普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

下册

◎ 西南交通大学数学教研室 组编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

下册

西南交通大学数学教研室　组编

机械工业出版社

本书分为上、下两册. 主要内容包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、空间解析几何、微分方程、级数和数学软件 Mathematica 的使用等内容.

本书可作为工科学生和应用技术类学生的教材，也可作为其他学科学生学习高等数学的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册/西南交通大学数学教研室组编. —北京：机械工业出版社，2013.8

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-43384-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①西… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 160153 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：王玉鑫 责任编辑：王玉鑫

责任校对：申春香

责任印制：张 楠

北京振兴源印务有限公司印刷

2013 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 14.75印张 · 359千字

0001—3000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-43384-2

定价：28.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　　言

“高等数学”是理工类和经济类学生必修的基础课程，也是现代科学技术和社会科学中应用最为广泛的一门学科．在现阶段，各高等院校采用的《高等数学》教材种类繁多、各有特色，但适应工科及应用技术类的高等数学教材并不多见．因此，编写一本适合工科学生及应用技术类学生的《高等数学》教材是我们多年的愿望．

我们积累了多年执教“高等数学”课程的实践经验，参考国内外各优秀教材，共同努力，写成了此书．书中融入了我们在长期的教学和科研实践中所积累的心得和体会，以飨读者．

本书在结构体系、内容安排、习题选择等方面，努力体现应用技术型及工科教学的特点，本着“打好基础，够用为度，强调应用”的原则，把握内容的难易程度，注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养，尽力做到引进基本概念自然、清晰，除基本定理外，淡化了定理的证明．

为了适应现代化教学的需要和新的计算机发展形势的要求，我们专门在下册的第 10 章中介绍了数学软件 Mathematica 的操作和使用方法及其在“高等数学”课程中的应用，目的是使学生在掌握数学理论的同时，能够比较轻松地完成计算，这对学生以后的学习和工作都是非常有益的．

本书由张跃、曹思越教授主审，西南交通大学数学教研室全体老师编写，编委有徐昌贵、熊学、黄雪梅、张雁、张静、李宁娅、林红霞、卢鹏、何莎等．

本书虽经几次校改，但疏漏之处在所难免，请读者不吝指正．

编　者

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 5 章　向量代数与空间解析几何

在中学数学中，我们在平面上建立坐标系，平面上的点可用有序数组(即点的坐标)来表示，从而平面上的图形可以通过方程表示出来．于是，我们可以用代数的方法来研究几何问题，也可借助平面图形解决代数问题，这就是平面解析几何学的本质．现在，我们把平面解析几何的理论和方法推广到空间中，即空间解析几何．研究解析几何的一个重要工具就是向量，本章先介绍向量代数，再介绍空间解析几何的基本知识，这些知识也是后面将要学习的多元微积分的基础．

5.1　向量及其线性运算

5.1.1　向量的概念

向量的概念最初来自物理学．许多物理量不仅有大小，而且有方向，如力、力矩、速度、加速度、电场强度、磁场强度等，在物理学中把这类物理量称为向量．撇开它们的物理意义，只考虑其大小和方向，就得到数学中向量的概念：既有大小，又有方向的量称为**向量**．为了增加直观性，在数学中，用一条有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，称为**向量的模**；有向线段的方向表示向量的方向．如以 A 为起点、B 为终点的有向线段表示的向量，记作$\overrightarrow{AB}$(见图 5-1)，或用一个黑体字母来表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{i}$ 等．向量$\overrightarrow{AB}$的模记作$|\overrightarrow{AB}|$，$\boldsymbol{a}$ 的模记作$|\boldsymbol{a}|$.

解析几何中所说的向量只考虑其大小和方向而不考虑其起点的位置，因此可认为向量可以在空间中平行移动，这种向量称为自由向量．所以，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，就称这**两个向量相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

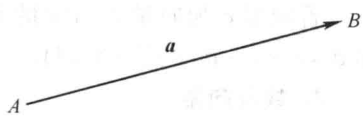

图　5-1

两个非零向量，若大小相等，方向相反，则称这两个向量互为**负向量**，分别记为 $\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$．模为 1 的向量称为**单位向量**．模为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，零向量的方向是不确定的.

