HIT

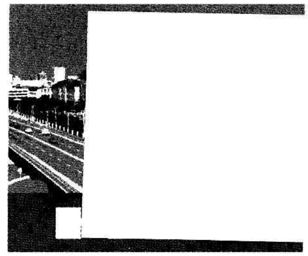
数论经典著作系列

How do I Solve Problems

我怎样解题

单墫 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数论经典著作系列

我怎样解题

How do I Solve Problems

单墫 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书共分为五章，分别为：第一章，不等式的证明；第二章，几何；第三章，数论；第四章，组合数学；第五章，数列、函数及其他。

本书适用于数学奥林匹克选手和教练员参考使用，亦可供广大数学爱好者研读。

图书在版编目(CIP)数据

我怎样解题/单墫著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.1

ISBN 978-7-5603-3904-7

Ⅰ.①我… Ⅱ.①单… Ⅲ.①数学-解法 Ⅳ.①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 314939 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张　佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 25.25　字数 453 千字
版　　次　2013 年 1 月第 1 版　2013 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3904-7
定　　价　48.00 元

◎ 前言

数学题多，太多了！

准备高考的同学都做了大量的题. 题多，很多人称之为“题海”.

数学竞赛的题更多了. 高考题的内容限定了课本，题型也都是常见的，而竞赛则不断推陈出新，变化无穷. 竞赛题多，比大海还要浩瀚，可以称之为“题洋”.

但我们不必“望洋兴叹”. 因为本来就没有必要做完所有的题，喝干“洋”水.“弱水三千，只取一瓢”. 从大洋中舀一瓢水，细细品味，就可以知道大洋的成分. 同样地，从众多的竞赛题中选出一部分，仔细分析，就可以基本了解竞赛题的全貌.

为此，我们选择了一百多道竞赛题. 认真地做好这一百多道题，可以提高解题的能力，在题洋中自由自在地游来游去.

这就好像《唐诗三百首》，好像《古文观止》，从众多的唐诗、古文中选出一部分有代表性的作品，熟读之后，对古代的诗、文就有所了解，甚至“不会做诗也会吟”.

选择的标准是：

1. 有代表性的题，解这种题的思想方法值得学习.

2. 有一定难度的好题，有讨论的价值与必要.

3. 我自己做过的题(但我以前的书中写过的，注意少收，以免重复).

这本书不是一本习题集，它的目标不是给出一百多道题的解答，而是想说一说如何去寻找问题的解答.

元遗山说："鸳鸯绣了从教看，莫把金针度与人". 其实"鸳鸯绣了从教看"就已经是"欲把金针度与人". 一个自己动手去绣的人，一个细心而又有悟性的人，往往能从绣好的鸳鸯看出针法与诀窍.

我们的目的当然是"金针度人"，所以不仅有较为详细的解答("绣好的鸳鸯")，而且也谈一些自己解题的经验、体会与探索的过程.

当然，探索的过程是很难写的. 因为思路往往是难以说清的，何况"一个人不能两次进入同一条河". 在写解题思路时，那思路可能已经不是原始的状态，"欲辩已忘言". 有时，真实的探索过程又十分的漫长，完全写出来也有点乏味. 所以，我们只能尽可能真实而又尽可能简洁地复原一些思考过程，并尝试用各种不同的方法来描述. 例如，增加分析的份量，夹叙夹议，比较多种解法，适时总结，略作评注，等. 有时，还请来两个学生甲、乙一同讨论.

事实上，《我怎样解题》的"我"并不只是作者一个人，而是包括了与作者一同讨论的众多朋友，特别是广大的学生群体. 这些学生或看过我写的书，或听过我的讲课，而在与他们的讨论中，我也学到了许多好的解法，获益良多. 所以，书名中的"我"，其实是"我们". 写成"我"只是为了少印一个字，符合"简单"的原则.

我解过很多的题，但并无什么"绝招".

