



How do I Solve Problems

数论经典著作系列

我怎样解题

单 樽 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数论经典著作系列

How do I Solve Problems 我怎样解题

● 单 樽 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书共分为五章,分别为:第一章,不等式的证明;第二章,几何;第三章,数论;第四章,组合数学;第五章,数列、函数及其他。

本书适用于数学奥林匹克选手和教练员参考使用,亦可供广大数学爱好者研读。

图书在版编目(CIP)数据

我怎样解题/单尊著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013.1

ISBN 978-7-5603-3904-7

I. ①我… II. ①单… III. ①数学-解法
IV. ①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 314939 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 张 佳

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 25.25 字数 453 千字

版 次 2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3904-7

定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

数 学题多,太多了!

准备高考的同学都做了大量的题.题多,很多人称之为“题海”.

数学竞赛的题更多了.高考题的内容限定了课本,题型也都是常见的,而竞赛则不断推陈出新,变化无穷.竞赛题多,比大海还要浩瀚,可以称之为“题洋”.

但我们不必“望洋兴叹”.因为本来就没有必要做完所有的题,喝干“洋”水.“弱水三千,只取一瓢”.从大洋中舀一瓢水,细细品味,就可以知道大洋的成分.同样地,从众多的竞赛题中选出一部分,仔细分析,就可以基本了解竞赛题的全貌.

为此,我们选择了一百多道竞赛题.认真地做好这一百多道题,可以提高解题的能力,在题洋中自由自在地游来游去.

这就好像《唐诗三百首》,好像《古文观止》,从众多的唐诗、古文中选出一部分有代表性的作品,熟读之后,对古代的诗、文就有所了解,甚至“不会做诗也会吟”.

选择的标准是:

1. 有代表性的题,解这种题的思想方法值得学习.
2. 有一定难度的好题,有讨论的价值与必要.
3. 我自己做过的题(但我以前的书中写过的,注意少收,以免重复).

这本书不是一本习题集,它的目标不是给出一百多道题的解答,而是想说一说如何去寻找问题的解答.

元遗山说:“鸳鸯绣了从教看,莫把金针度与人”.其实“鸳鸯绣了从教看”就已经是“欲把金针度与人”.一个自己动手去绣的人,一个细心而又有悟性的人,往往能从绣好的鸳鸯看出针法与诀窍.

我们的目的当然是“金针度人”,所以不仅有较为详细的解答(“绣好的鸳鸯”),而且也谈一些自己解题的经验、体会与探索的过程.

当然,探索的过程是很难写的.因为思路往往是难以说清的,何况“一个人不能两次进入同一条河”.在写解题思路时,那思路可能已经不是原始的状态,“欲辩已忘言”.有时,真实的探索过程又十分的漫长,完全写出来也有点乏味.所以,我们只能尽可能真实而又尽可能简洁地复原一些思考过程,并尝试用各种不同的方法来描述.例如,增加分析的份量,夹叙夹议,比较多种解法,适时总结,略作评注,等.有时,还请来两个学生甲、乙一同讨论.

事实上,《我怎样解题》的“我”并不只是作者一个人,而是包括了与作者一同讨论的众多朋友,特别是广大的学生群体.这些学生或看过我写的书,或听过我的讲课,而在与他们的讨论中,我也学到了许多好的解法,获益良多.所以,书名中的“我”,其实是“我们”.写成“我”只是为了少印一个字,符合“简单”的原则.

我解过很多的题,但并无什么“绝招”.

有位学生给我写了一封信,讲到解题的事.摘录如下:

“最近,我在×××老师那边上了十天课.他强调解题时要运用原则,运用对称性分析、结构分析、图象化、图表化等方法.听他讲课时总觉得他的解法是一种必然.但自己实际做题时,往往觉得原则无处可用,只能像以前一样瞎做.在这点上,我觉得你和×××老师很不一样,你解题时十分重视感觉,很少谈一些原则.你总认为解题没有万能的方法,最好的方法就是探索.我想知道,解题到底是靠什么?”

