

高中数学 检测评析

高中数学检测评析编写组 编

高中各科检测评析丛书

华中师范大学出版社

高中各科检测评析丛书

高中数学检测评析

高中数学检测评析编写组 编



华中师范大学出版社

鄂新登字11号

高中数学检测评析

《高中数学检测评析》编写组

*

华中师范大学出版社出版发行

(武昌桂子山)

新华书店湖北发行所经销

汉阳县印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张：13.125 字数：315千字

1992年9月第1版 1992年9月第1次印刷

ISBN 7-5622-0821-2/G·281

印数：1—30 500 定价：5.80

目 录

复习指导

- 一、浅析近七年高考数学试题……………刘汉文 (1)
- 二、选择题解题思路和方法……………赵大悌 (12)
- 三、填空题解题思路和方法……………沈海波 (27)
- 四、解答题解题思路和方法……………卞清胜 (40)
- 五、临考前的复习方法……………陈 喜 王祖祥 (55)

基础复习

- 六、幂函数、指数函数和对数函数……………叶家振 (72)
- 七、三角函数……………许泽民 (100)
- 八、两角和与差的三角函数……………许泽民 (119)
- 九、反三角函数和简单三角方程……………许泽民 (144)
- 十、不等式……………龙建华 (162)
- 十一、数列、极限与数学归纳法……………刘 辉 (186)
- 十二、复数……………兰天行 陈宽宗 (211)
- 十三、排列、组合与二项式定理……………易淑德 (237)
- 十四、直线与平面……………林仁斋 (251)
- 十五、多面体与旋转体……………瞿汉东 (269)
- 十六、直线和圆……………陈体国 (291)
- 十七、圆锥曲线……………项中心 (316)
- 十八、参数方程与极坐标……………陈体国 (343)

综合训练

- 综合训练题一……………王人伟 (361)
- 综合训练题二……………卞清胜 (365)
- 综合训练题三……………叶家振 (369)

附 练习题答案或提示

年度	题目个数	知识点个数
1985	17	61
1986	22	75
1987	21	74
1988	25	78
1989	24	80
1990	26	81
1991	26	83

从上表可以看出，近七年高考试题的题目总数由17道增加到26道。由于题目逐年增多，因而考查的知识点也逐年增多。1991年20道选择题和填空题，考查了54个知识点（还重复考查了8个知识点），全部26道试题，涉及到乙种本课本的13章35大节内容，没有偏弃任何一大节。全卷考查了83个知识点，其覆盖率达到71%。其中，直线和平面、圆锥曲线、复数、不等式、函数、两角和与差的三角函数等重要内容考查的知识点覆盖率均在75%以上；直线和平面这一章15个小节，仅有两个小节未考查到。

2. 从多方面突出对教材重点知识(含基本概念、基本运算、基本方法)的考查，做到重点知识重点考，不回避重点。第一，每年高考命题者一般把重点知识章节以及对今后学习极为有用的知识摆在大题的位置。例如，前三道大题，主要考查三角函数式的恒等变形和立体几何有关问题（主要涉及直线和平面）；其次是考查函数有关性质、不等式的解法、复数及数列等内容。这三道题，绝大多数是单科综合题。后三道大题，主要考查解析几何中的圆锥曲线（七年共有20道大题，解析几何占10道，多数是以代数综合题的形式出现的）和函数有关性质；其次是考查不等式、数列、复数等重点章节的内容。后三道大题中，多科综合题和字母讨论

题均占一定比例。在考查重要章节时，又特别突出了学科结构的本质部分。例如，立体几何主要突出线面间的垂直关系、异面直线、三垂线定理、二面角等；解析几何主要突出代数方程理论、参数与运动思想、形数结合思想、坐标法和待定系数的应用等。第二，在分数布局上也突出了重点内容（见下表）

