

高等院校力学教材

Textbook in Mechanics for Higher Education



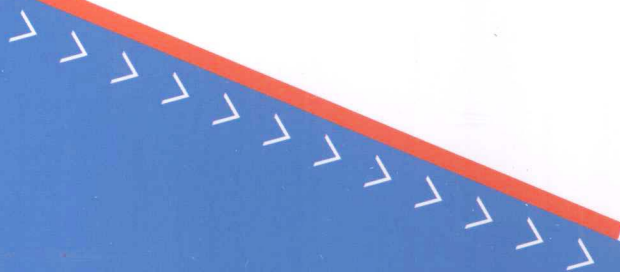
弹性力学 简明教程 (第2版)

Introduction to Elasticity

(2nd edition)

杨桂通 编著

Yang Guitong



清华大学出版社

013066781

0343-43
18-2

高等院校力学教材
Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学简明教程

(第2版)

Introduction to Elasticity

(2nd edition)

杨桂通 编著
Yang Guitong



清华大学出版社
北京



北航 C1674618

0343-43
18-2

187380810

内 容 简 介

本书是为工程类各有关专业编写的一本弹性力学简明教程,可供研究生和高年级大学生作为教材,其中有些内容可以选读。全书共有 14 章,包括弹性力学的基本理论、基本概念和基本方法;简单的和一些工程上常见的弹性力学问题;弹性弯曲和扭转;弹性薄板;热应力问题;变分原理和数值方法;用 MATLAB 软件计算弹性力学问题。本书理论与应用并重,概念清晰,易于理解,列有习题和思考题,举一反三,便于掌握。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学简明教程/杨桂通编著. —2 版. —北京:清华大学出版社,2013

高等院校力学教材

ISBN 978-7-302-33130-8

I. ①弹… II. ①杨… III. ①弹性力学—高等学校—教材 IV. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 150515 号

责任编辑:佟丽霞

封面设计:常雪影

责任校对:王淑云

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市金元印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:15.75

字 数:381 千字

版 次:2006 年 9 月第 1 版 2013 年 8 月第 2 版

印 次:2013 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:29.90 元

产品编号:051544-01

第 2 版前言

本书主要研究弹性力学问题的基础理论和方法。这次修订,基本保持了原版的主要内容和风格,仍以简明易懂,由浅入深为原则。故基础理论部分基本未加改动。为了引进先进的计算方法,增加了一章用 MATLAB 软件计算弹性力学问题。这样,读者便可以用个人电脑完成一般弹性力学问题的计算和分析。考虑到薄壳问题常设有专门课程,同时为了减少难点而将薄壳一章删去。全书仍为 14 章。

本书可作为弹性力学的基础教材,也可作为高等学校有关专业的大学生和研究生以及有关科学研究人员和工程技术人员的教科书和参考书。

在这次修订过程中,太原理工大学应用力学与生物医学工程研究所的同事们和我的学生们给予了长期的热情支持和帮助,特此致以衷心的感谢。

作者对清华大学出版社的领导和老师们对这次修订所给予的热情支持和帮助,表示诚挚的谢意。

杨桂通

于太原理工大学

2013 年 2 月

第 1 版前言

本书是为工程类各有关专业的研究生和高年级大学生提供一本简明易懂的教材,其中包含必要的基本理论基础和工程上常见的弹性力学问题。这就要求在取材和讲授方法上做到:去粗取精,通俗易懂,概念清晰,系统不乱。开始动笔以来,我便朝这个方向努力去做。

所有的工程技术人员都会碰到各式各样的力学问题,其中最多的可能就是当各种材料的物体或结构受各式各样的外界作用时,要我们判断其工作状态或是做出有安全、经济要求的设计。对于重要的工程要求给出科学的判断或精确的设计,这就需要掌握固体力学首先是弹性力学的基础理论和分析方法,以求给出正确的工程设计。