解题到底靠什么?我靠的也就是平常的、普通人的常识,即:

1. 必须自己动手解题,才能提高解题能力.
2. 要做一些有质量的题,一百道左右(本书每一节的问题,大多写在开始部分,目的就是让读者先自己动手去试).
3. 仔细审题.搞清题意并不容易.有时做完题回顾时才弄清楚,有时做完了题还不一定清楚题意.

4. 从简单的做起. 尽量找些简单具体直观的实例, 由这些实例入手.

5. 注意总结. 要弄清关键所在. 有哪几个关键步骤? 为什么这样做? 要做一题有一题的体会, 彻底弄清楚, 弄透彻, 不仅知其然而且知其所以然. 要像大哲学家康德所说: “通过经验使理解力发展到直觉的判断力, 再发展到思想观念”, “学会思考”.

虽然努力想写好这本书, 但是自身才力所限, 疵病一直不少, 敬请大家批评指正.

作 者

2013 年 1 月

第一章 不等式的证明 //1

- § 1 Janous 不等式 //2
- § 2 不等式与恒等式 //4
- § 3 调 整 //6
- § 4 还是调整 //8
- § 5 分而治之 //10
- § 6 两种相等的情况 //11
- § 7 柯西不等式 //13
- § 8 用柯西不等式“通分” //16
- § 9 老老实实去分母 //18
- § 10 还是上次的办法 //20
- § 11 加强归纳假设 //22
- § 12 估计上界、下界 //24
- § 13 挤 挤 紧 //27
- § 14 又逢等差数列 //30
- § 15 一题多解 //34
- § 16 和比积好 //38
- § 17 最小的参数 //41
- § 18 放宽些又何妨 //43
- § 19 三角不等式 //45
- § 20 绝对值的不等式 //48
- § 21 n 维向量 //52
- § 22 拉格朗日配方法 //55

§ 23	截搭题	//57
§ 24	自己想办法	//60
§ 25	题目有误	//62
§ 26	凸函数	//65
§ 27	二次形式	//68

第二章 几何 //75

§ 1	四边形的中高线	//76
§ 2	四圆共点	//77
§ 3	四个内切圆	//79
§ 4	三线共点	//81
§ 5	外接三角形	//84
§ 6	位似	//87
§ 7	经过定点	//90
§ 8	剪成锐角三角形	//93
§ 9	方程帮忙	//98
§ 10	征解问题	//101
§ 11	外公切线围成菱形	//103
§ 12	射影平分周长	//105
§ 13	勾三股四弦五	//107
§ 14	分断式命题	//111
§ 15	解析几何	//115
§ 16	两角相等	//117
§ 17	做过三次的题	//119
§ 18	富瑞基尔定理	//121
§ 19	轴对称	//123
§ 20	表示比值	//126
§ 21	旁心	//131
§ 22	结论强,解法简	//133
§ 23	高与中线	//135
§ 24	又一个几何不等式	//138
§ 25	平面向量的有限集合	//140
§ 26	向量的应用	//142
§ 27	内心	//145
§ 28	平分周长	//147
§ 29	n 个向量的和	//149
§ 30	寺庙中的几何题	//152
§ 31	四点共圆	//155
§ 32	极点与极线	//159

- § 33 帕斯卡定理 //162
- § 34 三线共点 //163
- § 35 正确地提出问题 //164

第三章 数论 //167

- § 1 正因数的个位数字的和 //168
- § 2 最小公倍数的最小值 //169
- § 3 平方是有理数 //171
- § 4 和被 $2n$ 整除 //173
- § 5 形如 $|3^b - 2^a|$ 的数 //175
- § 6 分数与小数 //177
- § 7 走自己的路 //179
- § 8 取整函数 //181
- § 9 不断地变更问题 //183
- § 10 同余方程组 //184
- § 11 三个连续的正整数 //186
- § 12 互不同余 //189
- § 13 各行的乘积能否相等 //191
- § 14 质数的幂次 //193
- § 15 连中三元 //195
- § 16 应当自己去想 //196
- § 17 忘却了的显然 //198
- § 18 解不会太多 //200
- § 19 最小剩余 //202
- § 20 惊鸿一瞥 //205
- § 21 费马小定理 //207
- § 22 约数排圈 //209
- § 23 一半是 9 //211
- § 24 最小的 A //213
- § 25 都是质数 //215
- § 26 小数部分 //217
- § 27 越来越多 //220
- § 28 一个整除问题 //221
- § 29 估计 //223
- § 30 知识障 //225
- § 31 数字和 //229
- § 32 运用三进制 //233
- § 33 不在其中 //235

