3导 自考 3导丛书

导教·导学·导考

2005年

工程数学（复变函数与积分变换）

核心学案

自学考试新教材·公共课（二）

教材依据／辽宁大学出版社《工程数学（复变函数与积分变换）》

贺才兴／主编

组编／全国高等教育自学考试命题研究组

同步辅导同步过关

指定教材核心浓缩

预测试卷历年真题

RED PRECIOUS BOOK 红宝书

航空工业出版社

高等

导教·导学·导考

工程数学（复变函数与积分变换）

核心学案

自学考试新教材

应对自考课程大规模修订最新教材内容

组　编／全国高等教育自学考试命题研究组

教材依据／辽宁大学出版社《工程数学（复变函数与积分变换）》　主编／贺才兴

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据
工程数学.复变函数与积分变换/自学考试命题研究组,《工程数学》编委会编.—北京:航空工业出版社,2005.1
(自学考试新教材核心学案.公共课.第2辑)
ISBN 7-80183-528-X

Ⅰ.工... Ⅱ.①自...②工... ①Ⅲ.工程数学—高等教育—自学考试—自学参考资料②复变函数—高等教育—自学考试—自学参考资料③积分—变量—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本国书馆CIP数据核字(2004)第129921号

工程数学(复变函数与积分变换)
Gongcheng Shuxue (Fubian Hanshu Yu Jifen Bianhuan)

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里14号 100029)
发行部电话:010-84926529 010-64978486

三河市燕山印刷有限公司印刷 全国各地新华书店经售
2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷
开本:850×1168 1/32 印张:70
字数:2600千字 (全12册)定价:168.00元

简 介

张立勇 一个普通的农民孩子，清华大学打工 8 年，一直坚持刻苦自学，不仅 80 分以上通过四级、六级考试，托福考试 630 分，而且获得了北京大学本科文凭。2004 年 10 月共青团中央向张立勇颁发了“中国青年学习成才奖”，他被誉为共青团中央树立的全国十大杰出学习青年之一。

张立勇的事迹被中央电视台“东方之子”“面对面”“新闻会客厅”等多个栏目采访报道，被北京电视台、中国教育电视台等电视媒体，新浪网、雅虎网等网络媒体，《人民日报》《中国青年报》《大学生》等报纸杂志，共 100 多家媒体采访报道，在社会上引起很大反响。被众多青年学子视为学习的榜样。

“因为我选择了这样一条自己的人生道路，所以我没有机会像大多数的学子那样，经历从学校到学校，顺利地接受高等教育的过程。我只能通过自学来圆我的大学梦。”

“我常常想，上帝会厚爱每一个人的，它会用不同的方式对你所付出的艰辛和努力给予补偿。但是，上帝只钟爱那些自助的人。如果你不努力，你不拼搏，所有的机会都会和你失之交臂。如果在这十年之中，我放弃了对人生理想和人生价值的追求，那么，当这一切机遇到来的时候，我又怎么可能把握住呢？”

“大家觉得我是一个榜样，但我个人并不这么想。社会把我放到这样的位置，充当这样的角色，能够影响一些人，这是最让我自豪的。”

-------- 张立勇

导教·导学·导考

编委会

编委主任：程　琨　　魏　莹

编委名单：（按姓氏笔画排列）

万　鹏　刘　斌　刘海飞　刘　涛

闫树茂　宋玉珍　张　沁　张远盛

肖　果　郜桂英　崔海燕　程　琨

董金波　董　蕾　蒋　怡　魏　莹

前言

导教·导学·导考

“其实人的智力相差并不悬殊，可毅力的差距却使每个人拥有各自不同的前途。尤其是对于参加自考的人来说，毅力是非常重要的，当然还需要有得当的学习方法。”

“有很多人抱怨自考难以通过，然而正是这种严格的管理制度保证了自考毕业生的质量，使自考生获得了社会的认可和一致的好评。”

——一名从自考获得本科学历后又考上硕士生直到博士生的成功者的自述

参加自学考试，除了需要具备以上成功者所提到的毅力和方法外，还应该了解自考的每门课程都采用我们通常所说的“过关”考试——只要通过课程的一次性考试，就可拿到课程的学分，通过某专业要求课程的全部考试，也就会顺利获得这个专业的自考毕业证。然而，一分之差也会导致参考课程过关失败，有些考生难免多次重考才能修完规定课程。因此，在本书的编写过程中，编委们反复研讨自学考试的特点，努力寻求帮助自考生的有效途径。本书是多位学者、专家，历时数年的产物，具有以下优点。