如果非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，就称它们**平行**(或**共线**)，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

对空间中 k 个向量($k\geqslant3$)，若将它们的起点移至同一点，其终点在同一个平面上，则称这 k 个向量共面.

5.1.2　向量的线性运算

向量的加减法和数乘向量这两种运算称为**向量的线性运算**，它们都是从物理学和其他学科的相关问题中抽象出来的.

1. 向量的加减法

在力学中，力的合成通常使用“平行四边形法则”，我们也按相同的方法来定义向量的加法：设给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作一个平行四边形，其对角线向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$(见图 5-2a)；平行四边形法则可简化成三角形法则(见图 5-2b).

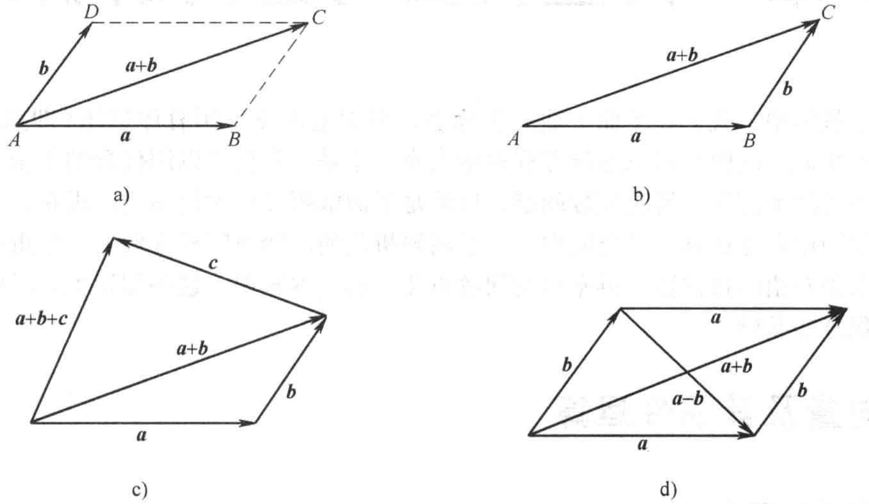

图 5-2

若应用三角形法则作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，则可将 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 三个向量依次首尾相连，从第一个向量的起点至最后一个向量的终点所作的向量就是该和向量(见图 5-2c). 这个结论可推广至有限个向量相加的情况.

由向量加法的定义不难得到，向量加法满足：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

若向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，则称向量 $\boldsymbol{b}$ 为向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的差，记作 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{a})$(见图 5-2d).

2. 数乘向量

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量，λ 是一个实数，则 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，其模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 其方向当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，方向任意.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

上述运算称为数乘向量.

容易验证，数乘向量符合下列运算规律(其中 λ,μ 为任意实数)：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda)\boldsymbol{a}=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

设 $\boldsymbol{a}^\circ$ 是与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，由两向量相等和数乘向量的定义可得 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ$. 若 $\boldsymbol{b}\neq0$，记 $\boldsymbol{b}^\circ$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则有 $\boldsymbol{a}^\circ=\boldsymbol{b}^\circ$ 或 $\boldsymbol{a}^\circ=-\boldsymbol{b}^\circ$，那么

$$\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}^\circ=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}^\circ=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ=\pm\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，取 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，取 $\lambda=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，所以总有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 确定时，$\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$是唯一确定的，从而 λ 是唯一确定的.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，若存在唯一确定的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，显然有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

综上所述，可得以下定理.

定理　若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一确定的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 1　已知梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，设 E，F 分别为其对角线 AC，BD 的中点，证明：$EF/\!/AB$.

证　如图 5-3 所示，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}),\end{aligned}$$

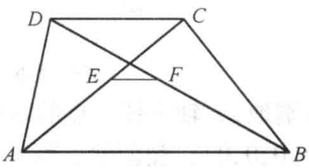

图　5-3

由于$\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\boldsymbol{0}$，又 $AB/\!/CD\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(1+\lambda)\overrightarrow{AB}$，则 $EF/\!/AB$. 证毕.

