严格依据2014年考研数学考试大纲编写

高教版 2014

全国硕士研究生入学统一考试
数学考试大纲解析（数学三适用）

全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会

最佳搭配：数学考试大纲解析 + 大纲配套1000题 + 历年真题标准解析

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

严格依据 2014 年考研数学考试大纲编写

2014

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试大纲解析（数学三适用）

全国硕士研究生入学统一考试
辅导用书编委会

2014 QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI
SHUXUE KAOSHI DAGANG JIEXI (SHUXUE SAN SHIYONG)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

在数学考试命题已经规范、成熟和稳定的今天，也是该书出版的第十年，我们联合原考研数学命题和阅卷专家对《2014全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析（数学三适用）》进行了全新修订。这次修订更加注重本书的参考功能——通过对考试内容的详细深入讲解让考生攻克难关、学透数学；通过对大量典型例题的分析让考生对数学产生兴趣并掌握数学的经典思想和方法。

本书的每一章分为三个部分：

第一，考试内容与考试要求。这里明确指出了《考试大纲》对考生提出的要求，考生需严格按照该要求复习，不遗漏任何知识点，也不要超纲复习。

第二，考试内容与要求解析。这里对考试大纲的知识点进行了归纳、总结。考生一定要在复习的过程中详细理解每个知识点，掌握每种方法，温故知新，熟稔于心。

第三，典型例题分析。这部分通过大量的典型例题分析，洞悉考试命题规律、考生应对策略，其中包括考研数学的经典数学思维和方法、考生易错易混知识点的提醒等，让考生知己知彼。

图书在版编目（CIP）数据

2014全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编. --北京：高等教育出版社，2013.9

数学三适用

ISBN 978-7-04-038137-5

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第198791号

策划编辑 张耀明　　责任编辑 张耀明　　封面设计 于 涛　　版式设计 范晓红

责任校对 王 雨　　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	化学工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.5	版　　次	2013年9月第1版
字　　数	330千字	印　　次	2013年9月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	28.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　38137-00

前　言

全国硕士研究生入学统一考试从测量学角度来说，它应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作应坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又符合高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上重点考查考生的分析问题和解决实际问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定。

为了进一步总结命题工作的经验，同时也是为了让社会和考生进一步了解《考试大纲》的内容和要求，增加考试的透明度，消除考生对命题的神秘感，缓解考生在考试中的焦虑心理，以有利于考生正常发挥水平，继 2003 年出版《数学考试参考书》以后，今年我们又组织部分多年参加大纲制订和修订的原命题专家及阅卷专家编写了这套《数学考试大纲解析》。

《数学考试大纲解析》分数学一、数学二适用和数学三适用两册出版，对考试内容和要求做进一步地展开，并通过一定量的典型例题对考试中的难点和重点予以阐释，力求体现研究生数学考试试题的特点。期望能够帮助考生掌握学习中的重点和难点，提高数学水平，在考试中取得好的成绩。

本书的每一章分为三个部分：

第一，考试内容与考试要求。这里明确指出了《考试大纲》对考生提出的要求，考生需严格按照该要求复习，不遗漏任何知识点，也不要超纲复习。

第二，考试内容与要求解析。这里对考试大纲的知识点进行了归纳、总结。考生一定要在复习的过程中详细理解每个知识点，掌握每种方法，温故知新，熟稔于心。

第三，典型例题分析。这部分通过大量的典型例题分析，洞悉考试命题规律、考生应对策略，其中包括考研数学的经典数学思维和方法、考生易错易混知识点的提醒等，让考生知己知彼。

由于时间和经验不足，难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正。

编　者

2013 年 8 月

目　录

第一部分　微　积　分

第二部分　线 性 代 数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分

微 积 分

微积分是数学三考查的内容之一，主要考查考生对微积分的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握，以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力. 在试卷中占56%，84分.

第一章　函数、极限、连续

微积分学的研究对象是函数. 许多重要的概念需要用极限理论精确定义，因此极限是微积分学的重要基础，对后续内容的学习影响深远，应重点掌握.

考试内容与要求

考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立.

