固体力学及其应用

Solid Mechanics and Its Applications

——丁皓江论文选集

◎丁皓江 等著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

固体力学及其应用
——丁皓江论文选集

丁皓江　等著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

固体力学及其应用：丁皓江论文选集 / 丁皓江等著.
—杭州：浙江大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-308-11620-6

Ⅰ.①固… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①固体力学—文集
Ⅳ.①O34—53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 124258 号

固体力学及其应用——丁皓江论文选集

丁皓江　等著

责任编辑　樊晓燕(fxy@zju.edu.cn)
封面设计　李　陈
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州中大图文设计有限公司
印　　刷　浙江省邮电印刷股份有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　34.5
字　　数　1120 千
版 印 次　2013 年 7 月第 1 版　2013 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-11620-6
定　　价　98.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式：0571—88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

丁皓江简历

1934 年 8 月 15 日	出生于江苏省常州市
1953—1957 年	北京大学数学力学系学习并毕业
1957—1985 年	浙江大学助教、讲师、副教授
1985—1995 年	浙江大学力学系教授
1995—现在	浙江大学土木系教授
1990—现在	浙江大学固体力学专业博士生导师，2002 年后兼工程力学专业博士生导师
1984—1992 年	浙江大学力学系系主任
1990—1995 年	国家教委工程力学教学指导委员会委员
1990—1998 年	中国力学学会常务理事，中国力学学会教育工作委员会副主任
1998—2002 年	中国力学学会理事，浙江省力学学会理事长

参加过国家自然科学基金重大项目一项、重点项目二项，主持国家自然科学基金面上项目五项。在各向异性弹性力学和压电体弹性力学领域取得了一批创新理论成果，涉及通解、Green 函数、接触和断裂、板壳的解析解、热应力、状态空间法、边界元法、有限元法和加权残值法、压电弹性力学和功能梯度材料力学等。已经发表论文 300 余篇，其中 SCI 收录论文 180 多篇，他引超过 1800 次。

1992 年获国家教委优秀教学奖二等奖（教材 3），1992 年获浙江省优秀教学成果二等奖。2000 年获 ISI 颁发的经典引文奖（Citation Classic Award）。2001 年获中国高校自然科学奖二等奖。2005 年获浙江大学竺可桢奖。2012 年获高等学校科学研究优秀成果奖（自然科学奖）二等奖。

已培养博士 21 名和硕士 34 名，现仍在培养博士生，并继续在压电压磁弹性力学，功能梯度弹性力学和各向异性弹性动力学方面开展工作。

先后讲授过理论力学、工程力学、弹性力学、有限单元法、变分原理等本科生和研究生的课程。

参加编写的教材有：

- 《理论力学上册（大学时）》，作者为谢贻权、蔡承文、费学博、庄表中、王家詠、丁皓江，人民教育出版社 1961 年出版。
- 《理论力学（小学时）》，作者为蔡承文、费学博、丁皓江，人民教育出版社 1962 年出版。
- 《弹性和塑性力学中的有限单元法》，作者为丁皓江、何福保、谢贻权、徐兴，机械工业出版社 1989 年出版。
- 《弹性力学》，作者为谢贻权、林钟祥、丁皓江，浙江大学出版社 1988 年出版。
- 《现代固体力学理论及应用》，作者为许金泉、丁皓江，浙江大学出版社 1997 年出版。

出版专著有：

• 《横观各向同性弹性力学》，丁皓江等著，浙江大学出版社 1997 年出版。

• Three Dimensional Problems of Piezoelasticity, H. J. Ding and W. Q. Chen, New York: Nova Science Publishers Inc, 2001.

• Elasticity of Transversely Isotropic Materials, H. J. Ding, W. Q. Chen and L. C. Zhang, Dordrecht: Springerverlag, 2006.