有位学生给我写了一封信，讲到解题的事. 摘录如下：

"最近，我在×××老师那边上了十天课. 他强调解题时要运用原则，运用对称性分析、结构分析、图象化、图表化等方法. 听他讲课时总觉得他的解法是一种必然. 但自己实际做题时，往往觉得原则无处可用，只能像以前一样瞎做. 在这点上，我觉得你和×××老师很不一样，你解题时十分重视感觉，很少谈一些原则. 你总认为解题没有万能的方法，最好的方法就是探索. 我想知道，解题到底是靠什么?"

解题到底靠什么? 我靠的也就是平常的、普通人的常识，即：

1. 必须自己动手解题，才能提高解题能力.

2. 要做一些有质量的题，一百道左右(本书每一节的问题，大多写在开始部分，目的就是让读者先自己动手去试).

3. 仔细审题. 搞清题意并不容易. 有时做完题回顾时才弄清楚，有时做完了题还不一定清楚题意.

4. 从简单的做起. 尽量找些简单具体直观的实例，由这些实例入手.

5. 注意总结. 要弄清关键所在. 有哪几个关键步骤？为什么这样做？要做一题有一题的体会，彻底弄清楚，弄透彻，不仅知其然而且知其所以然. 要像大哲学家康德所说："通过经验使理解力发展到直觉的判断力，再发展到思想观念"，"学会思考".

虽然努力想写好这本书，但是自身才力所限，疵病一直不少，敬请大家批评指正.

作　者

2013 年 1 月

◎目录

第三章　数论　// 167

第四章 组合数学 //238

第五章 数列、函数及其他 //307

第一章 不等式的证明

不等式的证明,在数学竞赛中经常出现.不等式的种类繁多,解法千变万化,做不等式的题能够培养学生对数、式的感觉,培养灵活的思维.

不等式的证法很多,其中最重要、最常见的方法就是将式子变形.首先,是“恒等”变形,如通分、合并同类项等,也包括在不等式两边同乘一个正数或正的式子以及移项等.恒等变形用得很多,必须熟练,不可出错.其次,但不是次要的,是“不等的”变形,即将某一边增大或减小,简称为“放缩”.这种变形在证明中往往只出现一两次,但却是证明不等式的关键.我们要抓住时机,在适当的地方大胆地放缩,简化不等式.但放缩不等式又必须适当,过分了就会产生不正确的不等式.这适当二字最能反映解题者的水平,需要通过大量的解题与经验的积累才能达到.

一些著名的不等式,如柯西不等式、平均不等式、排序不等式等,在不等式证明中也是常用的.它们的作用也就是上面所说的“放缩”.

§1 Janous 不等式

Janous 提出一个如下的不等式：

x,y,z 为正实数，证明

$$\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z}\geqslant 0 \tag{1}$$

师：不等式(1) 左边在将 x,y,z 换成 y,z,x(即将 x 换成 y，y 换成 z，z 换成 x) 时，不变. 这样的式子称为(x,y,z) 的轮换式. 上式常常简记为

$$\sum \frac{y^2-x^2}{z+x} \tag{2}$$

看到表达式(2)，应当知道它是不等式(1) 的左边.

甲：对于轮换式，是否可以假定 $x\geqslant y\geqslant z$?

师：不可以. 对于 x,y,z 的对称式，才可假定 $x\geqslant y\geqslant z$. 对称式，是指

$$\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{x^2}{y+z} \tag{3}$$

这样的式子，在 x,y,z 中任意两个互换(x 与 y 互换，y 与 z 互换或者 z 与 x 互换) 时，不变.

轮换式，只能设 x 最大，而 y,z 的大小不能确定，需要分 $y\geqslant z$ 与 $z\geqslant y$ 两种情况讨论.

乙：如果 $x\geqslant y\geqslant z$，那么不等式(1) 的左边，前两个分式都是负的，只有第三个是正的.

