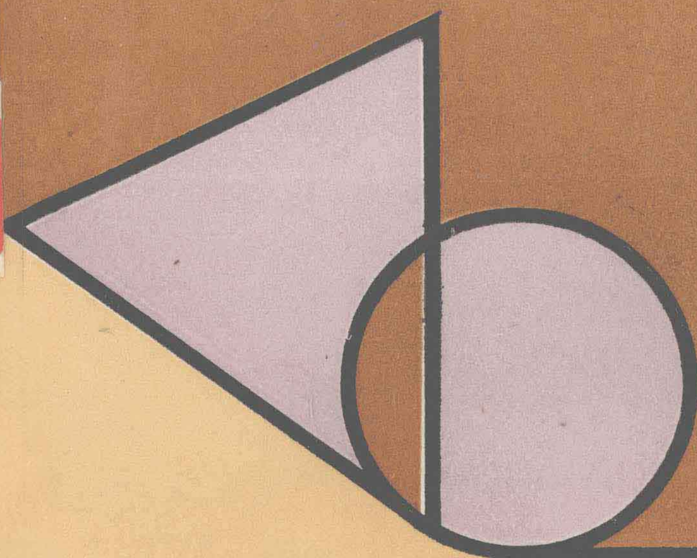
国际奥林匹克数学竞赛

北京西城区数学奥校编写组 编

初中数学选讲及自测题

（第二册）



中国广播电视出版社

国际奥林匹克数学竞赛

初中数学选讲及自测题

第二册

北京西城区数学奥校编写组　编

中国广播电视出版社

（京）新登字097号

国际奥林匹克数学竞赛
初中数学选讲及自测题
第二册

北京西城区奥校编写组　编
中国广播电视出版社出版发行
（北京复外广播电影电视部灰楼　邮政编码100866）
北京大兴沙窝店印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
·
787×1092毫米　32开　8.5印张　181（千）字
1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷
印数：1—10100册　定价5.40元
ISBN　7—5043—2020—X/G·752

前　言

在中学数学教学中，开拓第二课堂的工作已受到普遍重视，组织数学竞赛活动已成为推动这项工作的重要一环。

为使初中学生开阔视野，启迪思维，发展智力，提高能力，推动数学奥林匹克活动的开展，多年来，北京市西城区广泛开展初中数学竞赛辅导讲座活动，并取得了较好的成绩。

为提高竞赛辅导讲座的质量，我们组织多年从事讲课辅导的教练员，编写了《国际奥林匹克数学竞赛初中数学选讲及自测题》一书，分三册出版，供初中三个年级使用。全书基本上概括了初中数学重要基础知识，基本技能和基本方法，对初中数学竞赛范围的知识作了系统归纳，并特别着重于数学思维能力、数学思想方法和解题方法、解题能力的训练。

书中每个专题，首先概述知识要点，然后选择典型题目进行分析，强调了解题思路的分析和揭示解题规律。最后附有本专题的自测题及答案。旨在使读者了解竞赛的要求，有驾驭知识的主动权，从而为参加竞赛活动打下良好的基础。

参加本书编写工作的有罗小伟、陈娴、王永俊、张鸿菊、陶文中、郑康、金宝铮、李岗、欧阳东方、李松文和郑廉等同志。

在编写过程中，曾得到茅瑾同志的大力支持，特在此表示谢意。

编　者

1991年10月于北京

目　　录

第一讲　恒等变形

一、内容提要

1. 恒等式的意义

如果一个等式中的字母取允许范围内的任意一个值，等式总能成立，那么这个等式叫做恒等式。

如等式$a+b=b+a$，$|x|=|-x|$，$(x+1)^2=x^2+2x+1$，$\sqrt{a^2}=|a|$，$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$ 等都是恒等式，而$2x+1=0$，不是恒等式。

2. 恒等变形的意义

把一个式子变形为与原式恒等的另一种不同形式的式子，这种变形叫做恒等变形。

例如，上面列举的恒等式，从左式变形为右式，便是一种恒等变形。再如，$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$，$x=(x-y)+y$ 等也都是恒等变形。