前　言

固体力学是力学学科的一个重要分支，主要关注固体介质及其结构系统的变形、运动、破坏、生长等现象，研究其机理，揭示其效应，从而为各类应用提供理论依据和分析方法。随着社会的发展和科技的进步，固体力学所研究的对象、采用的方法以及涉及的知识体系都发生了重大变化，与材料、物理、生物、化学、医学等学科的融合日益紧密，学科交叉特征更加明显。

丁皓江先生是我国著名力学家，1957 年本科毕业于北京大学数学力学系，同年到浙江大学工作直至 2005 年退休，期间 1984 年 4 月至 1992 年 9 月担任浙江大学力学系主任。他长期从事固体力学的研究与教学工作，不仅在国内外同行中产生重要的学术影响，也培养了一大批高素质人才。在近五十年的学者生涯中，他的研究涉及各向异性弹性力学、计算力学、多场耦合力学、非均质材料力学等多个方向，都属于固体力学当时的研究热点，体现了他对研究现状的敏锐把握能力。1990 年前后，他的研究重点转移到解析分析，更是充分发挥其特长，在压电弹性力学和非均质材料力学方面取得了系统而深入的研究成果，其中"横观各向同性压电弹性力学"获 2001 年度中国高校自然科学奖二等奖，"多功能非均匀材料结构力学性能研究"获 2012 年度高等学校科学研究优秀成果奖(自然科学奖)二等奖。

在丁皓江教授八十寿辰之际，我们从丁皓江教授迄今为止发表的 310 余篇期刊论文中精选了 39 篇论文，编撰成集。这些论文的选取按照如下原则：(1)成果的创新性；(2)合作者的典型性；(3)时间的代表性。我们深信这些论文具有长久的学术生命力，不仅可供研究者参考，也可供相关专业的教学采用。在丁皓江教授所发表的论文中，有一些曾获得国际性学术奖励，如本选集的第 20 篇论文曾于 2000 年获颁 ISI 的"Citation Classic Award"(经典引文奖)。

本选集的顺利出版得到了多方面的大力支持。首先感谢国家自然科学基金委对丁皓江教授及其课题组的长期持续资助，这对从事基础研究的学者而言是最为重要的保障，是本次选集得以出版的力量之源。其次，感谢浙江大学一直以来对丁皓江教授工作的支持，有了几十年稳定的工作，才能全身心投入教书育人。特别要感谢浙江大学出版社的樊晓燕博士，她的热情帮助是促成本选集最终面世的关键。最后，衷心感谢丁皓江教授的合作者和为了本选集出版而辛勤工作的多位研究生，他们是刘东滢、王治、袁江宏、刘承斌、张文靓、伍斌、顾永超、韦永康、杨静、赵志城、屠海滨、陈奕声、苏益品、苏俊杰、潘剑超、秦勃、邹龙、周伟建、鲍光建、雷鸣、杨骞、徐泽龙、曲哲。

"桃李不言，下自成蹊"，是为记。

浙江大学力学系

2013 年 3 月 30 日

目　录

用余弦变换法求梁自由振动频率①

丁皓江

（浙江大学数学力学系）

1. 引　言

考虑转动和剪切力影响的梁振动问题，通常称为铁摩辛柯（S. Timoshenko）梁的振动问题。在各种边界条件下，它的频率方程均已求出，除简支梁有切实可行的公式和相当数据外[2,5]，其他支承情形由于频率方程的复杂性，要从中算出自由振动频率是不很容易的，因而就需要采用近似方法来算出工程上最感兴趣的最低频率。

本文的主旨是采用余弦变换的方法，求得一个级数形式的频率方程，使其在固定和自由两种边界条件下收敛性相当好。本文还定性地讨论了五种支承情形，得到了一些结论。最后对余弦变换方法进行了讨论。

2. 铁摩辛柯梁的运动方程和边界条件

文中基本上采用 A. П. Филиппов 书中的符号[1]。该书中给出的铁摩辛柯梁的运动方程为

$$\mu F\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-k'FG\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)=q(x,t) \tag{1}$$

$$EJ\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+k'FG\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\Psi\right)-\mu J\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0 \tag{2}$$

当 $q(x,t)=0$ 时，该运动方式为自由振动，并有关系式：

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\Psi-\theta;\quad M=-EJ\,\frac{\partial\Psi}{\partial x};\quad Q=k'FG\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\Psi\right) \tag{3}$$