数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

考试内容与要求解析

本部分内容包括三个部分，即函数、极限和函数的连续性，考查的主要内容和能力有

(1) 函数的几种特性，包括有界性、单调性、周期性和奇偶性，能够利用定义验证和判断所给函数是否具有上述某种特性.

(2) 函数的常见类型，包括初等函数、反函数、复合函数、分段函数和隐函数，要做到

① 准确使用函数的记号. 由于错用函数及其导数的记号是丢分的原因之一；

② 清楚函数的复合关系，尤其是要会求分段函数的复合函数的表达式；

③ 熟悉函数的几种表示法，并能够识别函数的类型.

其中复合函数和分段函数是经常考查的内容. 后面学习中还会有积分上限函数和级数的和函数，也是考查的重点.

(3) 本部分重点内容是极限，前后内容交叉的地方多，综合性强. 要求既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的充分必要条件，又要掌握求极限的方法. 从整体上看，求极限的方法很多，要能够针对不同类型的极限采用相应的方法求解. 主要考查的方法有

① 利用极限的四则运算法则求极限；

② 利用函数的连续性求极限；

③ 利用两个重要极限求极限；

④ 利用等价无穷小量代换简化极限的计算；

⑤ 利用准则法证明极限的存在性，并求出极限. 包括用"单调有界准则"证明数列极限的存在性，并能够利用关系式求出极限；用"夹逼准则"证明数列和函数极限的存在性，并能够根据结论确定极限，特别要注意准则法的主要解题步骤、模式和方法；

⑥ 重视导数的定义与极限的联系，能够根据导数的定义计算出相关形式的极限，但要注意函数可导的充分必要条件；

⑦ 利用洛必达法则求未定式的极限，熟悉求七种常见未定式极限的方法和计算过程；

⑧ 利用泰勒公式(主要是麦克劳林公式)求未定式的极限，熟记几个简单初等函数的麦克劳林公式；

⑨ 利用定积分的定义和性质求极限.

每种方法一般都对应不同类型的极限问题，某些极限问题涉及几种不同的方法，要区别不同方法的针对性，熟练掌握其解题模式和规律.

(4) 函数连续性的概念、判断和讨论：

① 能够找到间断点，并能够根据定义结合求极限的方法判断间断点的类型；

② 熟记闭区间上连续函数的性质，能够根据介值定理讨论连续函数在给定区间的零点或方程根的存在性.

(5) 熟悉本部分内容的常考题型，主要有

① 直接计算各种极限；

② 极限的局部逆问题，即给定极限值或函数的连续点反过来确定式子中的常数；

③ 无穷小阶的比较和确定，能够判断谁是更高阶的无穷小；

④ 讨论函数的连续性、判断间断点的类型；

⑤ 讨论函数的零点或方程根的个数，这部分内容往往与微分中值定理结合构造出综合性的证明题，也是考生普遍感到较难掌握的地方.

整体来看，广大考生对这一部分内容普遍掌握得比较好，但由于需要与后续内容进行交叉，考生要不断勤思多练，做到前后知识融会贯通、灵活应用.

典型例题分析

例 1.1.1 已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ ________ 的定义域为 ________.

【答案】 $\arcsin(1-x^2)$；$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 或 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

【考点】 本题主要考查函数的运算和复合函数的定义域.

【解】 因 $1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$，故 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$. 从而要求

$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1,\quad 即\ 0\leqslant x^2\leqslant 2,$$

解之得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

【典型错误】 一些考生由于粗心，由不等式 $0\leqslant x^2\leqslant 2$ 得到的解为 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

例 1.1.2 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ________.

【答案】 1.

【考点】 本题考查分段函数的复合函数.

【解】 由 $f(x)$ 的定义知，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|f(x)|\leqslant 1$. 由 $f[f(x)]$ 的定义知，当 $|f(x)|\leqslant 1$ 时，$f[f(x)]=1$，因而对每一 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $f[f(x)]=1$.

【典型错误】 由于没有看到 $|f(x)|\leqslant 1$ 而将复合函数的表达式写错.

例 1.1.3 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散.　　(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小量.　　(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小量，则 y_n 必为无穷小量.

【答案】 (D).

【考点】 本题考查数列极限及其运算规律.