第四章 组合数学 //238

- § 1 取 棋 子 //239
- § 2 老虎与驴子 //240
- § 3 抽屉原理 //241
- § 4 似难实易 //243
- § 5 三箱倒(dǎo)球 //245
- § 6 直尺上标刻度 //247
- § 7 圆周排数 //249
- § 8 虽不中,亦不远矣! //251
- § 9 意义何在 //253
- § 10 元素的和 //255
- § 11 $|X|$ 的最小值 //257
- § 12 平面格点 //261
- § 13 圆桌会议 //264
- § 14 红圈加蓝圈 //265
- § 15 0,1 数表 //267
- § 16 正有理数集的分拆 //269
- § 17 两部分图 //272
- § 18 填 ± 1 //275
- § 19 三角形剖分 //278
- § 20 好想法要贯彻到底 //281
- § 21 映射的个数 //285
- § 22 线段染色 //287
- § 23 总和为 0 //292
- § 24 吴伟朝先生的名片 //295
- § 25 车站个数 //299

第五章 数列、函数及其他 //307

- § 1 吴康先生的方程组 //308
- § 2 猜 答 案 //311
- § 3 还 是 猜 //313
- § 4 概率问题 //314
- § 5 表为平方和 //316
- § 6 n 是 3 的幂 //318
- § 7 几项整数 //320
- § 8 项项是平方 //324
- § 9 推 广 //327
- § 10 整数之和 //335

§ 11	三元函数	//339
§ 12	一个函数方程	//343
§ 13	映 射	//345
§ 14	寻找函数	//348
§ 15	又一个函数方程	//353
§ 16	整值多项式	//356
§ 17	n 个实根	//359
§ 18	切比雪夫多项式	//361
§ 19	只有一次多项式	//364
§ 20	f 合 数	//368
§ 21	带余除法	//371
§ 22	存在两组数	//373
§ 23	线性无关	//376
§ 24	整 基	//378

编辑手记	//381
-------------	-------

不等式的证明

第

一

章

不等式的证明,在数学竞赛中经常出现.不等式的种类繁多,解法千变万化,做不等式的题能够培养学生对数、式的感觉,培养灵活的思维.

不等式的证法很多,其中最重要、最常见的方法就是将式子变形.首先,是“恒等”变形,如通分、合并同类项等,也包括在不等式两边同乘一个正数或正的式子以及移项等.恒等变形用得很多,必须熟练,不可出错.其次,但不是次要的,是“不等”的变形,即将某一边增大或减小,简称为“放缩”.这种变形在证明中往往只出现一两次,但却是证明不等式的关键.我们要抓住时机,在适当的地方大胆地放缩,简化不等式.但放缩不等式又必须适当,过分了就会产生不正确的不等式.这适当二字最能反映解题者的水平,需要通过大量的解题与经验的积累才能达到.

一些著名的不等式,如柯西不等式、平均不等式、排序不等式等,在不等式证明中也是常用的.它们的作用也就是上面所说的“放缩”.

§ 1 Janous 不等式

Janous 提出一个如下的不等式:

x, y, z 为正实数, 证明

$$\frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} + \frac{x^2 - z^2}{y + z} \geq 0 \quad (1)$$

师: 不等式(1) 左边在将 x, y, z 换成 y, z, x (即将 x 换成 y, y 换成 z, z 换成 x) 时, 不变. 这样的式子称为 (x, y, z) 的轮换式. 上式常常简记为

$$\sum \frac{y^2 - x^2}{z + x} \quad (2)$$

看到表达式(2), 应当知道它是不等式(1) 的左边.