1985—1991年高考数学试题（理科）各章分数统计表

分 数 内 容	年度							合计	占总分%
	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991		
函数(含集合)	21	20	8	19	20	15	16	119	14.17
三角函数	3	7	7	3	3	6	10	39	4.64
两角和与差的三角函数	3	10	10	14	9	12	6	64	7.62
反三角函数和三角方程	8	3	3	6	6	4	4	34	4.05
不等式	13	12	13	11	18	6	13	86	10.24
数列和数学归纳法	10	19	16	4	13	16	9	87	10.36
复数	12	7	12	10	3	15	8	67	8.00
排列组合 二项式定理	7	6	8	6	7	7	5	46	5.48
直线和平面	15	13	11	7	10	10	15	81	9.64
多面体和旋转体	3	4	6	10	10	9	7	49	5.83
直线	15	4	3	4	7	2	7	42	5.00
圆锥曲线 含充要条件	7	12	20	23	11	16	18	107	12.74
参数方程极坐标	3	3	3	3	3	2	2	19	2.26

从上表可以看出，七年试卷中各章按分数之和由多到少的前七章依次顺序是函数、圆锥曲线、数列、不等式、直线

和平面、两角和与差的三角函数、复数。这七章分数之和占七年总分数的73.57%，而这七章的课时仅占总课时的58.04%。第三，突出考查了重要的数学思想和方法。纵观近几年的高考题，可以这样说，每年的试题都把数学思想方法（特别是数学中的通性、通法）的考查贯穿于整个试卷，不仅大题重视考查数学思想方法，而且小题（选择题、填空题）也是如此。像方程、化归、等价转化、分类讨论等基本数学思想以及综合法、分析法、数形结合法、反证法、数学归纳法、待定系数法、换元法、配方法、坐标法、参数法等基本数学方法，几乎每年都要考查。特别是数形结合这种思想方法，不仅年年考，而且每年均有几道题涉及到它，少则三道，多则九道。例如，1991年试卷中的第(14)题，如果先画出圆 $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$ 和直线 $x + y + 1 = 0$ ，就容易想到用点到直线的距离公式计算出圆心 $(-1, -2)$ 到所给直线的距离为 $\sqrt{2}$ ，再根据半径的长，就能马上得到正确答案。若不然，用其它方法去解，那就麻烦多了。1991年试卷中第(2)、(5)、(6)、(8)、(11)、(13)等题，画出图象，运用数形结合的方法都有助于解题。

分类讨论思想越来越被重视。1991年同1990年相比，讨论层次略有降低，需要讨论的题目也略有减少，在这方面，1991年的试题是符合中学数学教学实际的。

为什么高考试题把数学思想方法作为考查的一个重要内容呢？这是因为：第一，基本数学思想和数学方法的培养，是提高学生分析问题和解决问题能力的必要条件。引导学生掌握了基本的数学思想方法，不仅是提高学生数学能力的有力措施，也是赠给学生终身受用的无价之宝。第二，基本的数学思想方法“学好了，学透了，对于进一步学好高等数学有帮助，甚至对认识数学的性质，也会有所裨益”。

从上述分析可以看出，近年来高考数学试题，既注意全面考查，又依据数学本身的特点，突出了重点，较好地处理了一般与重点的关系。这样做，既能系统全面地了解考生掌握数学知识的情况，又有利于高校选拔新生，更重要的是有利于促进中学数学教学按照大纲的要求、遵循教学规律、搞好平时教学，切实做到章章过关，段段过关，夯实基础。

