	--	
$a_{41} = g_{41}$	$a_{42} = (x_1^4 - x_1^1)/(a_{41} - a_1)$	$a_{43} = (x_1^4 - x_1^2)/(a_{42} - a_2)$	$a_{43} = (x_1^4 - x_1^3)/(a_{43} - a_3)$	
...	...	...	...	

则由式 (7-50) ~ (7-53) 可得:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \approx \phi_1(x_1) = \frac{\phi_2(x_1) - [x_1 - x_1^1]\phi_2'(x_1)}{[\phi_2(x_1)]^2} \quad (7-52)$$

$$\phi_1'(x_1) = \frac{\phi_{i+1}(x_1) - [x_1 - x_1^i]\phi_{i+1}'(x_1)}{[\phi_{i+1}(x_1)]^2} \quad (7-53)$$

当  $i = m$  时,  $\phi_m'(x_1) = 0$

所以:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{x^*} \approx \phi_1'(x_1^*) \quad (7-54)$$

同理可求得函数对其他变量的偏导数。

### 7.2.3 分位值法

一次二阶矩验算点法可以用于任意分布的随机变量以及非线性极限状态方程, 在应用该方法进行迭代计算时, 需要在每次迭代过程中重新计算当量正态分布的均值和标准差, 计算比较繁琐, 为此, 铁路科学研究院的姚明初提出了“分位值法”, 它可以代替“当量正态化”而使计算比较简单, 特别是进行分项可靠指标计算时更能显示这一方法的优越性。

设结构的极限状态方程为:

$$Z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (7-55)$$

将基本变量按下式进行“约化高斯变量”的变换:

$$\beta_{X_i} = \phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \quad (7-56)$$

式中,  $\beta_{X_i}$  为基本随机变量的约化高斯变量;  $\phi^{-1}(\cdot)$  为标准正态分布函数的反函数;  $F_{X_i}(X_i)$  为基本变量的分布函数。

将 (7-56) 进行反变换可得:

$$x_i = F_{X_i}^{-1}[\phi(\beta_{X_i})] \quad (7-57)$$

将 (7-57) 代入极限状态方程式 (7-55) 得:

$$Z = G\{F_{X_1}^{-1}[\phi(\beta_{X_1})], F_{X_2}^{-1}[\phi(\beta_{X_2})], \dots, F_{X_n}^{-1}[\phi(\beta_{X_n})]\} \quad (7-58)$$