本书共分 14 章,都是弹性力学的最基本和最有实用价值的重要概念和分析方法,除第 1 章绪论外,第 2~6 章包括:应力和应变的概念和表达方法;应力和应变之间的联系;弹性力学问题的提法和简单的平面问题。第 7 章介绍弹性力学平面问题最精彩的求解方法——复变函数法;第 8 章讲述柱体的弹性扭转;第 9 章介绍弹性体受热状态引起的应力问题;第 10 章介绍空间问题的解题方法和两弹性体的接触问题;第 11 章讲述弹性力学的变分原理及数值方法,介绍了常见的里兹法、迦辽金法和有限元法,这一章实为做数值计算准备理论基础,并对进一步做研究工作建立重要概念;第 12 和 13 章分别介绍薄板和薄壳问题;最后一章介绍弹性波理论,希望借此给读者一些在动力作用下将产生弹性波传播的概念。书中每章附有复习要点、思考题和习题。为了使读者对力学的发展历程和著名科学家对力学发展的贡献有些了解,书中安排了相应的简介和插图。

在编写本书过程中,树学锋教授、陈维毅教授、赵广慧博士以及太原理工大学应用力学研究的老师和我的学生们给了我许多帮助,特向他们表示衷心的感谢。此外,本书参考并吸收了许多国内外弹性力学名著的思想和内容,非常感谢众多专家学者给予的现成的精彩成果,主要的都列在参考文献中。

最后,我特别感谢清华大学出版社的杨倩编辑,由于她的辛勤工作,热心的支持与帮助,使得本书得以问世。

杨桂通

于太原理工大学

2006 年 5 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 弹性力学的研究对象和任务	1
1.2 基本假定	2
1.3 弹性变形	3
1.4 弹性力学发展历程简介	3
思考题	4
第 2 章 应力	5
2.1 力和应力的概念	5
2.2 二维应力状态与平面问题的平衡方程	8
2.3 一点处应力状态的描述	12
2.4 边界条件	14
2.5 主应力与主方向	16
2.6 球张量与应力偏量	20
复习要点	22
思考题	23
习题	23
第 3 章 应变	25
3.1 变形与应变的概念	25
3.2 主应变与应变偏量及其不变量	30
3.3 应变协调方程	31
复习要点	32
思考题	33
习题	33

第 4 章 应力应变关系	35
4.1 广义胡克定律.....	35
4.2 工程上常用的弹性常数.....	38
4.3 弹性应变能函数.....	41
复习要点	44
思考题	44
习题	44
第 5 章 弹性力学问题的提法	46
5.1 基本方程.....	46
5.2 问题的提法.....	48
5.3 弹性力学问题的基本解法 解的惟一性.....	49
5.4 圣维南原理.....	53
5.5 叠加原理.....	54
5.6 简例.....	55
复习要点	56
思考题	57
习题	57
第 6 章 平面问题	58
6.1 平面问题的基本方程.....	58
6.2 应力函数.....	61
6.3 梁的弹性平面弯曲.....	63
6.4 深梁的三角级数解法.....	68
6.5 用极坐标表示的基本方程.....	71
6.6 厚壁筒问题.....	75
6.7 半无限平面体问题.....	77
6.8 圆孔孔边应力集中.....	83
复习要点	87
思考题	87
习题	88
第 7 章 用复变函数法解平面问题	90
7.1 复变函数的基本关系式.....	90
7.2 Goursat 公式和 Kolosoff-Muskhelishvili 函数	92
7.3 应力与位移的解析函数表达式	92
7.4 边界条件.....	93
7.5 多连域内应力与位移的单值条件.....	94