5.1.3　空间直角坐标系

在空间中任选一点 O 作三条互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，各轴上取定相同的长度单位，且按右手法则规定三条数轴的正方向（即以右手握住 Oz 轴，当右手的四个手指从 Ox 轴的正向旋转 90°到 Oy 轴的正向时，大拇指的指向就是 Oz 轴的正向）（见图 5-4），这便构成了一个空间直角坐标系. 三条轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），点 O 称为坐标原点.

由于三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样确定的三个平面称为坐标面，分别称为 xOy，yOz 和 zOx 平面，这三个坐标面又将空间分成 8 个部分，每个部分叫做一个卦限，共 8 个卦限（见图 5-5）.

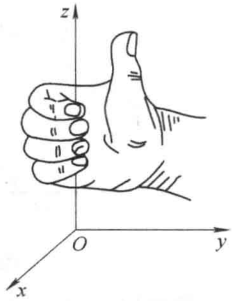

图　5-4

设 M 为空间一个已知点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，与 x 轴、y 轴和 z 轴的交点依次为 P，Q，R，这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴的坐标依次为 x，y，z，则对空间的点 M 有唯一的一组有序实数 (x,y,z) 与之对应（见图 5-6）；反之，任给一组有序实数 (x,y,z)，可依次在 x 轴、y 轴和 z 轴取数 x，y，z，对应的点依次为 P，Q，R，过 P，Q，R 分别作与坐标轴垂直的平面，则三个平面的交点 M 就是有序实数组 (x,y,z) 唯一对应的点. 因而空间点 M 与有序实数 (x,y,z) 建立了一一对应关系，我们称 x，y，z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 称 (x,y,z) 为点 M 的坐标，记作 $M(x,y,z)$.

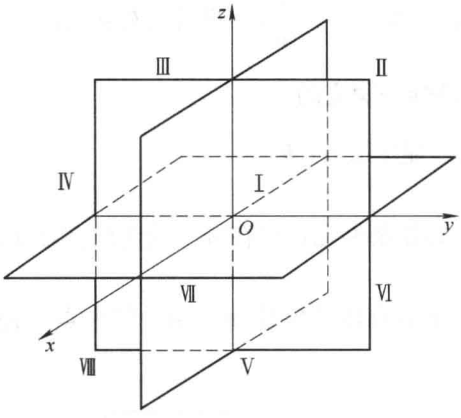

图 5-5

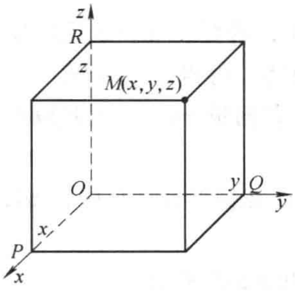

图 5-6

特别地，x 轴上任一点的坐标为$(x,0,0)$，xOy 平面上任一点的坐标为$(x,y,0)$，原点的坐标为$(0,0,0)$，类似地，可得另外几个坐标轴和坐标面上点的坐标.

与平面直角坐标系中两点之间的距离公式类似，可得空间中两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，则其距离为：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

5.1.4 利用坐标进行向量的线性运算

1. 向量在数轴上的投影

设有数轴 u 和向量 $\overrightarrow{AB}$，O 为数轴上的坐标原点，如图 5-7 所示，作$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$，过点 M 作数轴 u 的垂线(或垂面)，垂足为点 P，称点 P 为点 M 在数轴 u 上的投影，点 P 的坐标就称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u(\overrightarrow{AB})$.

显然，$\mathrm{Prj}_u(\overrightarrow{AB})$为一个可正可负的实数，当$\overrightarrow{AB}\perp u$ 时，有 $\mathrm{Prj}_u(\overrightarrow{AB})=0$. 由于$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$，我们称向量$\overrightarrow{OM}$与 u 轴正向的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$为$\overrightarrow{AB}$与 u 轴的夹角，则 $\mathrm{Prj}_u(\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$. 由图 5-8 可知 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$.