从以上列举的恒等变形的例子中可知，根据运算律、运算法则或公式，对式子所进行的变形，一般来说都是恒等变形。

恒等变形的特点：形变值不变。

3. 多项式恒等的性质

两个多项式恒等的充分及必要条件，是这两个多项式的对应项系数相等。用数学符号语言可以这样表述：

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0\Longleftrightarrow a_n=b_n,\ a_{n-1}=b_{n-1},\ \cdots,\ a_1=b_1,\ a_0=b_0.$$

多项式恒等的性质，是运用待定系数法求多项式待定系数的依据。

二、范例

1. 因式分解

例1 分解因式$a(a+1)(a+2)(a+3)-3$。

分析：这是关于a的四次多项式。第一项中的四个因式都含有相同项a，而常数项从0开始依次增加1。把a和$a+3$、$a+1$和$a+2$分别组合在一组展开，便可以得到含有a^2+3a项的两个因式，再用十字相乘法便可因式分解。

解： 原式$=(a^2+3a)(a^2+3a+2)-3$

$=(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)-3$

$=(a^2+3a-1)(a^2+3a+3)$

例2 分解因式$x^4+(x+y)^4+y^4$

分析：这是一个关于x、y的二元对称多项式。可以考虑把x^4+y^4结合成一组，利用两数和的完全平方公式进行恒等变形，与$(x+y)^4$相联系，再观察式子的特点进行因式分

解。

解：原式 $=(x^4+y^4)+(x+y)^4$

$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x+y)^4$

$=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2+(x+y)^4$

$=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+4x^2y^2-2x^2y^2$

$+(x+y)^4$

$=2(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$

$=2[(x+y)^2-xy]^2$

$=2(x^2+xy+y^2)^2$。

例3 因式分解$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$

分析：观察这个三项式，可知第一项与第三项是两个完全平方式，因而联想两数和的完全平方公式作恒等变形。

解：原式 $=(1+y)^2+2x^2(1+y)(1-y)+x^4(1-y)^2$

$-2x^2(1+y^2)-2x^2(1+y)(1-y)$

$=[1+y+x^2(1-y)]^2-4x^2$

$=[1+y+x^2(1-y)+2x][1+y+x^2(1-y)$

$-2x]$

$=(1+y+x^2-x^2y+2x)(1+y+x^2-x^2y$

$-2x)$

$=(1+y+x^2-x^2y+x+x)(1+y+x^2-x^2y$

$-x-x)$

$=(x+1)(x-1)(x+1-xy+y)(x-1-xy$

$-y)$。

说明：此题因式分解中的第五步对$2x$和$-2x$拆项是关键的一步。

例4 分解因式$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$。

分析：这是一个轮换对称式。分解轮换对称式，可先以某一字母为主元进行整理，提取公因式，再按第二个字母整理因式分解，接着再按第三个字母整理分解。

解：原式 $=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-c^2b$

$$=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]$$

$$=(b-c)[(c-a)b+a^2-ac]$$

$$=(b-c)(c-a)(b-a).$$

又解：由因式定理和轮换对称式定义，将$a=b$代入原式 $=b^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2\times 0=0$。

$\therefore$原式含$(a-b)$因式。也必含有$b-c$，$c-a$因式。

因原式为三次齐次式，只相差一个系数，于是

设 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=m(b-c)(c-a)\times(a-b)$，

令$a=2$，$b=1$，$c=0$并代入上式，得$m=-1$，

$\therefore a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)\times(c-a)$

2. 求值

例5 已知$x-y=1$，则$x^3-x^2y+xy^2-2xy-y^3$的值为____。

分析：这是一道条件求值题，由题设$x-y=1$，可以从两个角度来求值：对原式进行恒等变形，使它出现$x-y$因式。再代值，逐步化简原式，再因式分解，出现$x-y$因式，代值；或者对条件$x-y=1$变形得$x=y+1$，代入原式直接计算求值。