而 $k'=\dfrac{1}{k}$，k 按照下列公式计算：

$$k=\frac{E}{J^2}\int\frac{S^2(y)}{b(y)}\mathrm{d}y$$

系数 k 在矩形截面时是 1.2。

边界条件：

---

① 本文是作者在胡海昌副研究员指导下完成的毕业论文的一部分。本文原载：浙江大学学报，1959(4)：122－131。

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{(a)}\ y=0,\quad M=0 & \text{对于}\ x=0\ \text{或}\ x=l\text{——简支端} \\
\text{(b)}\ M=0,\quad Q=0 & \text{对于}\ x=0\ \text{或}\ x=l\text{——自由端} \\
\left.\begin{array}{l}\text{(c)}\ y=0,\quad \Psi=0 \\ \text{(d)}\ y=0,\quad \dfrac{\partial y}{\partial x}=0\end{array}\right\} & \text{对于}\ x=0\ \text{或}\ x=l\text{——固定端}
\end{array}\right. \tag{4}$$

下面讨论自由振动。从式(1)、(2)中消去 Ψ 则得到

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\mu F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\left(\mu J+\frac{\mu EJ}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{\mu^2 J}{k'G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0 \tag{5}$$

从两式中消去 y，得到同样的方程式

$$EJ\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4}+\mu F\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}-\left(\mu J+\frac{\mu EJ}{k'G}\right)\frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^2\partial x^2}+\frac{\mu^2 J}{k'G}\frac{\partial^4 \Psi}{\partial t^4}=0 \tag{6}$$

设 $y=Y(x)T(t)$， $\Psi=\Psi(x)T(t)$， $T(t)=B\sin\omega t$，令 $\xi=\dfrac{x\pi}{l}$，使其无因次化，则式(5)化为

$$\frac{d^4 Y}{d\xi^4}+b_2\frac{d^2 Y}{d\xi^2}-b_0\beta^2 Y=0 \tag{7}$$

式中：

$$\begin{aligned}
&\beta^2=\frac{\omega^2 l^4}{\delta^2\pi^4};\quad \delta=\frac{EJ}{\mu F};\quad b_2=\frac{\beta^2\pi^2}{\lambda^2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right);\\
&b_0=1-\frac{\beta^2\pi^4}{\alpha^2\lambda^4};\quad \alpha^2=\frac{k'G}{E};\quad \lambda^2=\frac{l^2}{K^2}=\frac{l^2F}{J}
\end{aligned} \tag{8}$$

振动频率：

$$\omega=\beta\pi^2\sqrt{\frac{EJ}{\mu F l^4}}$$

并有关系式：

$$\begin{aligned}
&\Psi=\frac{\pi^3}{b_0\alpha^2\lambda^2 l}\left[\frac{d^3Y}{d\xi^3}+\left(\frac{\alpha^2\lambda^4}{\pi^4}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{dY}{d\xi}\right];\\
&\frac{\pi}{l}\frac{d\Psi}{d\xi}=-\frac{M}{EJ}=\frac{\pi^2}{l^2}\left[\frac{d^2Y}{d\xi^2}+\frac{\beta^2\pi^2}{\alpha^2\lambda^2}Y\right];\\
&Q=-\frac{EJ\pi^3}{b_0 l^3}\left[\frac{d^3Y}{d\xi^3}+b_2\frac{dY}{d\xi}\right]
\end{aligned} \tag{9}$$

边界条件：

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{(a)}\quad Y=0,\quad \dfrac{d^2Y}{d\xi^2}=0 & & \text{对于}\ \xi=0\ \text{或}\ \xi=\pi \\
\text{(b)}\quad \dfrac{d^2Y}{d\xi^2}+\dfrac{\beta^2\pi^2}{\alpha^2\lambda^2}Y=0,\quad \dfrac{d^3Y}{d\xi^3}+b_2\dfrac{dY}{d\xi}=0 & & \text{对于}\ \xi=0\ \text{或}\ \xi=\pi \\
\left.\begin{array}{l}\text{(c)}\quad Y=0,\quad \dfrac{d^3Y}{d\xi^3}+\left(\dfrac{\alpha^2\lambda^4}{\pi^4}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\dfrac{dY}{d\xi}=0 \\ \text{(d)}\quad Y=0,\quad \dfrac{dY}{d\xi}=0\end{array}\right\} & & \text{对于}\ \xi=0\ \text{或}\ \xi=\pi
\end{array}\right. \tag{10}$$