师：负的分式可以移到右边，而一个正的分式可以拆成两个.

甲：即不等式(1) 等价于

$$\frac{x^2-y^2}{y+z}+\frac{y^2-z^2}{y+z}\geqslant\frac{x^2-y^2}{z+x}+\frac{y^2-z^2}{x+y} \tag{4}$$

两边的分式都是正的，而

$$y+z\leqslant z+x\leqslant x+y \tag{5}$$

所以

$$\frac{x^2-y^2}{y+z}\geqslant\frac{x^2-y^2}{z+x},\frac{y^2-z^2}{y+z}\geqslant\frac{y^2-z^2}{x+y} \tag{6}$$

从而，不等式(4) 成立.

乙：$x\geqslant z\geqslant y$ 的情况，证法类似. 这时，不等式(1) 等价于

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{z^2-y^2}{x+y}\geqslant\frac{x^2-z^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{z+x} \tag{7}$$

两边的分式都是正的，而

$$y+z \leqslant z+x, x+y \leqslant z+x \tag{8}$$

所以

$$\frac{x^2-z^2}{y+z} \geqslant \frac{x^2-z^2}{z+x}, \frac{z^2-y^2}{x+y} \geqslant \frac{z^2-y^2}{z+x} \tag{9}$$

从而,不等式(7) 成立.

甲:这题用排序不等式也可以做.(3) 是 x,y,z 的对称式,所以可设 $x \geqslant y \geqslant z$. 这时

$$x+y \geqslant x+z \geqslant y+z, x^2 \geqslant y^2 \geqslant z^2 \tag{10}$$

所以,(3) 是同序的和,而不论 x,y,z 的大小关系如何

$$\frac{x^2}{z+x}+\frac{y^2}{x+y}+\frac{z^2}{y+z} \tag{11}$$

都不大于同序的和(3),也就是(1) 成立.

师:你的证法也很好.不过,前一种证法更为简单,它没有运用著名的不等式.

如果所要证的结论比较简单,却搬出一个大的定理,这个定理的证明远比目前要证的结论复杂,那就有点像"杀鸡用牛刀"了.

附 排序不等式

设有两组实数

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$$
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$$

那么,对于 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$,有

$$\begin{aligned} & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \text{(同序的和)} \\ \geqslant\ & a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\cdots+a_nb_{i_n} \text{(乱序的和)} \\ \geqslant\ & a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1 \text{(逆序的和)} \end{aligned}$$

上面甲的证法中

$$a_1=x^2, a_2=y^2, a_3=z^2, b_1=\frac{1}{y+z}, b_2=\frac{1}{x+z}, b_3=\frac{1}{x+y}$$

在排序不等式的条件中,并不要求 a_k 与 b_k 非负,$k=1,2,\cdots,n$.

§2　不等式与恒等式

设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证

$$\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}\leqslant 1 \tag{1}$$

师：在证明(1)之前，首先想问一问等号何时成立？

甲：我想到一个条件恒等式：$a,b,c\in\mathbf{R}^+$，并且

$$abc=1 \tag{2}$$

则

$$\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}=1 \tag{3}$$

也就是说，在有等式(2)时，(1)中等号成立.

乙：等式(3)是初中曾经解决过的问题. 证明时需要一点技巧，就是利用(2)，将(3)的左边三项化为相同的分母，即

$$\begin{aligned}&\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}\\&=\frac{a}{1+a+ab}+\frac{ab}{a(1+b+bc)}+\frac{abc}{ab(1+c+ca)}\\&=\frac{a}{1+a+ab}+\frac{ab}{a+ab+1}+\frac{1}{ab+1+a}\\&=1\end{aligned}$$