一 掌握核心内容，了解命题动态，注重知识系统化

了解命题精神，是自学考试的核心，是达到专业标准的关键。自学考试的课程命题以课程自学考试大纲为依据，以最新指定教材为范围。本书紧紧贴住每一门课程的考试大纲和指定教材，用【考纲要求提示】、【知识结构图示】、【核心内容速记】、【同步精华题解】、【典型例题解析】等多个栏目解剖教材内容，是一套脉络清晰的速成讲义，可以使考生在厚厚的教材中抓住重点，对教材的系统学习有极强的指导作用。同时，对于临考考生，它又可以成为离开教材仍能独立使用的贴身笔记。《核心学案》摒弃了一些辅导书的题海战术，引导考生重视教材的学习。那么怎样去自学才能弄懂教材并将厚书读“薄”呢？抓住重点才是关键。《核心学案》用清晰的思路，帮助考生将教材知识系统化，使考生在答卷时知识系统、逻辑清晰、胸有成竹。

二 依据权威资料，重视最新信息，紧跟时代脉搏

参加高等教育自学考试的考生，常常会感到市面上的辅导资料甚至教材都有

滞后性。全国高教自考办也认可这一事实,并采取了一些有效措施,比如在发布考试大纲和指定教材的基础上又组编了《全国高等教育自学考试活页丛书》等补充学习材料,并明文规定增补内容纳入统一命题范围,要占卷面 5 ~ 10 分。同时高教自考办还加快了教材的修订频率。面对这种情况,原有的一些辅导资料的严重滞后和内容缺陷也是必然的。本套《核心学案》则高度重视这一现象,在依据考试大纲和指定教材时,选用高教自考办的最新修订本(2004 年起自考课程已在做大规模修订),并将活页丛书等内容融会贯通其中,有的科目还特意增加了【最新内容补充】以引起考生重视。另外,本套书还吸收了许多自考强化班的授课精华,目的是帮助考生了解最新考试动态。我们还将开通网上自考辅导随时更新有关内容和提供特色售后服务,欢迎点击 www. study-book. com. cn。

三 做到讲练结合,力求精讲精练,提高辅导命中率

本套书配有【同步精华题解】和综合演练题,是在对考纲、教材归纳总结后选编的一些经典同步练习题。这些练习题的题型与考试题型完全一致,使考生能够迅速掌握答题方法与同步要点。另外,本书的编者还依据各科内容,遴选考点,在对历年实考真题做详细分析的基础上精编了《命题预测试卷》。这些试卷不仅题型题量完全与真考试卷保持一致,而且力求覆盖考试大纲的各科重点。考生如果在学习《核心学案》的基础上再认真研习《命题预测试卷》,既可熟悉题型、了解试卷难易度,又可将其作为自测、练习之用,找出差距,查漏补缺。因此,在《核心学案》的首印首发优惠活动中,为了帮助考生用好的学习方法提高应试过关率,我们特意将《命题预测试卷》作为《核心学案》的赠品送给每个考生。这样,本书即成为真正具有命中率的辅导用书。

总之,面对数千万的自考考生,我们是抱着高度的责任感来完成这项使命的。我们的目的是:减轻考生的学习负担;我们口号是:用最短的时间使考生自考过关! 因为工作量的巨大和考期的压力,也许我们遗留了某些不足,欢迎读者批评指正。来函可致:reader@ study-book. com. cn,我们将高度重视,以求完善。

编 者

第一篇 复变函数

第一章 复数

第二章 解析函数

第三章 复变函数的积分

第四章 级数

第五章 留数

第二篇 积分变换

第一篇 复变函数

第一章 复 数

考纲要求提示

1. 深刻理解复数的概念；
2. 熟悉复数的多种表示法、复数的四则运算及开方运算；
3. 理解复数运算的几何意义；
4. 理解区域、单连域、多连域和简单曲线等概念；
5. 掌握用复变数的方程来表示常用曲线以及用不等式表示区域.