(二) 坚持出活题、考基础、考能力，正确处理了知识与能力的关系。

自1984年以来，高考命题坚持贯彻“出活题、考基础、考能力”的方针，因而近几年高考数学试题有个显著的特点，即运用活题加强对双基和能力的考查，而不是“为活而活，为难而活”。高考出活题，首先是考查考生能否正确、熟练地掌握基础知识和基本技能，所以，对双基的考查除要求全面之外，还注重考查考生对双基的理解和掌握的准确性、熟练性、合理性和灵活性，即要求准确理解数学概念，熟练掌握常规解法，合理简捷地选择适当解（证）法，灵活地运用知识分析和解决问题。在这方面，选择题和填空题发挥了重要作用。例如，近两年的选择题，为了侧重考查考生对基本概念的理解和掌握程度，适当控制了计算，增加了选项的迷惑性和理解概念过程中的干扰因素。像1991年试卷的第(15)题，如果对交集、并集、补集的理解稍有一点含糊，就会发生错误；又如第(2)、(5)、(7)、(11)、(12)、(13)等9道题，也不需要计算，只要准确地、透彻地理解和掌握了一些基本概念、性质或画出图形，就很容易得知正确结论。而其余的六道题，计算量都很小，关键是对基本概念或性质的理解。像第(8)题，考生只要掌握了“等比中项”这个概念，就会立即得到 $(a_3 + a_6)^2 = 25$ 这个等式，正确答案就一目了然。

其次，近年来高考出活题，逐步提高了对能力的要求，并坚持按照教学大纲的要求，主要考查三项基本数学能力和综合运用基础知识分析和解决问题的能力。

关于运算能力，不仅重视考查准确性和熟练程度，而且对运算的合理性、完备性也提出了新要求。例如，1985—1991年，试卷中的41道大题，仅有1986年第三题和1988年第四题及1991年第(23)题（三道立体几何题）基本上不涉及运算，其余的38道题都需要一定的或较强的运算能力。1991年第(26)题是一道常规题，不仅题意易于理解，而且解题思路也十分明显，但得满分的人数极少，不少考生花一个多小时，只能得到3—6分。究其原因，是由于考生平时不注意运算的合理性，没有做到运算训练与思维方法相结合，在字母运算上没有从难从严要求，因而一遇到计算量较大的字母运算，或是因思维定势，盲目按照平时的习惯去演算，或是在方法上举棋不定，或是束手无策。

关于逻辑推理能力，一是重视了逻辑推理的合理性和思维的深刻性、灵活性的考查。近年来重视对参数进行分类讨论，其目的之一就是考查考生思维的条理性和严密性；二是加强综合性；三是将证明与运算融为一体。不少试题的解答，既要有计算，又要有论证，论证中有运算，运算又必须依赖于概念清晰和基本原理的正确运用，运算是含算理的推导过程。在这层意义上，试卷对学生严密的逻辑推理能力的要求是无处不存在的。1991年最后四道题则是最好的例证。

关于空间想象能力，首先重视空间图形的位置关系的考查，即要求学生在具有空间观念的基础上，能用图形来反映用语言或式子所表达的空间形状及位置关系。其次注意了观察、直觉思维能力和逻辑推理能力及论证与计算相结合能力的考查。例如，1991年试卷中的第(23)题，考生若能认真观

察、分析题目的条件，依据直觉思维得出 BD 平行于平面 EFG ，即 BD 和平面 EFG 的距离就是点 B 到平面 EFG 的距离，然后再去论证求解，就会目标明确，易于找到解题途径。

近几年高考试题注意从知识点的纵横联系中设计题目，在突出知识点的内在联系基础上考查综合运用知识分析问题的能力。许多题目都需要综合运用各种知识才能解决，就连一些小题也是多个知识的综合。如1991年试卷中的第(7)题，综合考查了立体几何和平面几何的基本知识，即考查了考生对三棱锥、二面角、平面角、射影和三角形的垂心、重心、外心、内心等概念的理解以及对三垂线定理、直角三角形全等判定定理的应用。第(26)题虽然运算有点偏繁，但综合考查了双曲线性质、两点间距离公式、两条直线垂直的条件和代数方程根与系数的关系等内容，并考查了待定的思想，因而，较好地考查了考生的运算能力和综合分析问题能力。

