公共基础课教材

经济应用数学

JINGJI YINGYONG SHUXUE

主编 王春珊

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

经济应用数学

主　编	王春珊	安徽工商职业技术学院
	熊丽华	大连工业大学职业技术学院
	周　密	湖南科技职业学院
副主编	宋国平	大连工业大学职业技术学院
	黄晓妃	海南软件职业技术学院
	王　霞	安徽工商职业技术学院
	余国锋	安徽工商职业技术学院
编　委	王　芳	西南大学重庆学院
	陈　亮	西南大学重庆学院

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书为高等院校教材，经过作者多年的教学实践和吸收"十二·五"规划教材成果的基础上编写而成。主要内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、线性代数、线性规划初步、随机事件及其概率、随机变量及其数字特征、数理统计等。

本书采用了"案例驱动"模式的编写体例，淡化理论，突出应用，力求用简洁易懂的语言阐述高等数学中的基础知识和基本概念。

本书可作为高等院校经济管理类专业的数学教材，也可作为相关科技、管理人员的参考书及培训用书。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学 / 王春珊主编. —北京 ：北京邮电大学出版社，2012.6

ISBN 978-7-5635-3091-5

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①经济学—高等学校—教材 Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 118845 号

书　　名：经济应用数学
主　　编：王春珊
责任编辑：毋燕燕
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京俊林印刷有限公司
开　　本：787mm×1 092mm　1/16
印　　张：16.75
字　　数：337 千字
印　　数：1—3 000 册
版　　次：2012 年 5 月第 1 版　2012 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3091-5　　定　价：34.80 元

前　言

为了适应迅速发展的高等职业教育的需要，真正落实高等职业教育的培养目标，切实贯彻“以应用为目的、理论知识以必需、够用为度”的原则，根据高职高专数学教学的特点，结合学生的实际水平，我们本着重能力、重应用、重素质、求创新的总体思路，编写了这本数学教材，供高等职业院校经济类、管理类学生使用。本教材在许多方面都具有明显的高职高专教育的特色，具体反映在：

1. 案例驱动模式。在每一章的开始设置了一经济案例，较好地体现了数学知识在经济中的应用，调动了学生的学习兴趣。

2. 淡化理论，突出实用。本书在理论上以学生易理解和不影响教学体系为尺度，多注重以几何图形直观启发学生。结合经济及管理类专业实际，列举了大量的经济数学模型和数学在经管方面的应用。

3. 通俗易懂。结合学生实际水平，在教材内容处理上力求通俗易懂，深入浅出。在介绍基本理论和重要定理时，没有采用传统的严谨数学论证方法，而是注重以实例引入概念和定理，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学的原理和方法解决问题的能力。

4. 把方法的应用程序化、步骤化。

5. 重要或学生易出错的一些知识点都以“注：…”的形式和不同字体加以强调，以引起学生的重视。

本教材由安徽工商职业学院王春珊老师担任主编，并负责全书大纲的拟定，前言的撰写，并带领本学院的王霞老师、余国峰老师负责第一章至第三章的编写工作，大连工业大学职业技术学院熊丽华老师担任第二主编，负责第四章至第六章的编写工作，湖南科技职业学院周密老师担任第三主编，负责第七章的编写工作，大连工业大学职业技术学院的宋国平老师担任第一副主编，负责第九章的编写工作；海南软件职业技术学院黄晓妃老师担任第二副主编，负责第八章的编写工作；西南大学重庆学院王芳老师和陈亮老师担任编委，共同负责第十章的编写工作。