知识结构图示

复数
- 复数及其表示法
  - 复数的概念
  - 复数的表示法
    - 复平面
    - 复数的向量表示
    - 复数的三角表示与指数表示
- 复数的运算及几何意义
- 平面点集和区域
  - 点集概念
  - 区域概念
  - 简单曲线
  - 单连通区域和多连通区域

核心内容速记

1. 复数及其表示法

(1) 复数的概念

对于任意实数 x 和 y，称 $x+iy$ 为复数，其中 $i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位. 通常记复数为 $z=x+iy$，实数 x 和 y 分别为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}z.$$

当实数$x=0$时，$z=\mathrm{i}y$，称为纯虚数；当虚部$y=0$时，$z=x$就是一个实数，因此，全体实数是复数的一部分，复数是实数的推广. 特别，$0+\mathrm{i}0=0$.

两个复数之间不能比较大小，但可以定义它们的相等.

设有两个复数，$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，当且仅当$x_1=x_2$，$y_1=y_2$时，才有$z_1=z_2$.

(2) 复数的表示法

① 复平面

一个复数$z=x+\mathrm{i}y$由一对有序实数(x,y)惟一确定，对于平面上给定的直角坐标系，复数与该平面上的点成一一对应关系，从而复数$z=x+\mathrm{i}y$可以用该平面上的点(x,y)来表示，此时，x轴称为实轴，y轴称为虚轴，两轴所在的平面称复平面或z平面.

② 复数的向量表示

复数$z=x+\mathrm{i}y$可以用起点为原点，终点为$P(x,y)$的向量$\overrightarrow{OP}$来表示.

向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数$z=x+\mathrm{i}y$的模或绝对值，记为$|z|$或r，于是

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然有　　$|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$，$|z|\leqslant|x|+|y|$，

当点P不是原点，即$z\neq0$时，向量$\overrightarrow{OP}$与x轴正向的夹角θ称为复数z的辐角，记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z，有\ x=|z|\cos\theta, y=|z|\sin\theta, \mathrm{tg}\theta=\frac{y}{x}.$$

若θ_1为复数z的一个辐角，则$\theta_1+2k\pi$（k为任意整数）就给出了z的全部辐角. 我们把满足$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$的$\theta_0$称为$\arg z$的主值，记为

$$\theta_0=\arg z$$

辐角的主值$\arg z$可以由反正切函数$\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$来确定，其关系如下：

$$\arg z=\begin{cases}\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, & z\text{在第 Ⅰ、Ⅳ 象限；}\\ \pi+\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, & z\text{在第 Ⅱ 象限；}\\ -\pi+\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, & z\text{在第 Ⅲ 象限.}\end{cases}$$

③ 复数的三角表示与指数表示

利用直角坐标与极坐标之间的变换关系

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

还可以用模 $r=|z|$ 和辐角 $\theta=\mathrm{Arg}z$ 来表示 z,即

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

上式称为复数 z 的三角表示式.

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

再由三角表示式可以得到

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

上式称为复数 z 的指数表示式.

2. 复数的运算及几何意义

(1) 复数的加法和减法

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法和减法定义如下:

$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$,

$z_1-z_2=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$,

两个不等式 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$, $|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$,其中 $|z_1-z_2|$ 表示向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的长,也就是复平面上点 z_1、z_2 之间的距离.

(2) 复数的乘法和除法

① 两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的乘法定义如下:

$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$

又设两个复数的三角表示式分别为 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$,则有

$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$,

$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$,

$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$

特别当 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 时,复数 z 的 n 次幂

$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$

② 两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的除法定义如下:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}(z_2\neq 0),$$

且有 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$.

若复数 z_1 和复数 z_2 的指数表示式分别为 $z_2=r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$,则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}(r_2\neq 0).$$

(3) 复数和方根

设复数 ω 和 z,若 $\omega^n = z$(n 为正整数),则称复数 ω 为 z 的 n 次方根,记为

$$\omega = \sqrt[n]{z}$$

现令 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$,$\omega = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$,则由复数 n 次幂计算公式和复数相等的概念,可得

$\rho^n = r, \cos n\varphi = \cos\theta, \sin n\varphi = \sin\theta$

从而

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

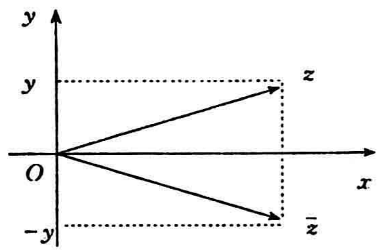
其中 $\sqrt[n]{r}$ 为 r 的算术根,$k = 0,1,2,\cdots,n-1$.