其次式(6)可化为下式

$$\frac{d^4 \Psi}{d\xi^4}+b_2\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2}-b_0\beta^2 \Psi=0 \tag{11}$$

并有关系式：

$$\begin{aligned}
&Y = \frac{l}{\pi}\left[\frac{l^2}{\pi^2}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{\beta^2}\frac{\mathrm{d}^3\Psi}{\mathrm{d}\xi^3}\right];\\
&\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\xi} = \frac{l}{\pi}\left[b_0\Psi - \frac{\pi^2}{\alpha^2\lambda^2}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2}\right];\\
&-\frac{M}{EJ} = \frac{\pi}{l}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi};\\
&Q = -\frac{\pi^3}{\alpha^2\lambda^2}\left[\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi + \frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2}\right]
\end{aligned}\tag{12}$$

式(10)和(12)中的 M、Q 只是 ξ 的函数，真正的还应乘上 $T(t)$。

边界条件：

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \frac{\mathrm{d}^3\Psi}{\mathrm{d}\xi^3} + \frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} = 0,\quad \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} = 0 \qquad \text{对于 } \xi = 0 \text{ 或 } \xi = \pi\\
&\text{(b)}\ \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} = 0,\quad \frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi = 0 \qquad \text{对于 } \xi = 0 \text{ 或 } \xi = \pi\\
&\text{(c)}\ \frac{\mathrm{d}^3\Psi}{\mathrm{d}\xi^3} + \frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} = 0,\quad \Psi = 0 \qquad \text{对于 } \xi = 0 \text{ 或 } \xi = \pi\\
&\text{(d)}\ \frac{\mathrm{d}^3\Psi}{\mathrm{d}\xi^3} + \frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi} = 0,\quad b_0\Psi - \frac{\pi^2}{\alpha^2\lambda^2}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} = 0 \qquad \text{对于 } \xi = 0 \text{ 或 } \xi = \pi
\end{aligned}\tag{13}$$

在解决自由振动问题时有三组方程可用，第一组是式(2)、(3)和(4)；第二组是式(7)和(10)；第三组是式(11)和(13)。随边界条件而选用各组方程。下面我们讨论除简支之外其他各种边界条件组合的各种情形。

3. 余弦变换解法

积分

$$C_n[f(\xi)] = \int_0^\pi f(\xi)\cos n\xi\,\mathrm{d}\xi = V(n),\quad (n = 0,1,2,\cdots)\tag{14}$$

称为函数 $f(\xi)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的余弦变换。$V(n)$ 和 $f(\xi)$ 在余弦富氏级数展开式

$$f(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\xi\tag{15}$$

中的系数 a_n 的关系如下：

$$a_n = \frac{2}{\pi}V(n)\tag{16}$$

故

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi}V(0) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}V(n)\cos n\xi\tag{17}$$

今考虑如此问题，两端边界条件暂且不定。

方程是

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}\xi^4} + b_2\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2} - b_0\beta^2 w = 0\tag{18}$$

用余弦变换

$$C_n[w(\xi)]=\int_0^\pi w(\xi)\cos n\xi \mathrm{d}\xi = V(n),\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{19}$$

用分部积分法得

$$\begin{aligned}C_n\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2}\right] &= \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2}\cos n\xi \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi}\cos n\xi\Big|_0^\pi + n\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi}\cos n\xi \mathrm{d}\xi \\ &= [(-1)^n w'(\pi)-w'(0)] - nw\sin n\xi\Big|_0^\pi - n^2\int_0^\pi w\cos n\xi \mathrm{d}\xi \\ &= [(-1)^n w'(\pi)-w'(0)] - n^2 V(n)\qquad (n=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}C_n\left[\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}\xi^4}\right] &= \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}\xi^4}\cos n\xi \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}\xi^3}\cos n\xi\Big|_0^\pi + n\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}\xi^3}\sin n\xi \mathrm{d}\xi \\ &= [(-1)^n w'''(\pi)-w'''(0)] - n\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2}\sin n\xi\Big|_0^\pi - n^2\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\xi^2}\cos n\xi \mathrm{d}\xi \\ &= [(-1)^n w'''(\pi)-w'''(0)] - n^2[(-1)^n w'(\pi)-w'(0)] + n^2 V(n) \\ &(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{21}$$