在教材编写过程中广泛参考了国内外教材和书籍，借鉴和吸收了其他同行的研究成果，在此一并致谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章　极限与连续 …… (1)
1.1　函　数 …… (1)
1.2　极限的概念 …… (8)
1.3　极限的运算 …… (13)
1.4　函数的连续性 …… (20)
第 2 章　导数与微分 …… (29)
2.1　导数的概念 …… (29)
2.2　导数的运算 …… (33)
2.3　高阶导数 …… (37)
2.4　函数的微分 …… (39)
第 3 章　导数的应用 …… (46)
3.1　中值定理 …… (46)
3.2　洛必达法则 …… (48)
3.3　函数单调性与曲线凹凸性的判定 …… (50)
3.4　函数的极值与最值 …… (54)
3.5　导数在经济工作中的应用 …… (57)
3.6　多元函数的偏导数及其应用 …… (61)
第 4 章　不定积分 …… (72)
4.1　不定积分的概念与性质 …… (72)
4.2　换元积分法 …… (76)
4.3　分部积分法 …… (81)
4.4　微分方程初步 …… (83)
第 5 章　定积分 …… (92)
5.1　定积分的概念与性质 …… (92)
5.2　微积分基本定理 …… (96)
5.3　积分的计算 …… (99)
5.4　无限区间上的广义积分 …… (102)
5.5　定积分的应用 …… (103)

第 6 章　线性代数 …… (112)
6.1　n 阶行列式 …… (112)
6.2　n 元线性方程组与矩阵 …… (122)
6.3　矩阵的运算 …… (127)
6.4　逆矩阵 …… (134)
6.5　线性方程组解的一般理论 …… (137)
第 7 章　线性规划初步 …… (154)
7.1　线性规划问题的概念 …… (154)
7.2　线性规划的图解法 …… (156)
7.3　线性规划的标准形式 …… (160)
7.4　线性规划的单纯形解法 …… (163)
7.5　线性规划在经济方面的应用 …… (169)
第 8 章　随机事件及其概率 …… (178)
8.1　随机事件 …… (178)
8.2　随机事件的概率 …… (183)
8.3　概率的加法公式 …… (185)
8.4　条件概率 …… (187)
8.5　事件的独立性与伯努利概型 …… (193)
第 9 章　随机变量及其数字特征 …… (199)
9.1　随机变量的概念 …… (199)
9.2　离散型随机变量的概率分布 …… (200)
9.3　连续型随机变量的概率分布 …… (203)
9.4　随机变量的数字特征 …… (210)
第 10 章　数理统计 …… (220)
10.1　数理统计的基本概念 …… (220)
10.2　参数的点估计 …… (225)
10.3　参数的区间估计 …… (230)
10.4　参数的假设检验 …… (234)
附表 I:标准正态分布数值表 …… (246)
附表 II:t一分布双侧临界值 …… (247)
附表 III:χ^2一分布的上侧临界值表 …… (248)
参考答案 …… (250)
参考文献 …… (261)

第 1 章　极限与连续

学习目标

了解初等函数的概念，掌握复合函数的分解过程；

理解极限的定义，会求函数的极限、连续区间和间断点；

掌握常用的经济函数，并会根据经济变量分析或预测简单的经济问题.

【遗产分割】

如果没有邻居的一匹马，你该如何分割遗产？

从前有一个牧民，临终前要把 17 匹马分给他的 3 个儿子. 留下遗嘱：分给老大$\frac{1}{2}$，老二$\frac{1}{3}$，老三$\frac{1}{9}$. 牧民死后，三个儿子不知道怎么来分，这时，邻居牵来一匹马，共有 18 匹马了，于是老大分得 9 匹，老二分得 6 匹，老三分得 2 匹，还剩下 1 匹马，邻居又牵着自己的那匹马走了. 这就是著名的"借马分马"故事. 如果没有邻居的那匹马，你该如何来分割遗产？

1.1　函　数

1.1.1　函数的概念

圆的面积 A 与半径 r 之间的关系由 $A = \pi r^2$ 表示，当半径 r 发生变化时，圆的面积 A 也随着作相应的变化. 在这个问题中所描述的变化过程有两个变量，当其中一个变量在一定范围内取定某一数值时，另一个变量按照一定的法则，有唯一确定的数值与之对应.

定义 1.1　已知变量 x 与 y，当变量 x 在某个非空数集 D 内任取一个实数值时，变量 y 按照一定的对应法则 f，总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的定义域.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 相对应的 y 的值叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 当 x 取遍定义域 D 内的所有值，对应的函数值的集合 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

函数 $y=f(x)$ 中的符号"f"表示 x 与 y 之间的对应法则,它也可以用其他字母表示,如 $y=g(x)$,$y=h(x)$,$y=\Phi(x)$,$y=G(x)$ 等.