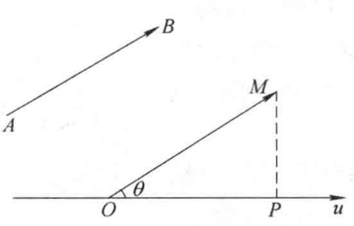

图 5-7

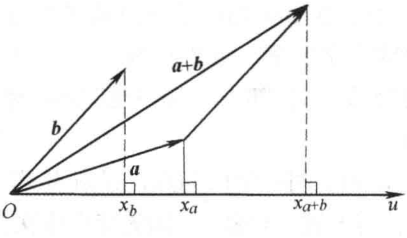

图 5-8

类似地，可定义向量在向量上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

设有两非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，称 $\theta=\angle AOB$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$为两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. 若$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

记 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 和 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，分别称为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影和 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的

投影. 显然，当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=0$. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中至少有一个零向量时，可认为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，但不能将零向量作为投影轴向量来定义向量在向量上的投影.

2. 向量的分解与向量的坐标

设 M 为数轴 Ou 上的一点，其在轴 u 上的坐标为 x，与轴 u 同向的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，则由数乘向量的定义可知

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}$$

在空间直角坐标系中，设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示在三个坐标轴上且与三坐标轴同向的单位向量(称为基本单位向量). 现将空间任意向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移动到原点 O，其终点就对应空间中的一点 $A(x,y,z)$，过 A 点分别作 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的垂面，垂足分别为 P，Q，R(见图 5-9)，则

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，也记作 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$ 或 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，x，y，z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的分向量.

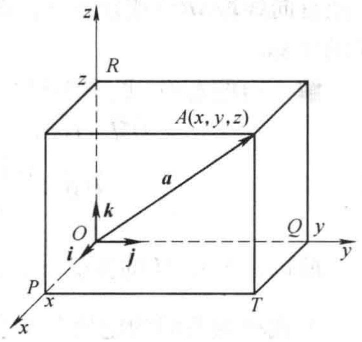

图　5-9

事实上，$\mathrm{Prj}_{Ox}\boldsymbol{a}=x$，$\mathrm{Prj}_{Oy}\boldsymbol{a}=y$，$\mathrm{Prj}_{Oz}\boldsymbol{a}=z$.

若记 a_x，a_y，a_z 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三坐标轴上的投影，则

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}.$$

设 $\boldsymbol{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则根据向量的加减法和数乘运算的定义可得

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}.$$

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在唯一确定的实数 λ，使得

$$x_2=\lambda x_1,\quad y_2=\lambda y_1,\quad z_2=\lambda z_1,$$

或

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}.$$

空间中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$所确定的向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\},\end{aligned}$$

即空间中一个向量的坐标是：各终点坐标减去各对应的起点坐标(见图 5-10).

对向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$，由图 5-9 可得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

对向量$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，应有

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

实质上，上式也是空间中两点间的距离公式.

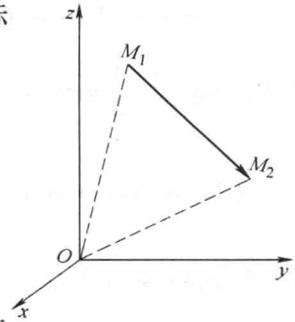

图　5-10

例 2　一向量$\overrightarrow{AB}$的终点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求该向量的起点 A 的坐标.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

解 设 A 的坐标为 (x,y,z)，由题意知 $\overrightarrow{AB}=\{4,-4,7\}$，$B(2,-1,7)$，故

$$x=2-4=-2,\ y=-1+4=3,\ z=7-7=0,$$

所以 A 的坐标为 $(-2,3,0)$.

例 3 设两定点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，若点 $M(x,y,z)$ 把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 分成定比 λ，即 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}(\lambda\neq-1)$，求分点 M 的坐标.

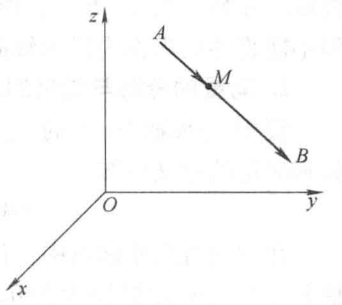

图 5-11

解 由题意有(见图 5-11)

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

故

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda},$$

所以，分点 M 的坐标 $(x,y,z)=\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

上式称为空间的定比分点公式.