特别地,当 $z = 1$ 时,若令 $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$,则 1 的 n 次方根为 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$.

(4) 共轭复数及其运算性质

复数 $x - \mathrm{i}y$ 称为复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数,记为 $\bar{z}$,即 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

z 和 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的,如右图所示. 由上述定义,显然有



① $|\bar{z}| = |z|$;

② $\arg\bar{z} = -\arg z$;

③ $\bar{\bar{z}} = z$;

④ $z\bar{z} = |z|^2$;

⑤ $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;

⑥ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

⑦ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$;

⑧ $x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

由共轭复数的概念,还可得到如下两个关于复数模的重要公式:

$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$;

$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

(5) 曲线的复数方程

① 用复数形式的方程来表示一条平面曲线 $F(x,y) = 0$;

② 从复数形式的方程来确定其所表示的平面曲线.

3. 平面点集和区域

(1) 点集概念

定义 1　在平面上以 z_0 为中心,正数 ρ 为半径的圆内部的点集,称为点 z_0

的 ρ 邻域,在不强调半径 ρ 时,就简称为邻域.

显然,点 z_0 的 ρ 邻域可表示为

$$|z-z_0|<\rho.$$

点 z_0 的邻域有时也称为点 z_0 的一个圆域.

定义2　设 E 为一点集,z_0 为一点. 若点 z_0 的某一个邻域包含在 E 内,则点 z_0 为 E 的内点;若点 z_0 的某一个邻域内的点都不属于 E,则称点 z_0 为 E 的外点;若在点 z_0 的任意一个邻域内,既有属于 E 的点,也有不属于 E 的点,则称点 z_0 为 E 的界点.

定义3　若点集 E 能完全包含在以原点为圆心,以某一个正数 R 为半径的圆域内部,则称 E 为一个有界点集.

(2) 区域概念

定义4　设点集 D 满足下列两个条件:

① D 是开集,即 D 完全由内点组成;

② D 是连通的,即 D 中任何两点都可以用一条完全属于 D 的折线连接起来,则称 D 为一个区域.

区域 D 的全体界点称为 D 的边界.

由区域的定义,区域不包括界点,一般也称之为开区域,由区域 D 及其边界所构成的点集称为闭区域或闭域,记为 $\overline{D}$.

若区域 D 可以包含在某个以原点为中心,以某一正数 R 为半径的圆内,则称 D 为有界区域,否则为无界区域.

(3) 简单曲线

设 $C:z=z(t)\,(a\leqslant t\leqslant b)$ 为一条连续曲线,$z(a)$ 与 $z(b)$ 分别称为 C 的起点与终点. 对于满足 $a<t_1<b, a\leqslant t_2\leqslant b$ 的 t_1 与 t_2,当 $t_1\neq t_2$,而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时,点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点. 没有重点的连续曲线 C,称为简单曲线或约当(Jordan)曲线. 如果简单曲线 C 的起点与终点重合,即 $z(a)=z(b)$,那么曲线 C 称为简单闭曲线或约当闭曲线.

以一条简单闭曲线 C 为公共边界可以把平面分为两个区域:一个是有界的,称为 C 的内部;另一个是无界的,称为 C 的外部.

若沿 C 前进一周时,C 的内部始终在 C 的左方,则这个前进方向称为正方向;若沿 C 前进一周时,C 的内部始终在 C 的右方,则这个前进方向称为负方向.

设 $z=z(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 是一条简单曲线(闭或不闭),若 $z(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上有连续导数

$$z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t), z'(t)\neq 0,$$

则称此曲线为光滑曲线,由若干段光滑曲线所组成的曲线称为逐段光滑曲线.

(4) 单连通区域与多连通区域

利用简单闭曲线可以区别单连通区域与多连通区域.

设 D 为一区域,若属于 D 的任何简单闭曲线的内部仍属于 D,则称 D 为单连通区域,非单连通区域称为多连通区域.

典型例题点拨

例 1 求下列复数 z 的实部与虚部,共轭复数,模与辐角主值.

(1)$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$; (2)$z=(-1+\sqrt{3}i)^6$; (3)$z=i^8-4i^{21}+i$.