7.6	保角映射及其应用	97
7.7	带有圆孔口的无限大板问题	99
7.8	带有椭圆孔的无限大板问题	101
	复习要点和思考题	102
	习题	103
第8章	柱体的扭转	104
8.1	问题的提出 基本关系式	104
8.2	矩形截面柱体的扭转	108
8.3	薄膜比拟法	111
8.4	受扭开口薄壁杆的近似计算	113
	复习要点	114
	思考题	114
	习题	114
第9章	热应力	116
9.1	一般概念	116
9.2	热力学定律	117
9.3	基本方程	119
9.4	Duhamel-Neumann 法则	121
9.5	平面热应力问题	122
	复习要点和思考题	126
	习题	126
第10章	空间问题	127
10.1	弹性力学问题的一般解	127
10.2	有集中力作用的无限弹性体问题	130
10.3	Boussinesq 问题	132
10.4	Hertz 接触问题	134
	复习要点和思考题	137
	习题	137
第11章	变分原理及其应用	138
11.1	基本概念	138
11.2	虚位移原理	139
11.3	最小总势能原理	144
11.4	虚应力原理	147
11.5	最小总余能原理	148

11.6	一般变分原理	149
11.7	利用变分原理的近似解法	153
	复习要点	164
	思考题	164
	习题	165
第 12 章	薄板的弯曲	167
12.1	基本概念与基本假定	167
12.2	薄板弯曲的平衡方程	170
12.3	边界条件	174
12.4	矩形板的经典解法	177
12.5	圆板的轴对称弯曲	181
12.6	用变分法解板的弯曲问题	185
	复习要点	190
	思考题	190
	习题	191
第 13 章	弹性波	192
13.1	一维弹性波	192
13.2	无限介质中的弹性波 体波	196
13.3	半无限介质表面的波 面波	197
	复习要点和思考题	201
	习题	202
第 14 章	用 MATLAB 软件计算弹性力学问题	203
14.1	MATLAB 简介	203
14.2	弹性力学问题的计算	207
	思考题	218
附录 A	矢量与张量的基本公式	219
A.1	指标记法	219
A.2	坐标变换 基矢量	219
A.3	张量及张量代数	221
A.4	Christoffel 符号 协变导数	223
A.5	标量场与矢量场	224
附录 B	变分法概要	227
B.1	泛函和泛函的极值问题	227

B. 2	泛函极值的必要条件, 欧拉方程	228
B. 3	有附加条件的变分问题	230
B. 4	变边界问题, 自然边界条件	232
附录 C	复变函数与解析函数的基本性质	234
C. 1	复变函数与解析函数	234
C. 2	柯西积分公式	236
	外国人名译名对照表	237
	索引	239
	参考文献	242

第 1 章

绪 论

1.1 弹性力学的研究对象和任务

弹性力学是固体力学的一个分支学科,是研究可变形固体受到外载荷、温度变化及边界约束变动等作用时,弹性变形和应力状态的科学。本书专门讨论固体材料中的理想弹性体的力学问题。

弹性力学是人们在长期生产实践与科学实验的丰富成果的基础上发展起来的。它的发展与社会生产发展有着特别密切的关系,它来源于生产实践,又反过来为生产实践服务。弹性力学作为固体力学的一个独立分支学科已有一百多年的历史。它有一套较完善的经典理论和方法,在工程技术的许多领域得到了广泛的应用。目前,由于现代科学技术的进一步发展,向弹性力学的新理论提出了一系列新课题,新任务。因而,研究弹性力学的新理论、新方法及其在工程上的应用是非常必要的。在目前,弹性力学仍然是一门富有生命力的学科。

材料力学和结构力学的研究对象及问题,往往也是弹性力学所要研究的问题。不过,在材料力学和结构力学中主要是采用简化的可用初等理论描述的数学模型。在弹性力学中,则将采用较精确的数学模型。有些工程问题(例如非圆形断面柱体的扭转,孔边应力集中,深梁应力分析等问题)用材料力学和结构力学的理论无法求解,而在弹性力学中是可以解决的。有些问题虽然用材料力学和结构力学的方法可以求解,但无法给出精确可靠的结论,而弹性力学则可以给出用初等理论所得结果可靠性与精确度的评价。因而,弹性力学的任务有二:一是建立并给出用材料力学和结构力学方法无法求解的问题的理论和方法;二是给出初等理论可靠性与精确度的度量。