注:定义域与对应规则是构成函数的两个基本要素,只有定义域与对应规则完全相同的两个函数才是相同的函数

例 1 某种商品的需求量 Q 与价格 P 的关系为 $5Q+P-28=0$.

当变量 P 在上述方程式适用范围内任取一个数值时,根据对应规则,可得到一个确定的 Q 值与之对应.

例 2 函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\{2\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直线,如图 1.1 所示.

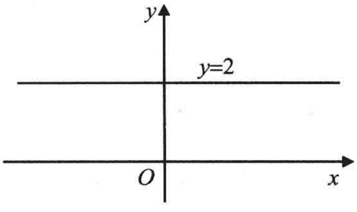

图 1.1

例 3 下列各对函数中(　　)不是同一个函数.

A. $y=\dfrac{x}{x^2}$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$

B. $y=3^{2x}$ 与 $y=9^x$

C. $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg|x|$

D. $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 与 $y=\sin x$

解 答案 D.

例 4 已知 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求函数 $f(x)$ 的解析式.

解 因为 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$

所以 $f(x+\dfrac{1}{x})=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$

故函数 $f(x)=x^2-2$ 且定义域为 $D=\{x\mid x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -2\}$.

1.1.2 分段函数与反函数

1. 分段函数

分段函数是指在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的数学式子表示的函数.

例 5 函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=[0,+\infty)$,它的图形如图 1.2 所示.这函数称为绝对值函数.

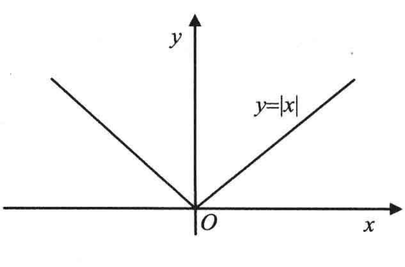

图 1.2

例 6　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$，$f(0)$ 和 $f(\Delta x)$.

解　$f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{4}{\pi^2}$

$f(0)=0$

当 $\Delta x=0$ 时，$f(\Delta x)=f(0)=0$

当 $\Delta x\neq 0$ 时，$f(\Delta x)=(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}$

2. 反函数

定义 1.2　设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 M，若对于 M 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称 $y=f(x)$ 为直接函数.

显然 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，故通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的步骤：

(1) 从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 交换字母 x 和 y，得到函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 7　求函数 $y=2x+1$ 的反函数.

解　由 $y=2x+1$ 解得 $x=\dfrac{y-1}{2}$，互换 x 和 y 得函数 $y=2x+1$ 的反函数为

$y=\dfrac{x-1}{2}$

1.1.3　函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是无界的.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内就有

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一的实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 且比 1 大的数都可以作为正数 M.

2. 函数的单调性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 在定义区间 I 内有定义，若对于 I 内的任意两点 x_1，x_2，

当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在定义区间 I 内是单调增加的；若对于 I 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $y = f(x)$ 在定义区间 I 内是单调减少的.

显然，单调增加函数的图像从左至右逐渐上升；单调减少函数的图像从左至右逐渐下降.

3. 函数的奇偶性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.如果对于任意 $x \in D$，恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x \in D$，恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

注：偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例如，函数 $y = f(x) = 0, x \in \mathbf{R}$ 就是一个既是奇函数又是偶函数的函数；$y = x^2$ 和 $y = \cos x$ 都是偶函数；$y = x^3$ 和 $y = \sin x$ 都是奇函数；$y = e^x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

4. 函数的周期性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个常数 $T \neq 0$，使得对于任意 $x \in D$，都有 $x + T \in D$，且 $f(x + T) = f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

注：周期函数的周期不是唯一的，如果 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 T 的整数倍都是它的周期，通常所说的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y = f(x) = c, x \in \mathbf{R}$ 就是一个以任意非零实数为周期的周期函数；函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y = e^x$ 不是周期函数.

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数 $y = f(x) = c$

它的定义域是$(-\infty, +\infty)$，无论 x 取什么值，都有 $y = c$，它的图像是一条过点$(0, c)$与 x 轴平行(重合)的直线.