由此可见，近年来的高考数学试题，要求考生善于揭示各知识点的内在联系，在相互联系中掌握知识，从知识结构的整体出发，灵活地综合地运用知识解决问题。

由于日益重视灵活运用知识分析问题能力的考查，所以近年来试题的深度有所变化，主要表现在较为重视近代数学思想的渗透，命题的热点较为集中在动态性内容以及与高等数学联系紧密的知识点上（如函数性态、参数、变换、分类讨论、不等式、反证法和数学归纳法等）。

综上所述，近几年高考命题以大纲教材为依据，从出活题着手，既注意全面考查双基，又没有偏重于对基本知识与技能的再认和再现，避免了单纯知识型的考试。与此同时，注意着重考查能力，以能力区分不同层次的学生，正确处理了知识与能力的关系。这样，通过高考分出考生成绩的优

劣，既有利于选拔，又能促进中学数学教学深化改革，使教与学两个方面都“活”起来。

(三) 坚持了以“纲”为纲，以“本”为本，正确处理了试题源于课本与活于课本的关系。

近几年高考命题主要是从以下两个方面来处理这种关系的：

1. 考查的知识内容都是大纲规定的。近年来的高考试题，除个别题目（即1989年第(11)、(18)题）有争议外，其余均没有超过大纲的要求。近三年来，对数列和复数两部分容易膨胀内容的考查，也回到了教材的基本要求上来，对立体几何中的异面直线的距离和截面问题，也都是按照大纲（修订本）的要求考查的。1991年的试题更充分体现了以《数学科考试说明》（相当于考试大纲）为依据。

如前所述，在每年的试题中，重视概念及其应用，重视数学思想方法，重视全面考查双基，突出对重要知识点和重要章节的考查，加强对三项基本数学能力及灵活综合运用知识分析和解决问题的能力考查，等等，这些都是符合大纲中的教学目的和“教学中应注意的几个问题”的规定以及对各章的具体要求的。就连代数、解析几何、立体几何各部分试题所占的分数也与大纲规定的教学时数的比例大体相符（三角部分的分数略少一点）。

2. 试题一般源于题本。源于课本绝不是简单地重复和再现课本中的原题，而是在课本题目的内容和方法的基础上，从数学概念和方法的内涵和外延方面去发掘，将课本中原题改编、推广，或将课本中几道题串联综合为一题，或直接按照大纲和教材的要求编拟而成，即使较难的题目，有些也是在挖掘教材的基础上引伸出来的。例如，1991年试卷中的第(22)题是根据课本（乙种本）第154页19题与第157页例

2 综合改编而成。又如，1989年文理试题中的立体几何题是由课本（乙种本）第29页例1改编的。只不过是原来的三面角补成平行六面体，并增加了求体积的内容。近几年这类题较多，无需一一列举。

这里，将每年高考源于课本的个数和分数统计如下：

年度	选择填空题		解 答 题		源于课本 所占分数
	个数	源于课本个数	个数	源于课本个数	
1985	10	6	7	1	35
1986	16	6	6	3	52
1987	15	9	6	1	41
1988	20	12	5	2	60
1989	18	14	6	4	85
1990	20	7	6	3	51
1991	20	13	6	3	65

通过分析近年来高考试题，可以发现以下两点：第一，选择填空题中源于课本的题较多，源于课本的解答题一般作了较大的变形与修改，且在前三道大题的位置上。第二，三角题和立体几何题源于课本的较多。

（四）坚持从实际出发，正确处理了四度（难度、区分度、信度、效度）之间的关系。

近几年，全国考生280万左右，而大学招生约65万。这是一个预先计划确定的数字，不管试题是难是易，并不造成多取或少取一些学生。这样说来，试题的难易程度是否就无关紧要？当然不是。因为大专院校是通过高考来选拔优秀新生的，这就要求试题能够区分不同层次的学生，使不同水平考生的成绩落入合理的分数段。众所周知，特别容易和难度