学习本课程的目的大致可归结为:

- 1) 确定一般工程结构在外载荷作用下的弹性变形与内力的分布规律。

- 2) 确定一般工程结构的承载能力。
- 3) 为进一步研究工程结构的强度、振动、稳定性等力学问题打下必要的理论基础。

1.2 基本假定

固体材料通常分为晶体和非晶体两种。晶体是由许多离子、原子或分子按一定规则排列起来的空间格子(称为晶格)构成的。它们一般均处于稳定的平衡状态。普通固体(例如低碳钢、黄铜、铝、铅等)是由许多晶粒方位混乱地组合起来的。它们中间常有一些缺陷存在。非晶体一般是由许多分子的集合组成的高分子化合物。由此可见,固体材料的微观结构是多样的、复杂的。如果我们在研究工程结构的力学性态时,考虑固体材料的这些特征,必将带来数学上的极大困难。为了把本书所研究的问题限制在一个简便可行的范围内,必须引进下列一些假定。

1) 假定固体材料是连续介质。即,这种介质无空隙地分布于物体所占的整个空间。这一假定显然与上述介质是由不连续的粒子所组成的观点相矛盾。但我们采用连续性假定,不仅是为了避免数学上的困难,更重要的是根据这一假定所进行的力学分析,被广泛的实验与工程实践证实是正确的。事实上,连续性假定与现代物质理论的分歧可用统计平均的观点统一起来。从统计学的观点看来,只要所论物体的尺寸足够大,物体的性质就与体积的大小无关。通常工程结构构件的尺寸,与晶粒或分子团的大小相比,其数量级是非常悬殊的。在力学分析中,从物体中取出任一微小单元,在数学上是一个无穷小量,但它却含有大量的晶粒,晶体缺陷与微小单元进而与物体尺寸相比更是小得很多,因而连续性假定实际上是合理的。对于一些多相物体,通常也作为连续性介质看待。

根据连续性假定,用以表征物体变形和内力分布的量,就可以用坐标的连续函数来表示。这样,在进行弹性力学分析时,就可以应用数学分析这个强有力的工具。

弹性力学的理论基础仍然是牛顿力学。连续性假定和理论力学中的牛顿力学定律相结合就必然会产生连续介质力学。当进一步给出固体材料的弹性本构关系之后,也就必然会得到弹性力学的基本方程。

2) 物体为均匀各向同性的。即认为物体内各点介质的力学特性相同,且各点的各方向的性质也相同。也就是说,表征这些特性的物理参数在整个物体内是不变的。

3) 物体的变形属于小变形。即认为物体在外力作用下所产生的变形,与其本身几何尺寸相比很小,可以不考虑因变形而引起的尺寸的变化。这样,就可以用变形以前的几何尺寸来代替变形以后的尺寸。此外,物体的变形和各点的位移公式中二阶微量可以略去不计,从而使得几何变形线性化。

4) 物体原来是处于一种无应力的自然状态。即在外力作用以前,物体内各点应力均为零。我们的分析计算是从这种状态出发的。

以上基本假定是本书讨论问题的基础,还有一些针对具体问题所作的假定,将在以后各章分别给出。

1.3 弹性变形

由材料力学知道,弹性变形是物体卸载以后,就完全消失的那种变形,即,弹性变形是可恢复的、可逆的变形。而非弹性变形则是指卸载后不能消失而残留下来的那部分变形,是不可逆的变形。在小变形假定的条件下,弹性变形与应力的关系是一一对应的线性关系,因而,具有可加性,即叠加原理是适用的。