(2) 幂函数 $y = x^\alpha$(α 为实数)

幂函数 $y = x^\alpha$(α 为实数)的图像都经过点$(1,1)$，且当 $\alpha > 0$ 时，幂函数 $y = x^\alpha$ 在区间$(0, +\infty)$内单调增加；当 $\alpha < 0$ 时，幂函数 $y = x^\alpha$ 在区间$(0, +\infty)$内单调减少.

(3) 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

因为 $a > 0$，无论 x 取何值，总有 $a^x > 0$，所以指数函数的图像总在 x 轴上方. 又因为 $a^0 = 1 (a > 0)$，所以函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像都通过点$(0,1)$.

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 是单调减少的.

(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

特别，当 $a=10$ 时，称为常用对数，记为 $y=\log_{10}x$，简记为 $y=\lg x$；当 $a=\mathrm{e}$ 时(其中 $\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\cdots$，是一个无理数，是为了纪念著名数学家欧拉而命名的)，称为自然对数，记为 $y=\log_{\mathrm{e}}x$，简记为 $y=\ln x$. 它在工程技术上经常用到.

因为对数函数与指数函数互为反函数，所以它们的图像关于直线 $y=x$ 对称. 故对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的图像总在 y 轴的右侧，且通过点(1,0).

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减少的.

(5) 三角函数

函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$ 统称为三角函数.

(6) 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$.

2. 复合函数

我们看下面的函数

$$y=\ln(1+x^2)$$

显然，它不是基本初等函数. 但是，它可以看做是由两个简单的函数构成的.

定义 1.7　设函数 $y=f(u),u=\varphi(x),x\in D$. 如果在 D 的某个非空子集 D_1 上，对于 $x\in D_1$ 的每一个 x 值所对应的 u 值，都能使函数 $y=f(u)$ 有定义，则 y 是 x 的函数. 这个函数叫作由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量. 复合函数的定义域是 D_1.

例如，函数 $y=\ln(1+x^2)$ 就是由 $y=\ln u$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $[0,+\infty)$.

例 8　写出下列函数的复合函数：

(1) $y=u^5,u=\cos x$；　　(2) $y=u^2-2u+2,u=x^2+1$；

(3) $y=u^2,u=2^x$；　　(4) $y=\arctan u,u=\mathrm{e}^v,v=\sqrt{x}$.

解　(1) 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^5$ 得所求的复合函数是 $y=\cos^5 x$；

(2) 用代入法可得 $y=(x^2+1)^2-2(x^2+1)+2$，化简整理得 $y=x^4+1$；

(3) 用代入法可得 $y=(2^x)^2$，即 $y=4^x$；

(4) 用代入法可得 $y=\arctan e^{\sqrt{x}}$.

例 9 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=3^{\frac{1}{x}}$；　(2) $y=\sin^3 5x^2$；　(3) $y=\ln\cos 3\sqrt{x}$；

(4) $y=\arctan 2\sqrt{1-x^2}$；　(5) $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$；　(6) $y=\cos(\sqrt{1+\lg x})$.

解 (1) 函数 $y=3^{\frac{1}{x}}$ 的复合过程是 $y=3^u, u=\frac{1}{x}$；

(2) 函数 $y=\sin^3 5x^2$ 的复合过程是 $y=u^3, u=\sin v, v=5x^2$；

(3) 函数 $y=\ln\cos 3\sqrt{x}$ 的复合过程是 $y=\ln u, u=\cos v, v=3\sqrt{x}$；

(4) 函数 $y=\arctan 2\sqrt{1-x^2}$ 的复合过程是 $y=\arctan u, u=2\sqrt{v}, v=1-x^2$；

(5) 函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 的复合过程是 $y=\sqrt{u}, u=\cot v, v=\frac{x}{2}$；

(6) 函数 $y=\cos(\sqrt{1+\lg x})$ 的复合过程是 $y=\cos u, u=\sqrt{v}, v=1+\lg x$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合，并且能够用一个数学式子表示的函数，我们称为初等函数.

例如 $y=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{x}, y=\arcsin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, y=\lg\cos 2^x$ 等都是初等函数.