解法（一） $x^3-x^2y+xy^2-2xy-y^3$

$$=x^2(x-y)+y^2(x-y)-2xy$$
$$=x^2+y^2-2xy$$
$$=(x-y)^2$$
$$=1。$$

解法（二） 由$x-y=1$，得$x=y+1$，代入原式

$$x^3-x^2y+xy^2-2xy-y^3$$
$$=(y+1)^3-(y+1)^2y+(y+1)y^2-2(y+1)y-y^3$$
$$=(y+1)^2(y+1-y)+y(y^2+y-2y-2-y^2)$$
$$=(y+1)^2+y(-y-2)$$
$$=1。$$

说明：比较两种解法，显然解法一简捷一些。原因是通过因式分解出现$x-y$因式，代值后使原式降次，从而简化了原式。

例6 已知$x^2=1991\times1993$，那么$x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$的值等于____。

分析：观察条件$x^2=1991\times1993$，注意到$1991\times1993=(1992-1)\times(1992+1)=1992^2-1$。为使求值简便易求，我们自然想到对原式恒等变形，先化简后代值。而原式的两项$x+\sqrt{x^2+1}$和$-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$恰为负倒数，只需分母有理化即可化简。

解： $x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$=x+\sqrt{x^2+1}-(x-\sqrt{x^2+1})$

$=2\sqrt{x^2+1}$

$=2\sqrt{1992^2}$

$=3984$。

例7 已知$a-b=\sqrt{2}$，$b-c=1$，求$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值。

解法（一） $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]。$$

$\because a-b=\sqrt{2}$，$b-c=1$，

$\therefore a-c=(a-b)+(b-c)=\sqrt{2}+1$，

$\therefore$原式$=\frac{1}{2}(2+1+2+2\sqrt{2}+1)$

$=3+\sqrt{2}$。

解法（二） 由题设$a-b=\sqrt{2}$，$b-c=1$，可得

$a=b+\sqrt{2}$，$c=b-1$，代入原式，

则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=(b+\sqrt{2})^2+b^2+(b-1)^2-(b+\sqrt{2})b-b(b$

$-1)-(b-1)(b+\sqrt{2})$

$=2\sqrt{2}b+2-2b+1-\sqrt{2}b+b+b+\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}b$

$=3+\sqrt{2}$.

例8　已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，求$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值。

解法（一）　$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$

$$=\frac{\frac{2}{y}+3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}$$（分子、分母同除以xy）

$$=\frac{-6+3}{-3-2}$$

$$=\frac{3}{5}.$$

解法（二）　由题设$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，得$y-x=3xy$，代入原式，则　$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$

$$=\frac{-6xy+3xy}{-3xy-2xy}$$

$$= \frac{-3xy}{-5xy}$$

$$= \frac{3}{5}.$$

说明：解法一根据分式基本性质对原式恒等变形，使它出现$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$项，整体代值，从而求出分式的值。这种方法具有普遍性，同学们应仔细领会、掌握。

例9 如果a是方程$x^2-3x+1=0$的根，求

$$\frac{2a^5-5a^4+2a^3-8a^2}{a^2+1} \text{ 的值。}$$

分析：同学们很容易知道$a^2-3a+1=0$，则$2a^5-5a^4+2a^3-8a^2$的值变为该多项式除以a^2-3a+1的余式。显然，余式是一次式，而分母a^2+1，由$a^2-3a+1=0$，可知为$3a$。于是问题即可化繁为简。

解：$\because a$是$x^2-3x+1=0$的根，

$\therefore a^2-3a+1=0$

根据多项式除法法则，可得

$2a^5-5a^4+2a^3-8a^2=(2a^3+a^2+3a)(a^2-3a+1)-3a=-3a$

$\therefore$原式$=\frac{-3a}{3a}=-1$。

例10 已知$x^2-x+1=0$，求$x^2+\frac{1}{x^2}$的值。

解：由已知条件$x^2-x+1=0$，可得$x+\frac{1}{x}=1$，

$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$=1-2$$

$$=-1。$$

说明：此题条件$x^2-x+1=0$变形为$x+\frac{1}{x}=1$，是根据等式性质进行的同解变形，目的在于得到与$x^2+\frac{1}{x^2}$有相似结构（两个互为倒数的和）的代数式的值。