物体变形的机理,应从材料内部原子间力的作用来分析。实际上,固体材料之所以能保持其内部结构的稳定性是由于组成该固体材料(如金属)的原子间存在着相互平衡的力。吸力使各原子彼此密合在一起,而短程排斥力则使各原子间保持一定的距离。在正常情况下,这两种力保持平衡,原子间的相对位置处于一种规则排列的稳定状态。受外力作用时,这种平衡被打破,为了恢复平衡,原子便须产生移动和调整,使得吸力、斥力和外力之间取得平衡。因此,如果知道了原子间的力相互作用的定律,原则上就能算出晶体在一定外力作用下的弹性反应。

实际上,固体材料的内部结构是多样的、复杂的。例如夹杂、微孔、晶界等,都是影响变形发展的因素。目前的一些学说尚不能解释全部固体材料的微观变形机理。主要是由于所有的工程材料都不可避免的有缺陷存在。对于工程问题来说不必具体分析每一个缺陷对于材料性态的影响,而只需研究其宏观的统计特性,即可解决工程设计中的力学分析问题。

今后,我们仅宏观地研究弹性体在受外部作用时的应力场和位移场的分布,主要是梁、板、壳这一类结构及其他形式的结构物和构筑物的弹性力学问题。

1.4 弹性力学发展历程简介

弹性力学的发展历程与人类文明和社会进步是密切相关的。中国在 7 世纪至 17 世纪这段时期,社会、政治相对稳定,从而出现了以陶瓷、纺织和建筑为代表的生产技术和生活环境的大改造,以及以农、医、天、算四大学科为代表的中国古代科学体系,还有影响世界文明的四大发明。

11 世纪以后,欧洲从漫长的黑夜苏醒,十字军东征带回了中国的四大发明和希腊的学术,通过大翻译运动,出现了以经院哲学、理性论证为代表的学术复苏。诞生了实验科学的前驱罗吉尔·培根(Roger·Bacon, 1219—1292)。文艺复兴以后,人们的世界观发生了重大变化,近代科学体系逐渐形成。人们开始探索天体、地球、大自然。出现了航海罗盘、钟表、枪炮等。社会文明大大的前进了。继欧几里得(Euclid, 约 330—275 BC)以后,哥白尼(Nicolaus Copernicus, 1473—1543)、开普勒(Johannes Kepler, 1571—1630)、伽利略(Galileo Galilei, 1564—1642)、笛卡儿(René Descartes, 1596—1650)、牛顿(Isaac Newton, 1642—1727)等一大批学者的的工作推动了社会的进步和科学技术的发展。

本书的全部内容,显然都是建立在牛顿力学的基础上。牛顿力学的诞生与完善经历了漫长的发展历程。谈到牛顿力学就会想到伽利略对牛顿力学的重要贡献。牛顿于 300 多年

前(1687)发表了《自然哲学的数学原理》这一伟大著作,完成了牛顿力学科学体系的建立。以后,又过了100年,拉格朗日(1736—1813)做了出色的工作。他接受了欧拉变分法的概念和理论,建立了分析力学,降低了解题的难度,使得牛顿力学有了新的解题方法和严格的数学表述。可称为拉格朗日力学。又过了半个多世纪,哈密顿(1805—1865)进一步发展了牛顿力学。形成了影响广泛的、具有崭新面貌的哈密顿力学。牛顿、拉格朗日和哈密顿这三位伟大的天才科学家,经过了300多年完成了经典力学的完美体系,至今仍是光彩夺目,应用广泛。