解 (1)$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}i$

$\mathrm{Re}z=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$;$\mathrm{Im}z=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$; $\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}i$;

$|z|=\dfrac{|1+i|}{|\sqrt{3}+i|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\arg z=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)$.

$$(2)z=(-1+\sqrt{3}i)^6=\left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right]^6$$
$$=2^6(\cos4\pi+i\sin4\pi)=64$$

$\mathrm{Re}\,z=64$; $\mathrm{Im}\,z=0$; $\bar{z}=64$; $|z|=64$; $\arg z=\mathrm{arctg}\dfrac{0}{64}=0$.

(3)$z=i^8-4i^{21}+i=1-4i+i=1-3i$.

$\mathrm{Re}\,z=1$; $\mathrm{Im}\,z=-3$; $\bar{z}=1+3i$;

$|z|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$; $\arg z=-\mathrm{arctg}3$.

例 2 把复数 $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha$, $-\pi<\alpha<-\dfrac{\pi}{2}$ 化为三角表示式与指数表示式,并求 z 的辐角主值.

解 $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha=1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

因为 $-\pi<a<-\dfrac{\pi}{2}$,所以$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{a}{2}<\dfrac{3\pi}{4}$. 因此

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)<0,$$

故 $$r=|z|=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

由于

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

从而得z的三角表示式:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

即指数表示式为:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

例3 当x,y等于什么实数时,等式

$$\frac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}\text{ 成立?}$$

解 由$\frac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$可得

$$x+1+\mathrm{i}(y-3)=(1+\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})$$

即 $$(x+1)+\mathrm{i}(y-3)=2+8\mathrm{i}$$

因此有 $$\begin{cases}x+1=2\\ y-3=8\end{cases}$$

从而得$x=1,y=11$.

所以当$x=1,y=11$时,等式$\frac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$成立.

例4 设$z\neq 0$,试证

$$|z-1|\leqslant||z|-1|+|z||\arg z|.$$

证 设$z=|z|e^{\mathrm{i}\arg z},\theta=\arg z,-\pi<\theta\leqslant\pi$,则

$$\begin{aligned}|z-1|&=|z-|z|+|z|-1|\leqslant||z|-1|+|z-|z||\\&=||z|-1|+|z||\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta-1|\\&=||z|-1|+|z|\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\\&=||z|-1|+2|z||\sin\frac{\theta}{2}|\\&\leqslant||z|-1|+|z||\theta|\ \left(\text{由}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|=\sin\frac{|\theta|}{2}\leqslant\frac{|\theta|}{2},0\leqslant\frac{|\theta|}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\\&=||z|-1|+|z||\arg z|\end{aligned}$$

例 5　求复数 $z=\dfrac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$ 的模.

解法一　我们当然可以先把 z 化成 $a+b\mathrm{i}$ 的形式，然后求它的模，但利用复数的共轭运算更为方便.

$$|z|^2=z\bar{z}=\frac{(3-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\cdot\overline{\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}}$$

$$=\frac{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}\cdot\frac{(3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=1.$$

故 $|z|=1$.

解法二　由于本题的特殊性，还可以很快地得出

$$|z|=\frac{|3+\mathrm{i}||2-\mathrm{i}|}{|3-\mathrm{i}||2+\mathrm{i}|}=1 \quad \text{（因为一对共轭复数的模相等）}.$$

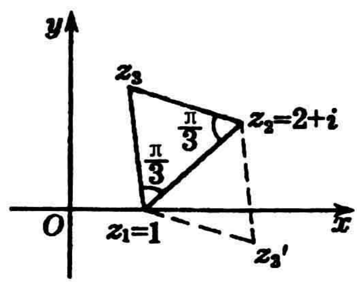
例 6　已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 与 $z_2=2+\mathrm{i}$，求它的另一个顶点.

解　如下图所示，将向量 z_2-z_1 绕 z_1 旋转 $\dfrac{\pi}{3}\left(\text{或}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 就得到另一个向量，它的终点即为所求的顶点 z_3（或 z'_3）. 由于复数 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ 的模为 1，辐角为 $\dfrac{\pi}{3}$，根据复数的乘法，有

$$z_3-z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}(z_2-z_1)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i},$$



所以

$$z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

类似可得

$$z'_3=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

例 7　求满足关系式 $\cos\theta<r<3\cos\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的点 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的集合 G. 若 G 为一区域，则指明它是单连通域还是多连通域.

解　由 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，可知

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$