故方程式(18)化为

$$\begin{aligned}&[(-1)^n w'''(\pi)-w'''(0)] - n^2[(-1)^n w'(\pi)-w'(0)] + n^4 V(n) \\ &\quad + b_2[(-1)^n w'(\pi)-w'(0)] - b_2 n^2 V(n) - b_0\beta^2 V(n) = 0\quad (n=0,1,2,\cdots)\end{aligned} \tag{22}$$

若 $w=Y$ 或 $w=\Psi$，则方程式(22)就变为方程式(7)或方程式(11)的余弦变换式。

1. 两端固定(边界条件 d)

用方程式(7)的余弦变换式，则有

$$Y'(0)=Y'(\pi)=0,\quad Y'=Y(\pi)=0$$

(a)对称振动形式，有 $Y'''(\pi)=-Y'''(0)$，此时(22)式变为

$$V(n)(n^4-n^2 b_2-b_0\beta^2)=Y'''(0)[1+(-1)^n]\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

即

$$V(n)=\frac{2Y'''(0)}{n^4-n^2 b_2-b_0\beta^2}\quad (n=0,2,4,\cdots) \tag{23}$$

故

$$Y(\xi)=-\frac{4}{\pi}Y'''(0)\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}-\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{n^4-n^2 b_2-b_0\beta^2}\right] \tag{24}$$

利用边界条件 $Y(0)=0$，得频率方程

$$-\frac{1}{2b_0\beta^2}+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4-n^2 b_2-b_0\beta^2}=0$$

加减 $\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{1440}$ 得

$$\frac{\pi^4}{1440}-\frac{1}{2b_0\beta^2}+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{n^2 b_2+b_0\beta^2}{n^4(n^4-n^2 b_2-b_0\beta^2)}=0 \tag{25}$$

用试算法求近似值取二、三项就够了。

(b)反对称振动形式，有 $Y'''(\pi)=Y'''(0)$，此时(22)式变为

$$V(n)=\frac{2Y'''(0)}{n^4-n^2b_2-b_0\beta^2}\quad(n=1,3,\cdots)\tag{26}$$

故

$$Y(\xi)=\frac{4}{\pi}Y'''(0)\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{n^4-n^2b_2-b_0\beta^2}\tag{27}$$

利用边界条件 $Y(0)=0$，并加减 $\sum\limits_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$，得频率方程

$$\frac{\pi^4}{96}+\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n^2b_2+b_0\beta^2}{n^4(n^4-n^2b_2-b_0\beta^2)}=0\tag{28}$$

用试算法求近似值取二、三项就够了。

2. 一端固定，一端简支(边界条件 d、a)

只需在(28)式中换 l 为 $2l$ 即可。

3. 两端固定(边界条件 c)

用方程式(11)，则有

$$\Psi(0)=\Psi(\pi)=0;\quad \Psi'''(0)=-\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi'(0);\quad \Psi'''(\pi)=-\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi'(\pi)$$

(a)对称振动形式，有 $\Psi'(0)=\Psi'(\pi)$，$\Psi'''(0)=\Psi'''(\pi)$。则方程式(22)变为

$$V(n)(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)=[1-(-1)^n]\left(b_2-\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}-n^2\right)\Psi'(0)\ (n=0,1,2,\cdots)$$

即

$$V(n)=-\frac{2\left(n^2+\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}-b_2\right)\Psi'(0)}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\quad(n=1,3,\cdots)\tag{29}$$

故

$$\Psi(\xi)=-\frac{4}{\pi}\Psi'(0)\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n^2+\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}-b_2}{n^4-n^2b_2-b_0\beta^2}\cos n\xi\tag{30}$$

利用边界条件 $\Psi(0)=0$ 得频率方程

$$\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{n^2+\frac{\pi^2}{\lambda^2}\beta^2-b_2}{n^4-n^2b_2-b_0\beta^2}=0$$

加减 $\sum\limits_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$，得

$$\frac{\pi^2}{8}+\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}n^2+b_0\beta^2}{n^2(n^4-n^2b_2-b_0\beta^2)}=0\tag{31}$$