弹性力学完整科学体系的形成也已经有了上百年的历史。有不少著名的经典著作。例如,勒夫(A. E. H. Love, 1863—1940)著,《数学弹性理论》(A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity,)其第一版于1892年问世,第四版为1927年,后被译成各种文字,人们视为不朽经典名著。又如铁摩辛柯(Stephen P. Timoshenko, 1878—1972)著《弹性理论》(Theory of Elasticity, 俄文版,卷一,1914年,卷二,1916年)和以后的各种版本(英文、中文等),以及他的一系列专著(如弹性振动理论、板壳理论、材料力学、弹性稳定理论等),世界各国用它培养了一代又一代的工程师和研究人员。稍后有穆斯海里什维利(N. I. Muskhelishvili, 1891—1976)在他的老师克罗索夫(G. V. Kolossoff)工作的基础上出版了著名著作 *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, 俄文第一版于1933年问世,以后多次修订,1966年做最后一次修订。在这本传世名著中用复变函数法和奇异积分对弹性力学平面问题给出了完美的解答。多年来国外出版的弹性力学教科书种类繁多,各有千秋,难以胜数。

国内出版了很多很好的弹性力学专著和教科书。最早问世的有:钱伟长、叶开源著《弹性力学》(1956),之后有徐芝伦著《弹性力学》(上下册),武际可、王敏中著《弹性力学引论》,程昌钧著《弹性力学》、吴家龙著《弹性力学》等,和一大批国外优秀弹性力学专著和教科书的翻译本。

我国学者在弹性力学发展进程中曾做出了卓越的贡献。例如,钱学森在弹性薄壳的非线性稳定理论方面的开创性工作,钱伟长对弹性板壳内禀理论的研究,摄动法、弹性圆板大挠度、穿甲理论等方面的重要贡献,胡海昌对广义变分原理的重要贡献。最近,钟万勰发展了辛弹性力学和弹性力学求解的新方法,武际可对弹性稳定理论和力学史的研究做出了贡献。郭仲衡,黄克智,杜庆华,徐秉业等众多知名学者在弹性力学发展上都做出了各自不同的重要贡献。

思考题

- 1-1 为什么要引进一些基本假定? 如果放弃其中的任一条会出现什么情况?
- 1-2 你对弹性力学的发展历程和展望有何见解?

第 2 章

应 力

2.1 力和应力的概念

作用在物体上的外力可分为表面力和体积力,简称面力和体力。

所谓面力指的是作用在物体表面上的力,如风力、液体压力、两固体间的接触力等。物体上各点所受的面力一般是不同的。为了表明物体表面上的一点 P 所受面力的大小和方向,我们在 P 点的邻域取一包含 P 点在内的微小面积元素 ΔS (图 2-1),设在 ΔS 上的面力为 $\Delta \boldsymbol{p}$,则面力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 。如将 ΔS 不断地缩小,则 $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 及 $\Delta \boldsymbol{p}$ 都将不断地改变其大小、方向和作用点。如令 ΔS 无限缩小而趋于 P 点, $\Delta \boldsymbol{p}/\Delta S$ 将趋于一定的极限 \boldsymbol{p}_s ,即有

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta S} = \boldsymbol{p}_s \quad (2-1)$$

这个极限矢量 \boldsymbol{p}_s 就是 P 点面力的集度。由于 ΔS 是标量,故矢量 \boldsymbol{p}_s 的方向与 $\Delta \boldsymbol{p}$ 的极限方向相同。 \boldsymbol{p}_s 在坐标轴 x, y, z 方向的投影 p_x, p_y, p_z 称为 P 点面力的分量,并规定指向坐标轴正方向的分量为正,反之为负。

作用在物体表面上的力都占有一定的面积,但对于作用面很小的面力通常理想化为作用在一点的集中力。

体力,则是满布在物体内部各质点上的力,如重力、惯性力、电磁力等。物体内部各点所受的体力一般也是不同的。我们可以仿照对面力的讨论,得出物体内部一点 C 所受的体力为按体积计算的平均集度 $\Delta \boldsymbol{F}_b/\Delta V$,在微小体积元素 ΔV 无限缩小而趋于 C 点时的极限矢量 \boldsymbol{F}_b ,即