【解】 若取 $x_n=n, y_n\equiv 0$，则否定了(A)；

若取 $x_n=n+(-1)^{n-1}n, y_n=n+(-1)^n n$，则否定了(B)；

若取 $x_n\equiv 0$，则 y_n 可以为任何数列而不必是无穷小量，这也否定了(C)；

事实上，当 $\dfrac{1}{x_n}(n\to\infty)$ 为无穷小量时，$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小量 x_ny_n 与无穷小量 $\dfrac{1}{x_n}$ 的乘积，从而必为无穷小量，故选(D).

【典型错误】 部分考生由于没有掌握“无界”与“无穷大量”的区别而选(B).

例 1.1.4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin n\pi}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【考点】 本题考查判断数列极限存在的夹逼准则，以及用定积分的定义求极限的方法.

【解】 由于

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin n\pi+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)<\frac{\sin n\pi}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}$$

$$<\frac{1}{n}\left(\sin n\pi+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n},$$

而由定积分的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

另一方面，$\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{2}{\pi},$$

所以由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin n\pi}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}$.

【典型错误】 主要问题是不会将极限化为定积分.

例 1.1.5 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$，**证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此**极限.

【考点】 本题主要考查数列收敛的准则——“单调有界数列必收敛”以及逻辑推理能力.

【证法 1】 由题设 $0<x_1<3$ 知，x_1，$3-x_1$ 均为正数，故

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设当 $k>1$ 时，$0<x_k\leqslant\frac{3}{2}$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2}$，故由数学归纳法知，对任意正整数 $n>1$，均有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$，即数列$\{x_n\}$是有界的.

又当 $n>1$ 时，$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0$ $\left(因\ x_n\leqslant\frac{3}{2}\right)$，故当 $n>1$ 时，$x_{n+1}\geqslant x_n$，即数列$\{x_n\}$单调增加.

所以由“单调有界数列必收敛”知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)}$，得 $a=\sqrt{a(3-a)}$，解之得 $a=\frac{3}{2}$，$a=0$(舍去). 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

【证法 2】 假设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 a，则有 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)}=\sqrt{a(3-a)}$，解之得 $a=\frac{3}{2}$ 和 $a=0$(舍去). 再证数列$\{x_n\}$收敛.

因为 $x_{n+1}-\frac{3}{2}=\sqrt{x_n(3-x_n)}-\frac{3}{2}=\frac{-\left(x_n-\frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+\frac{3}{2}}\leqslant 0$，即 $x_{n+1}\leqslant\frac{3}{2}$，$n=1,2,\cdots$，从而数列

$\{x_n\}$有上界.

又当 $n>1$ 时,$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n$

$$=\frac{3x_n-2x_n^2}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}=\frac{2x_n\left(\frac{3}{2}-x_n\right)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0,$$

所以数列$\{x_n\}(n>1)$单调增加.综上,由"单调有界数列必收敛"知该数列$\{x_n\}$收敛,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

【典型错误】 部分考生推理不严密,证明数列$\{x_n\}$有界时,没有用数学归纳法证明对任意 $n>1$ 都有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$.

例 1.1.6 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$为数列,下列命题正确的是

(A) 若$\{x_n\}$收敛,则$\{f(x_n)\}$收敛.　　(B) 若$\{x_n\}$单调,则$\{f(x_n)\}$收敛.

(C) 若$\{f(x_n)\}$收敛,则$\{x_n\}$收敛.　　(D) 若$\{f(x_n)\}$单调,则$\{x_n\}$收敛.

【答案】 (B).

【考点】 本题考查数列的单调有界准则.

【解】 在选项(B)中,因为数列$\{x_n\}$单调,考虑到 $f(x)$是一个单调有界函数,所以数列$\{f(x_n)\}$不仅单调,而且有界,从而数列$\{f(x_n)\}$收敛.

事实上,若取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 和 $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\text{且 } f(x_n)=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数},\\ -1, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

这样就排除了选项(A);若取 $f(x)=\arctan x$,$x_n=n$,则能排除(C)和(D).

例 1.1.7 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi$,$x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【考点】 本题考查单调有界准则、等价无穷小量代换及洛必达法则.