甲: 对于轮换式, 是否可以假定 $x \geq y \geq z$?

师: 不可以. 对于 x, y, z 的对称式, 才可假定 $x \geq y \geq z$. 对称式, 是指

$$\frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} + \frac{x^2}{y + z} \quad (3)$$

这样的式子, 在 x, y, z 中任意两个互换 (x 与 y 互换, y 与 z 互换或者 z 与 x 互换) 时, 不变.

轮换式, 只能设 x 最大, 而 y, z 的大小不能确定, 需要分 $y \geq z$ 与 $z \geq y$ 两种情况讨论.

乙: 如果 $x \geq y \geq z$, 那么不等式(1) 的左边, 前两个分式都是负的, 只有第三个是正的.

师: 负的分式可以移到右边, 而一个正的分式可以拆成两个.

甲: 即不等式(1) 等价于

$$\frac{x^2 - y^2}{y + z} + \frac{y^2 - z^2}{y + z} \geq \frac{x^2 - y^2}{z + x} + \frac{y^2 - z^2}{x + y} \quad (4)$$

两边的分式都是正的, 而

$$y + z \leq z + x \leq x + y \quad (5)$$

所以

$$\frac{x^2 - y^2}{y + z} \geq \frac{x^2 - y^2}{z + x}, \frac{y^2 - z^2}{y + z} \geq \frac{y^2 - z^2}{x + y} \quad (6)$$

从而, 不等式(4) 成立.

乙: $x \geq z \geq y$ 的情况, 证法类似. 这时, 不等式(1) 等价于

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq \frac{x^2 - z^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{z + x} \quad (7)$$

两边的分式都是正的, 而

$$y+z \leq z+x, x+y \leq z+x \quad (8)$$

所以

$$\frac{x^2 - z^2}{y+z} \geq \frac{x^2 - z^2}{z+x}, \frac{z^2 - y^2}{x+y} \geq \frac{z^2 - y^2}{z+x} \quad (9)$$

从而, 不等式(7) 成立.

甲: 这题用排序不等式也可以做. (3) 是 x, y, z 的对称式, 所以可设 $x \geq y \geq z$. 这时

$$x+y \geq x+z \geq y+z, x^2 \geq y^2 \geq z^2 \quad (10)$$

所以, (3) 是同序的和, 而不论 x, y, z 的大小关系如何

$$\frac{x^2}{z+x} + \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z} \quad (11)$$

都不大于同序的和(3), 也就是(1) 成立.

师: 你的证法也很好. 不过, 前一种证法更为简单, 它没有运用著名的不等式.

如果所要证的结论比较简单, 却搬出一个大的定理, 这个定理的证明远比目前要证的结论复杂, 那就有点像“杀鸡用牛刀”了.

附 排序不等式

设有两组实数

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$$

那么, 对于 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$, 有

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \text{ (同序的和)} \\ & \geq a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n} \text{ (乱序的和)} \\ & \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \text{ (逆序的和)} \end{aligned}$$

上面甲的证法中

$$a_1 = x^2, a_2 = y^2, a_3 = z^2, b_1 = \frac{1}{y+z}, b_2 = \frac{1}{x+z}, b_3 = \frac{1}{x+y}$$

在排序不等式的条件中, 并不要求 a_k 与 b_k 非负, $k=1, 2, \cdots, n$.

§ 2 不等式与恒等式

设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 求证

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} \leqslant 1 \quad (1)$$

师:在证明(1)之前,首先想问一问等号何时成立?

甲:我想到一个条件恒等式: $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 并且

$$abc = 1 \quad (2)$$

则

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1 \quad (3)$$

也就是说,在有等式(2)时,(1)中等号成立.

乙:等式(3)是初中曾经解决的问题.证明时需要一点技巧,就是利用(2),将(3)的左边三项化为相同的分母,即

$$\begin{aligned} & \frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} \\ &= \frac{a}{1+a+ab} + \frac{ab}{a(1+b+bc)} + \frac{abc}{ab(1+c+ca)} \\ &= \frac{a}{1+a+ab} + \frac{ab}{a+ab+1} + \frac{1}{ab+1+a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

这等式与证明不等式(1)有何关系?