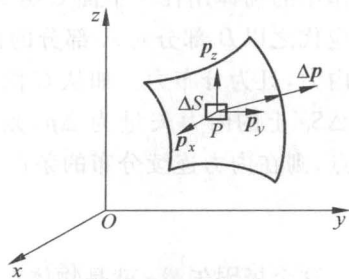
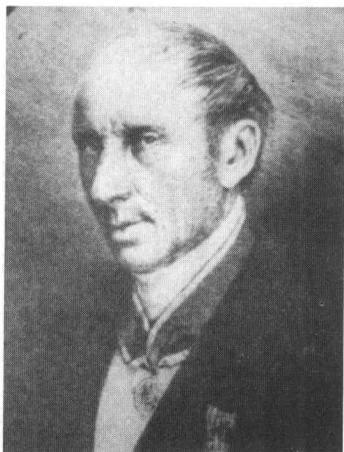


图 2-1

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_b}{\Delta V} = \mathbf{F}_b \quad (2-2)$$

显然,体力矢量 \mathbf{F}_b 的方向就是 ΔV 内的体力 $\Delta \mathbf{F}$ 的极限方向。

固体材料受外力作用后就要产生内力和变形。用以描述物体中任何部位的内力和变形特征的力学量是应力和应变。应力的概念,在材料力学课程中虽已讨论并应用过,但由于这一概念的重要性,我们在这里除了强调应力的确切含义之外,还要进一步给出在受力物体内某一点处的应力状态的描述方法。



Augustin Louis Cauchy

柯西(A. L. Cauchy) 1789年生于法国,1857年逝世。数学家和力学家。他奠定了应力和应变的理论,首先指出了矩形截面柱体的扭转与圆形截面柱体的扭转有重大区别,最早研究了板的振动问题。在数学和力学的其他领域有很多重要贡献。

柯西首先提出了应力和应变的理论。为了说明应力的概念,我们假想把受一组平衡力系作用的物体用任一平面 C 分为 A 、 B 两部分(图 2-2)。如将 B 部分移去,则 B 对 A 的作用应代之以 B 部分对 A 部分的作用力。这种力在 B 移去前是物体内部 A 、 B 之间在 C 截面上的内力,且为分布力。如从 C 面上 P 点的邻域取出一包括 P 点在内的微小面积元素 ΔS_C , 而 ΔS_C 上的内力矢量为 $\Delta \mathbf{p}$, 则内力的平均集度为 $\Delta \mathbf{p} / \Delta S_C$ 。如令 ΔS_C 无限缩小而趋于 P 点,则在内力连续分布的条件下 $\Delta \mathbf{p} / \Delta S_C$ 趋于一定的极限 $\boldsymbol{\sigma}$, 即

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta S_C \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta S_C} \quad (2-3)$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 就是物体在过 C 面上 P 点处的应力。由于 ΔS_C 为标量,故 $\boldsymbol{\sigma}$ 的方向与 $\Delta \mathbf{p}$ 的极限方向一致。

应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 可分解为其所在平面的外法线方向和切线方向这样两个分量。沿应力所在平面的外法线方向(n)的应力分量叫做正应力,记做 σ_n 。沿切线方向的应力分量叫做剪应力,记做 τ_n 。此处脚注 n 标明其所在面的外法线方向。因此, $\Delta \mathbf{p}$ 的正应力和剪应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \lim_{\Delta S_C \rightarrow 0} \frac{\Delta p_n}{\Delta S_C} \\ \tau_n &= \lim_{\Delta S_C \rightarrow 0} \frac{\Delta p_s}{\Delta S_C} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