(b)反对称振动形式，有 $\Psi'(0)=-\Psi'(\pi)$，$\Psi'''(0)=-\Psi'''(\pi)$，再利用边界条件 $\Psi(0)=0$，并加减 $\sum\limits_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{24}$ 得频率方程

$$\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi^2}{2b_0\alpha^2\lambda^2}+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}n^2+b_0\beta^2}{n^2(n^4-n^2b_2-b_0\beta^2)}=0\tag{32}$$

式(31)、(32)两级数取前三、四项进行试算即可。

4. 一端固定，一端简支(边界条件 c、d)

只需在式(32)中换 l 为 $2l$。

5. 两端自由

用方程式(11)，则有 $\Psi'(0)=\Psi'(\pi)=0$； $\dfrac{d^2\Psi}{d\xi^2}+\dfrac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi=0$，对于 $\xi=0$ 和 $\xi=\pi$。

(a)对称振动形式，有 $\Psi'''(0)=\Psi'''(\pi)$，则(22)式变为

$$V(n)(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)=\Psi'''(0)[1-(-1)^n]\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

即

$$V(n)=\frac{2\Psi'''(0)}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\quad(n=1,3,\cdots)\tag{33}$$

故

$$\Psi(\xi)=\frac{4}{\pi}\Psi'''(0)\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{n^4-n^2b_2-b_0\beta^2}\tag{34}$$

利用边界条件 $\dfrac{d^3\Psi(0)}{d\xi^3}+\dfrac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi(0)=0$，并改进收敛性后得到频率方程

$$\frac{\pi}{8}+\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\dfrac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}n^2+b_0\beta^2}{n^2(n^4-n^2b_2-b_0\beta^2)}=0\tag{35}$$

(b)反对称振动形式，有 $\Psi'''(0)=-\Psi'''(\pi)$，则频率方程为

$$\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi^2}{2b_0\lambda^2}+\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{\dfrac{\pi^2\beta^2}{\alpha^2\lambda^2}n^2+b_0\beta^2}{n^2(n^4-n^2b_2-b_0\beta^2)}=0\tag{36}$$

式(35)、(36)两级数取前三、四项进行试算即可。

6. 一端自由，一端简支

只需在式(36)中换 l 为 $2l$。

7. 一端固支，一端自由

用方程式(11)。

(A)边界条件(c)和边界条件(b)，有 $\Psi(0)=0$， $\Psi'''(0)=-\dfrac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi(0)$；$\Psi'(\pi)=0$，$\Psi''(\pi)=-\dfrac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi(\pi)$。则方程式(22)变为

$$V(n)=\frac{(-1)^{n+1}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\Psi'''(\pi)+\frac{n^2+\dfrac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}-2}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\Psi'(0)\quad(n=0,1,2,\cdots)\tag{37}$$

故

$$\Psi(\xi)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\Psi'''(\pi)}{b_0\beta^2}+\frac{\pi^2}{b_0\alpha^2\lambda^2}\Psi'(0)\right]+\Psi'''(\pi)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\cos n\xi$$

$$-\frac{2}{\pi}\Psi'(0)\sum_{n=6}^{\infty}\frac{n^2-\frac{\pi^2\beta^2}{\alpha^2\lambda^2}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\cos n\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\Psi'''(\pi)\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\cos n\xi\right]$$

$$-\frac{2}{\pi}\Psi'(0)\left[\frac{\pi^2}{b_0\alpha\beta^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\pi^2\beta^2}{\alpha^2\lambda^2}n^2+b_0\beta^2}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\cos n\xi\right] \tag{38}$$

而将 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\xi}{n^2}=\frac{3\xi^2-(\pi\xi+2\pi^2)}{12}$ $(0\leqslant\xi\leqslant 2\pi)$ 代入(38)式中，再利用边界条件 $\Psi(0)=0,\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}+\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\Psi=0$ 得到

$$\Psi'''(\pi)\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\right]-$$

$$\Psi'(0)\left[\frac{\pi^2}{b_0\alpha^2\lambda^2}+\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}+b_0\beta^2}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\right]=0;$$

$$\Psi'''(\pi)\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\frac{b_2\beta^2}{\lambda^2}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\right]$$

$$-\ \Psi'(0)\left[\frac{\pi^2}{b_0\alpha^2\lambda^2}+\frac{6-\frac{\pi^4\beta^2}{\lambda^2}}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(n^2-\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}n^2+b_0\beta^2\right)}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\right]=\ 0;$$