【证】 (1) 由于当 $0<x<\pi$ 时,$0<\sin x<x$,所以当 $0<x_n<\pi$ 时,$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$. 已知 $0<x_1<\pi$,故由数学归纳法知对一切 $n=1,2,\cdots$,有 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$,即$\{x_n\}$单调减少且 $x_n>0$.

由单调有界准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 记为 a,则 $a\geqslant 0$. 将 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限,得 $a=\sin a$,易知 $a=0$. 即有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$,又由(1)知当 $n\to\infty$时,$x_n\to 0$,故上式变形为

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

例 1.1.8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

【答案】 0.

【考点】 本题考查求"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式的极限和无穷小量的性质.

【解】 一方面，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x\ln^2 2+6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x\ln^3 2+6}=0,$$

另一方面，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}$，即 $\sin x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

因为有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量，所以原式为零.

【典型错误】 部分考生不知道有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量，而没有得出结果.

例 1.1.9 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$________.

【答案】 $\frac{1}{3}$.

【考点】 本题考查求"$\infty-\infty$"型未定式的极限. 涉及的方法有

(1) 洛必达法则；(2) 等价无穷小量代换.

【解】 用等价无穷小量代换后再用洛必达法则求解：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2=\frac{1}{3}.$$

【典型错误】 没有正确地运用等价无穷小量代换，从而得出错误的答案 0.

例 1.1.10 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【考点】 本题考查"$\frac{0}{0}$"型未定式的极限. 涉及如下知识点和方法：

(1) 等价无穷小量代换；(2) 重要极限或洛必达法则；(3) 泰勒公式(或麦克劳林公式).

【解法 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

【解法 2】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$，且

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3),$$

所以
$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\left[\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)\right]}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

【解法 3】 令 $t=\sin x$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{t\to0}\frac{(t-\sin t)t}{t^4}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

例 1.1.11 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$.

【考点】 本题考查求"$\frac{0}{0}$"未定式的极限. 主要考查如下能力和方法：

(1) 利用等价无穷小量代替简化计算的能力；

(2) 洛必达法则求极限.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+2\sin x-(x+1)^2}{x\ln(1+x)[\sqrt{1+2\sin x}+(x+1)]}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1+2\sin x-(x+1)^2}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2(x+1)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-2\sin x-2}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}.$$

注 在分子或分母中出现根式时，直接求导往往很复杂，先有理化后再求导效果要好一些.

例 1.1.12 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【答案】 e^{-1}.

【考点】 本题考查未定式的极限.

【解】 设 $y=(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$，则 $\ln y=\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}$，当 $x\to+\infty$时，$\frac{\ln x}{x}\to0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y$ 是"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式的极限，从而

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1,$$

得 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

注　首先判断出 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^0=1$ 是必要的.

例 1.1.13　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【考点】　本题考查分段函数极限存在的充分必要条件.

【解】　因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$,

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

【典型错误】　没有讨论左、右极限.

例 1.1.14　若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$________, $b=$________.

【答案】　1, −4.

【考点】　本题主要考查极限的局部逆问题. 涉及如下知识点:

(1) 等价无穷小量的替换;

(2) 极限的四则运算法则.

【解】　由题设可知分子的极限

$$\lim_{x\to0}\sin x(\cos x-b)=0,$$

所以分母的极限 $\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=0$,因而有 $a=1$.

将 $a=1$ 代入到原式,有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}(\cos x-b)$　$(\sin x\sim x, e^x-1\sim x)$

$$=1-b=5.$$

解得 $b=-4$. 所以,应依次填 1, −4.

【典型错误】　有的考生填 $b=-4$, a 任意,原因是不加条件地应用洛必达法则:

$$5=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x(\cos x-b)-\sin^2 x}{e^x}=1-b,$$

故 $b=-4$, a 任意. 但是考生没有注意到,若要用洛必达法则,需要分母的极限为零.

例 1.1.15　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

【答案】 $-\frac{4}{\pi^2}$.

【考点】 本题主要考查“$\frac{0}{0}$”型未定式的极限.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ $(\tan(x-1)\sim(x-1))$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

【典型错误】 部分考生没有注意 $\sin\frac{\pi x}{2}(x\to1)$ 不是无穷小量，而直接用$\frac{\pi x}{2}$替换 $\sin\frac{\pi x}{2}$，导致出错.