注：分段函数一定不是初等函数. 如 $y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$，$y=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$. 还有 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 就不是初等函数，但 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n (n\in\mathbf{N})$ 是初等函数.

1.1.5 经济学中常用的函数

1. 总成本函数、收入函数和利润函数

(1) 总成本函数

在产品的生产过程中，产品的总成本 C 是产量 x 的单调增加函数，记作 $C=C(x)$，它由两部分组成：固定成本 C_1（厂房、设备的折旧费，管理人员的工资，广告费等）；可变成本 $C_2(x)$，它是随产品数量的变化而直接变化的（原材料费、燃料费、包装费等）. 于是

总成本 $C(x)=C_1+C_2(x)$

平均成本函数 $\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$

(2) 收入函数

产品全部销售后的总收入函数 $R(x)$ 等于产量 x 与销售价格 P 的乘积. 即

$$R(x) = xP$$

(3) 利润函数

产品全部销售后获得的总利润 $L(x) = R(x) - C(x)$

例 10　【生产成本】某产品的总成本 C 万元为产量 x 吨的函数 $C = C(x) = a + bx^2$，其中 a,b 为待定常数. 已知固定成本为 400 万元，且当年产量 $x = 100$ 吨时，总成本 $C = 500$ 万元. 试求平均单位成本 $\overline{C}(x)$.

解　因为固定成本为 400 万元，即

当产量 $x = 0$ 吨时，总成本 $C(0) = a = 400$　①

当产量 $x = 100$ 吨时，总成本 $C(100) = a + b \cdot 100^2 = 500$　②

由 ①② 两式，得 $a = 400, b = \dfrac{1}{100}$. 于是得总成本函数 $C = C(x) = 400 + \dfrac{x^2}{100}$

所以平均单位成本 $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{400}{x} + \dfrac{x}{100}$(万元 / 吨)$(x > 0)$.

例 11　【企业利润】设某工厂生产某种产品每吨售价 2 万元，每天生产 x 吨的总成本为 C 万元，且 $C = x^2 - 4x + 5$. 求每天生产 x 吨的利润函数以及 $x = 2,5,7$ 时的利润.

解　由题意可得，收入函数为 $R(x) = 2x$，成本函数为 $C(x) = x^2 - 4x + 5$

所以利润函数为 $L(x) = R(x) - C(x) = -x^2 + 6x - 5$

当 $x = 2$ 时，利润为 $L(2) = -2^2 + 6 \times 2 - 5 = 3$(万元)

当 $x = 5$ 时，利润为 $L(5) = -5^2 + 6 \times 5 - 5 = 0$(万元)

当 $x = 7$ 时，利润为 $L(7) = -7^2 + 6 \times 7 - 5 = -12$(万元)

从这个例子可以看出：

①$L(x) = R(x) - C(x) > 0$，利润为正值，生产处于盈利状态；

②$L(x) = R(x) - C(x) < 0$，利润为负值，生产处于亏损状态；

③$L(x) = R(x) - C(x) = 0$，利润为零，生产处于盈亏平衡状态. 我们把无盈亏状态时的产量 x_0 称为盈亏平衡点.

2. 需求函数与供给函数

消费者对某种商品的需求量 Q 不但与该商品的价格 P 密切相关，而且与消费者的人数、收入、节气时令等等有关. 现在我们只考虑商品的需求量与价格的关系，而将其他各种量看做常量. 这样，商品的需求量 Q 就是价格 P 的函数，称为需求函数. 记作

$$Q = Q(P)$$

一般来说，当商品的价格上涨时，商品的需求量就会减少. 因此，需求函数是单调减少函数.

常见的需求函数有：

线性需求函数 $Q = a - bP\,(a > 0, b > 0, a, b$ 都是常数)；

二次需求函数 $Q = a - bP - cP^2\,(a > 0, b > 0, c > 0, a, b, c$ 都是常数)；

指数需求函数 $Q = a\mathrm{e}^{-bP}\,(a > 0, b > 0, a, b$ 都是常数).

商品的供给量 Q 也是商品的价格 P 的函数，称为供给函数，记作

$$Q = Q(P)$$

一般来说，当商品的价格上扬时，商品的供给量将会增加. 因此，供给函数是单调增加函数.