想一想，由$x^2-x+1=0$能不能求$x^3+\frac{1}{x^3}$的值？能不能求$x^4+\frac{1}{x^4}$的值？

例11 已知：$(2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，

求：（1）$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$；

（2）$a_1+a_3+a_5$。

分析：由已知条件可知，这是一个五次多项式的恒等式。根据多项式恒等的性质和恒等定义，为了求$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$的值，从右式及上式对照看，只要$x=1$即可。

如何求 $a_1+a_3+a_5$ 的值？一种想法是从总和中减去 $a_0+a_2+a_4$，但 $a_0+a_2+a_4$ 未知，求 $a_0+a_2+a_4$ 等同于求 $a_1+a_3+a_5$，又回到了最初的问题．另一种想法是求出 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$ 的值，利用恒等变形，变成求 $a_1+a_3+a_5=\frac{1}{2}[(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5)]$ 的值．

解：令 $x=1$，得

$$(2\times1-1)^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5,$$

$$\therefore a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1. \qquad (1)$$

令 $x=-1$，得

$$(-2-1)^5=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5,$$

$$\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=(-3)^5=-3^5. \qquad (2)$$

(1)－(2)式得　$2(a_1+a_3+a_5)=1+3^5$,

$$\therefore a_1+a_3+a_5=\frac{1}{2}(1+3^5)=122.$$

例12　已知 $a^2+b^2=10$，$c^2+d^2=7$，求 $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ 的值．

分析：由题设可知，直接求出 ac,bd,ad 和 bc 的值是困难的．因为每一个等式都可以看作为一个二元二次不定方程，它有无穷多组解．因此，一个较为可行的想法是对原式进行恒等变形．使它出现 a^2+b^2 和 c^2+d^2 项，这样便可以转化为直接代值求值问题了．

解：$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

$$=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$$
$$=a^2(c^2+d^2)+b^2(d^2+c^2)$$
$$=(c^2+d^2)(a^2+b^2)$$
$$=7\times 10$$
$$=70.$$

想一想，此题如果直接将条件中的两个等式相乘$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=70$，能否直接求出原式值？

例13 如果$abc=1$，求

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}\text{的值。}$$

分析：观察所求分式，易知是轮换对称式。又因各分式分母相异，因此，欲求原式的值，首先需设法变形为同分母分式。显然，直接通分，计算太复杂了。我们考虑，能否根据题目条件，经过适当的恒等变形，将异分母变为同分母？为此，需先确定某一个分母为公分母。

解：原式$=\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{ab}{abc+ab+a}+\dfrac{1}{a+1+\dfrac{1}{c}}$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}$$

$$=1.\qquad\left(\because\frac{1}{c}=ab\right)$$

说明：上述求值过程中，我们从两个方面运用了$abc=1$这个条件。第一，直接用1代换abc，如第二步变形中的第二

项；第二，对$abc=1$变形，用变式代换（如用ab代换$\frac{1}{c}$）。

想一想，此题还有其它解法吗？

例14　设$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，求$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$的值。

分析：观察题设条件和所求的分式，发现共有三对互为倒数的分式。为了简化求值，可用换元法，设

$$\frac{x}{a}=m,\ \frac{y}{b}=n,\ \frac{z}{c}=p.$$

解：　设$\frac{x}{a}=m$，$\frac{y}{b}=n$，$\frac{z}{c}=p$，

则　$m+n+p=1$，　　(1)

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=0. \qquad (2)$$

由(2)得　$\frac{np+pm+mn}{mnp}=0$，

$$\therefore np+pm+mn=0,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=m^2+n^2+p^2\\&=(m+n+p)^2-2(mn+np+pm)\\&=1.\end{aligned}$$