3. 向量的方向余弦

上面我们用向量的坐标表示了向量的模长，下面我们考虑用向量的坐标来表示其方向.

设向量 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$ 与坐标轴 Ox，Oy，Oz 正向的夹角分别为 α，β，$\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$. α，β，γ 确定了向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 相应地称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦(见图 5-12). 由图可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

这样，我们就能用向量的坐标来表示其方向，且有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{x,y,z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

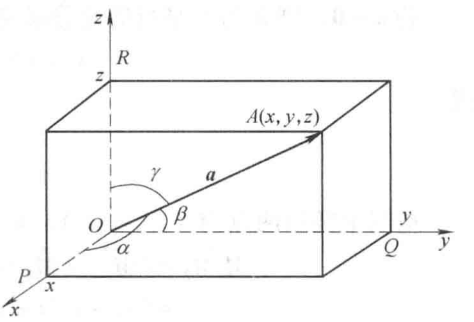

图 5-12

例 4 设点 $A(1,0,-1)$，$|\overrightarrow{AB}|=10$，$\overrightarrow{AB}$ 的方向角 $\alpha=60°$，$\beta=45°$，求：(1) γ 的值；(2) 点 B 的坐标.

解 (1) 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 有

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2 60°-\cos^2 45°=\frac{1}{4},$$

所以 $\cos\gamma=\pm\dfrac{1}{2}\Rightarrow\gamma=60°$ 或 $\gamma=120°$；

(2) 设 $B(x,y,z)$，有 $\begin{cases}x-1=10\cos 60°\\ y-0=10\cos 45°\\ z+1=10\cos\gamma\end{cases}\Rightarrow x=6$，$y=5\sqrt{2}$，$z=4$ 或 -6，则点 B 的坐标为 $(6,5\sqrt{2},4)$ 或 $(6,5\sqrt{2},-6)$.

习题 5-1

1. 已知$\triangle ABC$三条边的中点依次为D，E，F，记$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，求$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$.

2. 设$\triangle ABC$的边$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$BC$被$D$分成$BD:DC=m:n$，$AC$被$E$分成$AE:EC=m:n$，证明：$\overrightarrow{DE}\,//\,\overrightarrow{BA}$.

3. 若平面上一个平行四边形的对角线互相平分，用向量的线性运算证明它是一个平行四边形.

4. 边长为a的立方体的一条对角线为OM，一条边为OA，求$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OM}$和$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

5. 自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

6. 一边长为a的立方体放置在xOy面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在x轴和y轴上，求它的各顶点的坐标.

7. 在yOz面上，求与三点$A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$和$C(0,5,1)$等距离的点.

8. 证明：以$A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

9. 设有两个力$\boldsymbol{F}_1=(3,2,-1)$，$\boldsymbol{F}_2=(1,-1,2)$同时作用于一点，求合力$\boldsymbol{F}$.

10. 设$\boldsymbol{a}=(2,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$，$\boldsymbol{c}=(2,-11,7)$，求x，y，使得$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

11. 已知平行四边形$ABCD$的两个顶点$A(2,-3,-5)$和$B(-1,3,2)$以及它的对角线的交点$E(4,-1,7)$，求顶点C，D的坐标.

12. 已知两点$P_1(2,5,-3)$和$P_2(3,-2,5)$，若在$\overrightarrow{P_1P_2}$上的一点P满足$\overrightarrow{P_1P}=3\overrightarrow{PP_2}$，求点$P$的坐标.

13. 求以$A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,1,12)$为顶点的三角形重心的坐标.

14. 设$\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$在$x$轴上的投影及在$y$轴上的分向量.

15. 已知两点$A(4,\sqrt{2},1)$，$B(3,0,2)$，求：

(1) $\overrightarrow{AB}$的模；(2) 与$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量；(3) $\overrightarrow{AB}$的方向余弦及方向角.

16. 一向量与Ox轴、Oy轴所成的角相等，而与Oz轴所成的角为它们之一的两倍，试确定该矢量的方向.