常见的供给函数有：线性供给函数 $Q = aP - b(a > 0, b > 0, a, b$ 都是常数$)$，二次供给函数，指数供给函数和幂函数等等.

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格 P_0，称为均衡价格.

例 12 **【需求平衡】**已知某商品的需求函数是 $Q = 50 - \frac{4}{3}P$，供给函数是 $P = \frac{3}{2}Q + 6$. 试求该商品的处于市场平衡状态下的价格(万元 / 吨) 和需求量(吨).

解 联立方程组 $\begin{cases} Q = 50 - \frac{4}{3}P \\ P = \frac{3}{2}Q + 6 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} Q = 14 \\ P = 27 \end{cases}$

所以，该种商品的市场平衡价格是 27 万元 / 吨，需求量为 14 吨.

1.2 极限的概念

1.2.1 数列的极限

1. 数列

按先后次序排列的一列数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots,$$

称为数列，简记为 $\{x_n\}$. 其中，x_1 叫做数列的第一项(又称首项)，x_2 叫做数列的第二项，……，x_n 叫做数列的第 n 项，又称通项. 例如

(1) $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$;

(2) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$;

(3) $2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots$;

(4) $0, 1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, \cdots, 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \cdots$.

注：数列可以看做是定义域为正整数集的函数.

2. 数列极限的概念

观察上面的几个数列，容易看出：(1) 当 $n \to \infty$ 时，通项 $x_n = \frac{1}{n^2}$ 无限接近于常数零；(2) 当 $n \to \infty$ 时，通项 $x_n = (-1)^{n+1}$ 在 1 与 -1 之间来回跳跃，没有固定的变化趋势；(3)

当 $n \to \infty$ 时，通项 $x_n = 2^n$ 无限变大；(4) 当 $n \to \infty$ 时，通项 $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ 在 1 的左右两侧不停地摆动，而且越来越趋近于 1，有固定的变化趋势.

定义 1.8　已知数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$，当 $n \to \infty$ 时，通项 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，则称当 $n \to \infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A(n \to \infty)$. 亦称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A；如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就称数列 $\{x_n\}$ 是发散数列.

根据数列极限的定义，(1) 和(4) 中的极限分别为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1$. 数列(2) 和(3) 是发散的.

例 1　讨论数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$.

解　因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$，所以 $0 < \tan\theta < 1$，故有 $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n\theta = 0 \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$

注：当 $n \to \infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在有两种情况：

(1) 数列有界，但当 $n \to \infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 的通项取值在某固定的范围内振荡，如数列 $x_n = (-1)^{n+1}$；

(2) 数列无界，如数列 $x_n = n^2$.

1.2.2　函数的极限

1. 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x \to \infty$ 是指自变量 x 无限接近于 x 轴的两个无限端点，它包括两个方向：一个是沿着 x 轴的负向，这时自变量 x 取值为负且 $|x|$ 无限增大，记作 $x \to -\infty$；另一个是沿着 x 轴的正向，这时自变量 x 取值为正且 $|x|$ 无限增大，记作 $x \to +\infty$. 因此 $x \to \infty$ 是指同时考虑 $x \to -\infty$ 与 $x \to +\infty$，当然也可以单独考虑 $x \to -\infty$ 或 $x \to +\infty$.

若函数的定义区间为 $(-\infty, a)$ 或 $(-\infty, a]$，则只能考虑 $x \to -\infty$；若函数的定义区间为 $(b, +\infty)$ 或 $[b, +\infty)$，则只能考虑 $x \to +\infty$.

定义 1.9　如果当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$.

当 $x \to -\infty$ 与 $x \to +\infty$ 有相应的定义.

例如，函数 $y = \frac{1}{x}$ 有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$. 这两个极限值与 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ 相等，都是 0.