很大的试题，其区分度都接近于零。因此，要使高考试卷具有一个恰当的区分度，就必须要求每道试题乃至整套试卷都有一个从易到难的合适难度。近几年高考命题的同志注意吸取以往的经验教训，坚持从“两个有利”出发，积极探索既符合我国中学数学教学实际又有利于实现考试标准化的命题规律，所以近几年的高考试题逐步做到了难易适度，基本形成了一个稳定性的风格。这里，顺便列出湖北和黄冈地区（每年约一万人参加考试）近几年理科高考人平数学成绩（见下表），以便从这个侧面看出每年试题整体上的难易程度及其变化趋势。

1985—1991年湖北和黄冈地区高考数学人平分统计表

平均分 年度	省地	
	湖 北	黄 冈
1985	69.68	78.3
1986	81.54	89.48
1987	74.74	82.83
1988	97.4	103.2
1989	73.8	78.41
1990	68.91	74.17
1991	76.25	82.29

从上述分析和广大师生的反映来看，1991年的试题，较1990年和1989年的试题略易，比1988年的试题略难，从整体难度上，作为全国这样一个大范围的选拔性的试题，是较为合适的。就全国平均水平而言，难度系数以0.58为宜，据有关部门统计，1991年试题的难度系数为0.57。因此，希望今

后的试题，既不要降低，也不要提高。如果再降低难度，就难以区分考生成绩的优劣，不利于高校选拔新生；如果又提高难度，就会脱离我国部分地区尤其是边远地区的教学实际。再者，高考试题的要求，就是对人才智力结构中的知识基础的要求，如果高考试题难度提高，就会导向中学教学向偏、深、难发展，就会耗费青少年大量精力，影响青少年身心健康，违背“德、智、体”全面发展的教育方针，这是一个关系到国家和民族兴旺发达的重大问题。

至于信度和效度，这是命题不可忽视的。信度是效度的必要条件，但不是充分条件。一份试卷过难或过易，就会使得分数的分布范围缩小，就会降低信度。通常所谓考试内容效度，就是指试卷考查内容对教学目标中的知识点和重要内容的覆盖率。近几年高考命题作了一些改进，诸如增加小题数量（主要是选择题），扩大考查的知识面，突出重点，并对选择题控制计算量，增加选项的迷惑性，等等，这些都有利于提高考试的信度和效度。1991年的试题，在这些方面，虽然没有做过多的调整，但在处理“四度”之间的关系上又前进了一步。

综上所述，近几年高考试题，坚持从实际出发，采取了一些有效措施，逐步使难易程度适当，又能区分不同层次的考生，并使考查内容的信度和效度有所提高；正确处理了四度之间的关系，较好地体现了“两个有利”的指导思想，为促进中学数学教学按照大纲要求把握难度和教学标高起到了积极作用，使考试与教学互相促进。

二、选择题解题思路和方法

选择题的特点在于：1. 给出了几个可供选择的结论；2. 不要求写出解题过程。这种特点，恰好为善于选择、思维具有跳跃性的学生提供了用武之地。又由于它的答案只是代表答案内容的A, B, C之类的字母，因此试题数量可以增加，覆盖面可以更广；加之阅卷的客观和迅速，使之成为各种考试中倍受欢迎的一种题型。

自1983年全国高考数学试题中出现选择题到1991年的九年中，前三年，每年选择题的数量是5个，近几年则达到了15个。数量上的变化，在一定程度上反映了这种题型所受到的重视。

如果以了解、理解、掌握、熟练掌握基础知识四个层次来看的话，1983~1990年六年的选择题中，了解层次的占32%左右，理解层次的约占59%，掌握层次的大致占9%。从中可以看出选择题更利于考查基础知识，而对一般考生来讲，基础知识部分的得分具有决定性的意义。所以，在牢固掌握基础知识的前提下，重视选择题的某些独特的解题思路和方法是十分必要的。