5.2　数量积、向量积、混合积

5.2.1　向量的数量积

若一物体在常力$\boldsymbol{F}$的作用下，沿直线从M_1移动到M_2，以$\boldsymbol{s}$表示位移，力$\boldsymbol{F}$和位移$\boldsymbol{s}$的夹角为θ，则力$\boldsymbol{F}$所做的功为$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$，类似的运算在实际应用中经常会遇到，故我们将这种运算定义为向量的数量积.

定义 1　若两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$运算的结果是一个数，并且等于这两个向量的模及它们之间夹角余弦的乘积，则称这个乘积为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的数量积(也称内积或点积). 记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$(见图 5-13).

由数量积的定义可得

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$；

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ （$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 简记为$\boldsymbol{a}^2$）；

（3）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ （$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量）；

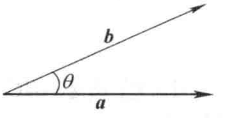

图 5-13

可以证明，数量积运算满足下列运算律：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

（2）$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（$\lambda$ 为数）；

（3）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，

下面讨论数量积的坐标表示形式：

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 互相垂直，且为单位向量，所以 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，因而有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

这就是两个向量的数量积的坐标表示式

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，所以，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时，有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

例 1　$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{2\pi}{3}$，求（1）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$；（2）$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$；（3）以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $4\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线的长.

解　（1）
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})&=-4\,\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\,\boldsymbol{b}^2=-4\,|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+3\,|\boldsymbol{b}|^2\\&=-4\times4^2-4\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\times1^2=-59;\end{aligned}$$

（2）因为 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\,\boldsymbol{b}^2=4^2-4\times4\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4\times1^2=28$，

所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$；

（3）因为 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(4\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(4\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=-2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，

故 $|6\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|^2=36\boldsymbol{a}^2-48\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+16\boldsymbol{b}^2=36\times4^2-48\times4\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+16\times1^2=688$，

$|-2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2-24\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+36\boldsymbol{b}^2=4\times4^2-24\times4\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+36\times1^2=148$，

所以 $|6\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|=\sqrt{688}=4\sqrt{43}$，$|-2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}|=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$.

所以，以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $4\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线的长分别为 $4\sqrt{43}$ 和 $2\sqrt{37}$.

例 2　已知三点 $A(1,2,1)$，$B(2,3,1)$，$C(3,2,3)$，求：（1）$\angle BAC$；（2）求$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$

上的投影.

解 (1) $\overrightarrow{AB}=\{1,1,0\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2,0,2\}$, 有 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{8}$,

所以 $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$, 故 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例 3 证明：三角形的三条高线交于一点.

证 如图 5-14 所示，设 $\triangle ABC$ 在边 AC, BC 上的高交于点 P，且令 $\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$, 有 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$, 再由 $PA\perp BC$, $PB\perp CA$ 有 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$, $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$, 两式相加有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0\Rightarrow(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$, 从而有 $PC\perp AB$, 所以, $\triangle ABC$ 的三条高线交于一点.

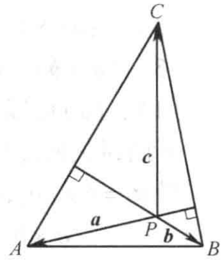

图 5-14

5.2.2 向量的向量积

在研究物体转动问题时，不但要考虑该物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩.

设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力作用于该杠杆上的点 P 处，$\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ（见图 5-15）.

由力学规定，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$，它的模 $|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OQ}||\boldsymbol{F}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$，而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 来确定的，即当右手的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的指向（见图 5-16）.

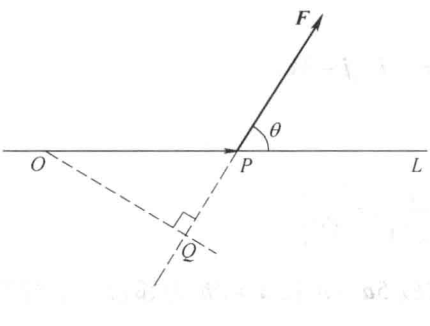

图 5-15

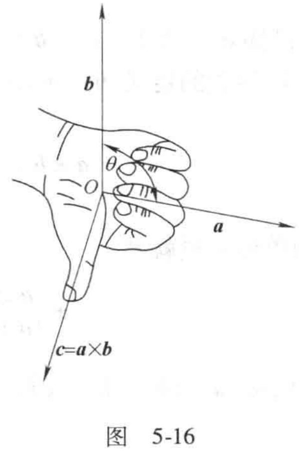

图 5-16

这种由两个已知向量按上面的规则来确定另一个向量的情况，在其他力学和物理问题中也会遇到，例如，磁场中的电流受到的力，导体切割磁力线产生的电动势等. 从而可以抽象出两个向量的向量积概念.