这等式与证明不等式(1)有何关系？

师：虽然现在(2)未必成立，所以(3)也未必成立. 但是，我们可以令 $d=\frac{1}{ab}$. 由于 $abd=1$，所以我们有

$$\frac{a}{1+a+ab}+\frac{b}{1+b+bd}+\frac{d}{1+d+da}=1 \tag{4}$$

要证(1)，只需证明(4)的左边 $\geqslant$ (1)的左边，即

$$\frac{b}{1+b+bc}+\frac{c}{1+c+ca}\leqslant\frac{b}{1+b+bd}+\frac{d}{1+d+da} \tag{5}$$

甲：$(5)\Leftrightarrow\dfrac{b^2(d-c)}{(1+b+bc)(1+b+bd)}\leqslant\dfrac{d-c}{(1+c+ca)(1+d+da)}$

$\Leftrightarrow b^2(d-c)(1+c+ca)(1+d+da)$

$\leqslant(d-c)(1+b+bc)(1+b+bd)$

$\Leftrightarrow b(d-c)(1+c+ca)\leqslant(d-c)(1+b+bc)$

$$\Leftrightarrow (d-c)(abc-1) \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{d}(d-c)^2 \leqslant 0$$

最后一个不等式显然成立，所以(5) 成立，(1) 也成立.

而且，不等式(1) 成立的充分必要条件是 $c=d=\frac{1}{ab}$，即等式(2).

师：当然，如果费点牛劲，在不等式(1) 两边去分母化为

$$\begin{aligned} &a(1+b+bc)(1+c+ca)+ \\ &b(1+a+ab)(1+c+ca)+ \\ &c(1+a+ab)(1+b+bc) \\ \leqslant\ &(1+a+ab)(1+b+bc)(1+c+ca) \end{aligned}$$

再去括号化简，变为

$$2abc \leqslant a^2b^2c^2+1$$

即

$$(abc-1)^2 \geqslant 0$$

同样导出不等式(1) 成立，并且当且仅当 $abc=1$ 时，等号成立.

这种证法虽然“拙”一些，但切实可行，而且对于培养我们对式子的运算能力大有好处.

§3 调 整

设 x,y,z 为非负实数，且

$$x+y+z=1 \tag{1}$$

求证

$$x(1-2x)(1-3x)+y(1-2y)(1-3y)+z(1-2z)(1-3z)\geqslant 0 \tag{2}$$

师：这是一位同学问的问题.

甲：不等式(2) 的左边是 x,y,z 的对称式，可设 $x\geqslant y\geqslant z$.

师：固定 z，从而

$$x+y=1-z \tag{3}$$

也随之固定，看看不等式(2) 左边前两项变化的情况，希望它们的和在 $x=y$ 时最小.

乙：

$$\begin{aligned}&x(1-2x)(1-3x)+y(1-2y)(1-3y)\\ =&6(x^3+y^3)-5(x^2+y^2)+(x+y)\\ =&6(x+y)((x+y)^2-3xy)-5(x+y)^2+10xy+(x+y)\\ =&6(x+y)^3-5(x+y)^2+(x+y)-2xy(9(x+y)-5)\end{aligned} \tag{4}$$

因为 $x\geqslant y\geqslant z$，所以

$$z\leqslant\frac{1}{3},x+y\geqslant\frac{2}{3}$$

$$9(x+y)-5\geqslant 9\times\frac{2}{3}-5=1\geqslant 0$$

等式(4) 的最后一项

$$-2xy(9(x+y)-5)\geqslant -2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2(9(x+y)-5) \tag{5}$$

这表明对固定的 z，不等式(2) 左边在 $x=y$ 时最小.

甲：这时 $x=y=\dfrac{1-z}{2}$，所以

$$\begin{aligned}\text{不等式(2) 左边}&=(1-z)z\left(z-\frac{1-z}{2}\right)+z(1-2z)(1-3z)\\ &=\frac{z(1-3z)}{2}(2(1-2z)-(1-z))\\ &=\frac{1}{2}(1-3z)^2\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

即不等式(2) 成立.