这就是说，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在并且相等，那么 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 也存在并且与它们相等. 显然，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 有一个不存在，或两个都存在但不相等，那么 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 不存在. 这个结论可表示为：

定理 1.1　极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

2. 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x \to x_0$ 是指自变量 x 无限接近于 x_0 点，它包括两个方向：一个是点 x 从点 x_0 的左方无限接近于点 x_0，记作 $x \to x_0^-$；另一个是点 x 从点 x_0 的右方无限接近于点 x_0，记作 $x \to x_0^+$. 因而 $x \to x_0$ 意味着同时考虑 $x \to x_0^-$ 和 $x \to x_0^+$，当然也可以单独考虑 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$. 但是，应特别注意的是：在 $x \to x_0$ 的过程中，点 x 始终不到达点 x_0，即始终有 $x \neq x_0$.

我们称满足不等式 $|x - x_0| < \delta(\delta > 0)$ 的所有实数为点 x_0 的 δ 邻域；称满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta(\delta > 0)$ 的所有实数为点 x_0 的空心 δ 邻域.

定义 1.10 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 δ 邻域内(x_0 可以除外)有定义. 如果当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 A，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

例如，当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 1 + x^2$ 的极限是1，可以记作$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(1 + x^2) = 1$ 或 $f(x) = 1 + x^2 \to 1(x \to 0)$

定义 1.11 如果当 $x \to x_0^-(x \to x_0^+)$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，则称当 $x \to x_0^-(x \to x_0^+)$ 时，函数 $f(x)$ 的左(右)极限为 A，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0^-)；\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0^+)$$

函数的左极限与右极限统称为单侧极限.

例如，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(1 + x^2) = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(1 + x^2) = 1$ 这两个极限值与 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(1 + x^2) = 1$ 相等，都是 1. 由此可得更一般的结论：

定理 1.2 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A(A 是常数)为极限的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限都存在且都等于 A. 即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

例 2 求符号函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

当 $x \to 0$ 时的左右极限，并讨论极限$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 是否存在.

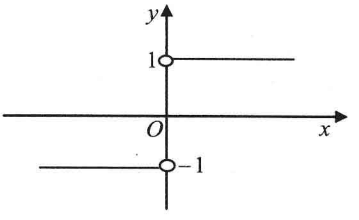

图 1.3

解 由图 1.3 可知

左极限为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(-1) = -1$

右极限为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$

因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以极限$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

例 3 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, x > 0 \\ k, x < 0 \end{cases}$，问当 k 为何值时，极限$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在？并

求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　因为
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}k=k$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^x=1$$
要使极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在,必须有
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}k=k=1$$
所以当 $k=1$ 时
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

注:定理 1.2 是判断分段函数在分界点处极限是否存在的有力工具.

1.2.3　无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

有一类函数在某个变化过程中其绝对值无限减小,即它的极限是 0,这样的函数我们称之为无穷小量.

定义 1.12　若函数 $y=f(x)$ 在 x 的某个变化过程中以 0 为极限,则称函数 $y=f(x)$ 是 x 的这种变化趋势下的无穷小量,简称无穷小.

例如,当 $x\to 0$ 时,x^2,$\sin x$,$\sqrt[3]{2x}$ 都是无穷小量;当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{n^2}$ 也是无穷小量.

无穷小量常用希腊字母 α,β,γ 等来表示.

注:(1) 说一个函数 $f(x)$ 是无穷小,必须指明自变量 x 的变化趋势,如 x^3+1 是当 $x\to -1$ 时的无穷小,但当 $x\to 0$ 时就不是无穷小.

(2) 不要把一个绝对值很小的数(如 10^{-100})说成是无穷小,因为这个数的极限不为 0.

(3) 数“0”可以看成是特殊的无穷小.

2. 无穷大量

定义 1.13　如果函数 $y=f(x)$ 的绝对值在自变量 x 的某一变化过程中无限增大,则称函数 $y=f(x)$ 为无穷大量,简称无穷大. 记作 $\lim f(x)=\infty$.

本来无穷大量的极限是不存在的,形式上称它的极限为无穷大.

注:(1) 说一个函数 $f(x)$ 是无穷大,必须指明自变量 x 的变化趋势,如$\dfrac{1}{x^3+1}$ 是当 $x\to -1$ 时的无穷大,但当 $x\to 0$ 时就不是无穷大.

(2) 不要把一个绝对值很大的数(如 10^{100})说成是无穷大,因为这个数的极限是常数.