定义 2 若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 运算的结果仍然是一个向量 $\boldsymbol{c}$，规定：$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，且 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 符合右手规则（见图 5-16），则称 $\boldsymbol{c}$ 为

向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的向量积(也称外积或叉积)，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，有 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

由向量积的定义可得：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量).

此式表明，两向量共线的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

可以证明，向量积符合下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$ (λ 为数)；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(1)、(2)可以由向量积的定义直接证明，(3)的证明比较复杂，这里从略.

下面讨论向量积的坐标表示形式.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，由向量积的定义知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x,a_y,a_z)\times(b_x,b_y,b_z)\\&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+\\&\quad a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\&=a_xb_y\boldsymbol{k}+a_xb_z(-\boldsymbol{j})+a_yb_x(-\boldsymbol{k})+a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_zb_y(-\boldsymbol{i})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

为了便于记忆这个结果，我们采用行列式的符号，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

例 4 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,1-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-1,0\}$，求与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同时垂直的单位向量.

解 由向量积的定义知，$\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$是同时垂直 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量，而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

于是所求的单位向量就是

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\left\{\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right\}.$$

例 5 已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{2\pi}{3}$，求以 $5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

解 由于 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 在数值上等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积(见图 5-17)，所以，以 $5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为

$$\begin{aligned}|(5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})|&=16|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=16|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\&=16\times4\times\sqrt{3}\times\sin\frac{2\pi}{3}=96.\end{aligned}$$

5.2.3 *向量的混合积

已知三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，其中两个向量的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 作数量积，所得结果是数量，称为三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积.

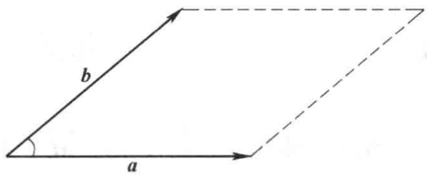

图　5-17

向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 记为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，从而 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

下面我们来推出三向量的混合积的坐标表示式.

设向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{b}=(y_1,y_2,y_3)$，$\boldsymbol{c}=(z_1,z_2,z_3)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3&x_1\\y_3&y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\right)$$

于是

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}z_1+\begin{vmatrix}x_3&x_1\\y_3&y_1\end{vmatrix}z_2+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}z_3=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}.$$

向量的混合积有下述几何意义.

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是不共面的三个非零向量，任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 再以线段 OA，OB，OC 为棱作一平行六面体，设其高为 h，体积为 V. 并作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，记 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α(见图 5-18).

由于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则，所以当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 符合右(或左)手法则时，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所成的平面的同侧(或异侧)，因此 α 为锐角(或钝角)，故 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha=V$(或 $-V$).

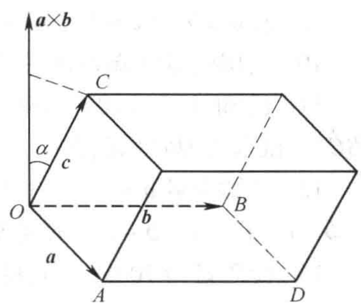

图　5-18

由上可知，向量的混合积是这样一个数，它的绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 符合右手法则，那么混合积的符号是正的；如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 符合左手法则，那么混合积的符号是负的.

显然，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是它们的混合积 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

由向量的数量积和向量积运算，容易得到

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

例 6　求以 $A(1,2,3)$，$B(2,4,1)$，$C(1,-3,5)$，$D(4,-2,3)$ 为顶点的四面体的体积.

解　由立体几何知道，四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体体积的 1/6，即

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|,$$

由于　$\overrightarrow{AB}=\{1,2,-2\}$，$\overrightarrow{AC}=\{0,-5,2\}$，$\overrightarrow{AD}=\{3,-4,0\}$，

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com