总的来看，选择题的解法无非是直接法和间接法两大类。遇到一个选择题，首先应该决定选用哪种方法。通常应该首选的是间接法。间接法中又应该首选哪种方法呢？我们认为，应该是特殊值法。下面，我们就从间接法、特殊值法开始，以历年高考题为例，介绍一下选择题的解题思路和方法。

(一) 间接法：历年来的高考题中给的都是“有且仅有一个答案是正确的”选择题。这类题，有时可以通过否定全部错误结论来肯定唯一正确的结论，这种方法称为间接法。

1. 特殊值法：对于在某一集合上的全称判断，可以通过特例的不真来否定它。解选择题时，可以通过某些特殊情况下的不正确来否定错误的选择项，这种方法叫特殊值法。

例1 极坐标方程 $\rho = a\sin\theta (a > 0)$ 的图象是()。

(1985年)

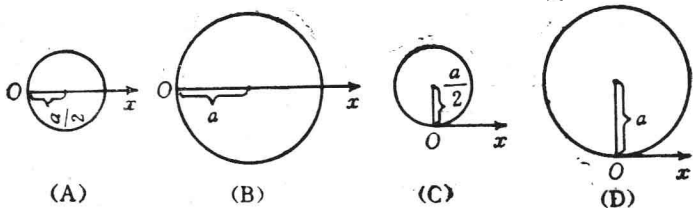


图 2-1

解 令 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，得 $\rho = a$ 。

考察(A)、(B)、(D)，三者 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时均不得 $\rho = a$ 。因此，这三个答案是错误的。于是(C)正确。

评析 (1) 特殊值的选择，应力求数值简单而有代表性。如，本题选 $\theta = 0$ ，可以否定(A)、(B)。那么，(D)还需再另想办法判断。显然不及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 有代表性。(2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $\rho = a$ ，恰与(C)吻合。那么，能否因此说(C)正确呢？不能！因为仅对特殊情况($\theta = \frac{\pi}{2}$)正确的事实，不能说明对任意 θ 值都正确。(C)之所以正确，是因为其余三个都是错误的结果。由此也可以看出，特殊值法是间接法的一种。(3)

极坐标的知识在历年的高考中，要求不高，多数在选择题中出现，如1985~1991年高考试题中连续7次出现。

例2 设 a, b 是满足 $ab < 0$ 的实数，那么()。

(1987年)

- (A) $|a+b| > |a-b|$ (B) $|a+b| < |a| - |b|$
 (C) $|a-b| < ||a| - |b||$ (D) $|a-b| < |a| + |b|$

解 令 $a=1, b=-1$ ，则四个答案变为

- (A) $0 > 2$ (B) $0 < 2$ (C) $2 < 0$ (D) $2 < 2$ 。

显然(A)、(C)、(D)错误，故(B)正确。

例3 函数 $y = \arccos(\cos x)$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)的图象

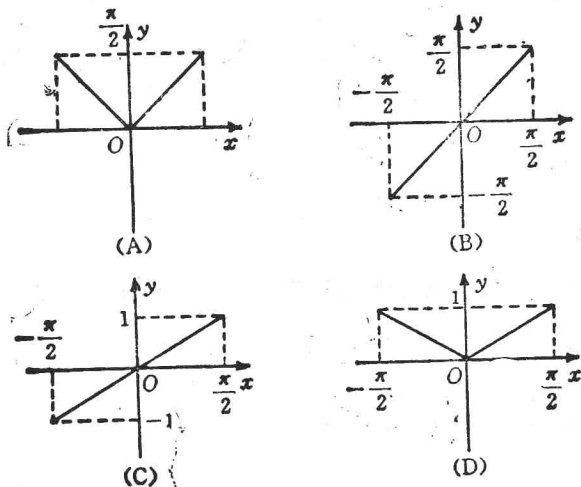


图 2-2

是()。(1987年)。

解 由于 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时，四个图象中的 y 值都不同，所以 $x = -\frac{\pi}{2}$ 的区别作用最强。因此，令 $x = -\frac{\pi}{2}$ ，得