例 1.1.16 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$.

【考点】 本题主要考查“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限的计算方法和积分上限函数的求导方法.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$ $\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

【典型错误】 部分考生对积分号里的 e^{-x^2} 没有提出来而直接用洛必达法则.

例 1.1.17 已知 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，且$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

【答案】 (B).

【考点】 本题考查利用导数定义求极限的方法.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)-2f(x^3)+2f(0)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0),$$

故应选(B).

【典型错误】 使用洛必达法则.

例 1.1.18 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^3}\int_0^x\sin t^2dt, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

【答案】 $\frac{1}{3}$.

【考点】 本题考查函数在一点处连续的定义.

【解】 $a=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

例 1.1.19 已知函数 $F(x)=\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^a}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$，求 a 的取值范围.

【考点】 本题考查积分上限函数求导和洛必达法则.

【解】 当 $a\leqslant 0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-a}\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t=+\infty$，

与已知条件矛盾，故 $a>0$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^a}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{a}x^{3-a}=0$，

所以 $3-a>0$，即 $a<3$.

又因为 $0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{a(a-1)x^{a-2}}=\frac{2}{a(a-1)}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{3-a}}{1+x^2}$，

所以 $3-a<2$，即 $a>1$. 综上得 $1<a<3$.

【典型错误】 不知道反常积分 $\int_0^{+\infty}\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$ 是发散的.

例 1.1.20 设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

【答案】 (C).

【考点】 本题考查无穷大量阶的比较.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=+\infty$，

所以当 x 充分大时有 $f(x)<g(x)<h(x)$. 故选(C).

【典型错误】 不会利用求极限进行比较.

例 1.1.21 确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\,(c\neq 0)$.

【考点】 本题考查无穷小量的比较、洛必达法则和积分上限函数求导.

【解】 由于当 $x\to 0$ 时 $ax-\sin x\to 0$，且由已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\neq 0$，所以应有当 $x\to 0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$，从而 $b=0$.

再用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{x^3}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

同样,应有 $a-\cos x\to 0(x\to 0)$. 故 $a=1$.

继续用洛必达法则或用等价无穷小量代换,得 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$,于是得 $c=\frac{1}{2}$.

【典型错误】 答 b 可为任意常数. 其原因是考生第一步就用洛必达法则,而没有考察运用洛必达法则的条件之一:"分母的极限为 0". 由于在后续的计算过程中不再出现常数 b,就断言 b 可为任意常数.

例 1.1.22 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to 0$ 时,

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量. (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量. (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

【答案】 (B).

【考点】 本题主要考查无穷小量的比较以及无穷小量之间的"等价"、"同阶"、"较高阶"、"较低阶"的概念及判别方法.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)=\ln 2+\ln 3=\ln 6,$$

显然 $\ln 6\neq 0$, $\ln 6\neq 1$,所以选项(A)、(C)、(D)都不正确,故选项(B)正确.

【典型错误】 部分考生选(A),原因可能是将极限求错,也可能是对概念理解错误.

例 1.1.23 设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\frac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若\ n\ 为奇数,\\ \frac{1}{n}, & 若\ n\ 为偶数,\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时,x_n 是

(A) 无穷大量. (B) 无穷小量. (C) 有界变量. (D) 无界变量.

【答案】 (D).

【考点】 本题主要考查无穷大量、无穷小量、有界变量和无界变量等概念及判断方法.

【解】 因为

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2+\sqrt{2n-1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(2n-1+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)=+\infty,$$

所以 x_n 不是有界变量,更不可能是无穷小量,而是无界变量. 故选项(D)正确,而(B)和(C)不正确.

又因为
$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

所以对于任意的 $M>0$,不可能存在 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n|>M$,即选项(A)也不正确.

【典型错误】 部分考生没有弄清无穷大量与无界变量之间的区别而选(A).

例 1.1.24 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量?

(A) x^2. (B) $1-\cos x$. (C) $\sqrt{1-x^2}-1$. (D) $x-\tan x$.

【答案】 (D).