师:虽然现在(2)未必成立,所以(3)也未必成立.但是,我们可以令 $d = \frac{1}{ab}$. 由于 $abd = 1$, 所以我们有

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bd} + \frac{d}{1+d+da} = 1 \quad (4)$$

要证(1),只需证明(4)的左边 $\geqslant$ (1)的左边,即

$$\frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} \leqslant \frac{b}{1+b+bd} + \frac{d}{1+d+da} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{甲: (5)} &\Leftrightarrow \frac{b^2(d-c)}{(1+b+bc)(1+b+bd)} \leqslant \frac{d-c}{(1+c+ca)(1+d+da)} \\ &\Leftrightarrow b^2(d-c)(1+c+ca)(1+d+da) \\ &\leqslant (d-c)(1+b+bc)(1+b+bd) \\ &\Leftrightarrow b(d-c)(1+c+ca) \leqslant (d-c)(1+b+bc) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (d-c)(abc-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{d}(d-c)^2 \leq 0$$

最后一个不等式显然成立, 所以(5) 成立, (1) 也成立.

而且, 不等式(1) 成立的充分必要条件是 $c = d = \frac{1}{ab}$, 即等式(2).

师: 当然, 如果费点牛劲, 在不等式(1) 两边去分母化为

$$\begin{aligned} & a(1+b+bc)(1+c+ca) + \\ & b(1+a+ab)(1+c+ca) + \\ & c(1+a+ab)(1+b+bc) \\ & \leq (1+a+ab)(1+b+bc)(1+c+ca) \end{aligned}$$

再去括号化简, 变为

$$2abc \leq a^2b^2c^2 + 1$$

即

$$(abc-1)^2 \geq 0$$

同样导出不等式(1) 成立, 并且当且仅当 $abc=1$ 时, 等号成立.

这种证法虽然“拙”一些, 但切实可行, 而且对于培养我们对式子的运算能力大有好处.

§ 3 调 整

设 x, y, z 为非负实数, 且

$$x + y + z = 1 \quad (1)$$

求证

$$x(1-2x)(1-3x) + y(1-2y)(1-3y) + z(1-2z)(1-3z) \geqslant 0 \quad (2)$$

师: 这是一位同学问的问题.

甲: 不等式(2)的左边是 x, y, z 的对称式, 可设 $x \geqslant y \geqslant z$.

师: 固定 z , 从而

$$x + y = 1 - z \quad (3)$$

也随之固定, 看看不等式(2)左边前两项变化的情况, 希望它们的和在 $x = y$ 时最小.

$$\begin{aligned} \text{乙: } & x(1-2x)(1-3x) + y(1-2y)(1-3y) \\ &= 6(x^3 + y^3) - 5(x^2 + y^2) + (x + y) \\ &= 6(x + y)((x + y)^2 - 3xy) - 5(x + y)^2 + 10xy + (x + y) \\ &= 6(x + y)^3 - 5(x + y)^2 + (x + y) - 2xy(9(x + y) - 5) \end{aligned} \quad (4)$$

因为 $x \geqslant y \geqslant z$, 所以

$$z \leqslant \frac{1}{3}, x + y \geqslant \frac{2}{3}$$

$$9(x + y) - 5 \geqslant 9 \times \frac{2}{3} - 5 = 1 \geqslant 0$$

等式(4)的最后一项

$$-2xy(9(x + y) - 5) \geqslant -2\left(\frac{x + y}{2}\right)^2(9(x + y) - 5) \quad (5)$$

这表明对固定的 z , 不等式(2)左边在 $x = y$ 时最小.

甲: 这时 $x = y = \frac{1-z}{2}$, 所以

$$\begin{aligned} \text{不等式(2)左边} &= (1-z)z\left(z - \frac{1-z}{2}\right) + z(1-2z)(1-3z) \\ &= \frac{z(1-3z)}{2}(2(1-2z) - (1-z)) \\ &= \frac{1}{2}(1-3z)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

即不等式(2)成立.