其中, Δp_n , Δp_s 分别为 ΔS_C 上的内力矢量 $\Delta \mathbf{p}$ 在 n 平面的法向和切向分量。

如果图 2-2 中的 n 方向与 y 坐标轴的方向一致(图 2-3),则此时有

$$\sigma_n = \sigma_y \text{ 及 } \tau_n = \tau_y$$

其中 τ_y 是作用在 C 截面内的剪应力, 如将 τ_y 分解为沿 x 轴和 z 轴的两个分量, 并记作 τ_{yx} 和 τ_{yz} , 则过 C 面上 P 点的应力分量为 $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$ 。以后, 我们对正应力只用一个字母的下标标记, 对剪应力则用两个字母标记, 其中第一个字母表示应力所在面的外法线方向; 第二个字母表示应力分量的指向。应力的正负号规定为: 正应力以拉应力为正, 压应力为负。

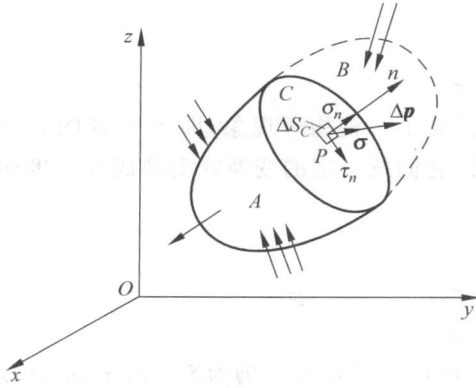


图 2-2

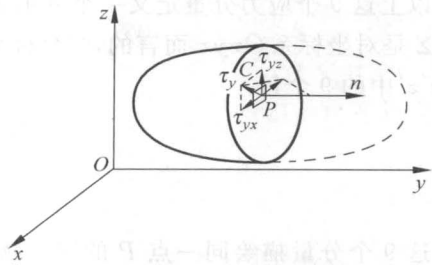


图 2-3

剪应力的正负号规定分为两种情况: 当其所在面的外法线与坐标轴的正方向一致时, 则以沿坐标轴正方向的剪应力为正, 反之为负; 当所在面的外法线与坐标轴的负方向一致时, 则以沿坐标轴负方向的剪应力为正, 反之为负。图 2-3 及图 2-4 中的各应力分量均为正。应力及其分量的量纲为[力][长度]⁻², 单位为帕(Pa)。

在以上的讨论中, 过 P 点的 C 平面是任选的。显然, 过 P 点可以做无穷多个这样的平面 C 。或者说, 过 P 点有无穷多个连续变化的 n 方向。不同面上的应力是不同的。这样, 就产生了一个到底如何描绘一点处应力状态的问题。下面我们讨论这个问题。

为了研究 P 点处的应力状态, 我们在 P 点处沿坐标轴 x, y, z 方向取一个微小的平行六面体(图 2-5), 其六个面的外法线方向分别与三个坐标轴的正、负方向重合, 各边长分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。假定应力在各面上均匀分布, 于是各面上的应力矢量便可用作用在各面中心点的一个应力矢量来表示。每个面上的应力又可分解为一个正应力和两个剪应力分量。按前面约定的表示法, 图 2-5 给出的各应力分量均为正方向。

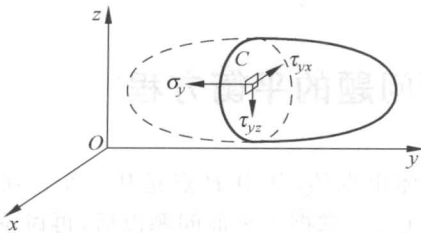


图 2-4

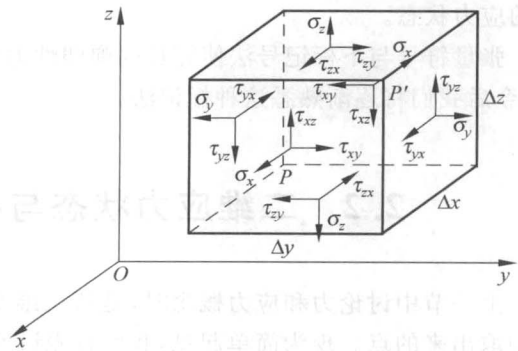


图 2-5