$\Psi'''(\pi)$， $\Psi'(0)$ 不为零，故行列式等于零可得频率方程

$$\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\right]$$

$$\left[\frac{\pi^4\beta^2}{b_0\alpha^2\lambda^2}+\frac{6-\frac{\pi^4\beta^2}{\lambda^2}}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(n^2-\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}n^2+b_0\beta^2\right)}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\right]$$

$$-\left[\frac{\pi^2}{b_0\alpha^2\lambda^2}+\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\pi^2\beta^2}{\alpha^2\lambda^2}+b_0\beta^2}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\right]\left[\frac{\pi^2}{2b_0\lambda^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\right]=0 \tag{39}$$

计算时还可改进一些收敛性。

(B)边界条件(d)和边界条件(b)，类似(A)的做法，得到频率方程：

$$\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}\left(b_0-\frac{\pi^2}{\alpha^2\lambda^2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(b_0+\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2\lambda^2}\right)}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\right]$$

$$\times\left[\frac{\pi^4\beta^2}{b_0\alpha^2\lambda^4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi^4\beta^2}{12\lambda^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(n^2-\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}n^2+b_0\beta^2\right)}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\right]$$

$$-\left[\frac{\pi^2}{b_0\alpha^2\lambda^2}\left(b_0-\frac{\pi^2}{\alpha^2\lambda^2}\right)+\frac{b_0\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{2\alpha^2\lambda^{42}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(b_0+\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2\lambda^2}\right)\left(\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}n^2+b_0\beta^2\right)}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-\frac{\pi^2\beta^2}{\lambda^2}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\right]=0 \tag{40}$$

8. 两端固支(边界条件(c)和边界条件(d))

用方程式(7),类似于上面的做法,得到频率方程式

$$\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\right]\times\left[\frac{b_2-A_1}{2b_0\beta^2}-\frac{\pi^2}{12}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{A_1n^2+b_0\beta^2}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\right]$$
$$-\left[\frac{b_0-A_1}{2b_0\beta^2}+\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{A_1n^2+b_0\beta^2}{n^2(n^4-b_2n^2-b_0\beta^2)}\right]$$
$$\times\left[\frac{1}{2b_0\beta^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4-b_2n^2-b_0\beta^2}\right]=0 \tag{41}$$

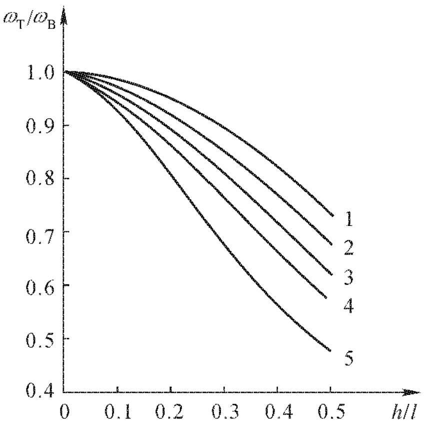
式中:

$$A_1=\frac{\pi^2}{\lambda^2}\left(\frac{\alpha^2\lambda^4}{\pi^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$

为了进行定性的分析,取级数(31)、(32)、(35)和(36)的前两项来试算。对于矩形截面,并取泊松比$\nu=0.3$,将计算的结果绘制在图上,图中的h是梁高,l是梁长,ω_T代表铁摩辛柯梁的最低频率,ω_B通常称为柏努利梁的最低频率。

我们容易证明各曲线在零点有水平切线。各种支承情形的曲线都是单调下降,因此短而高的梁尤其需用铁摩辛柯梁的理论。由图还可看出,各种支承情形,转动和剪切力的影响不同,两端简支最小,自由端次之,而固定端影响最大。能预计到悬臂梁公式(39)的曲线应在4、5之间。

最后可以指出,胡海昌老师在文献[6]中所提出的,用支座反力作首先欲决定的未知量的方法,从数学上来看,可从余弦变换的观点来讨论,作者已证明了这一点。在板的问题,需要采用双重余弦变换。此方法也可应用来解矩形板和圆柱壳的平衡、稳定及振动问题。



1—两端简支;2—一端简支,一端自由;3—两端自由;4—一端自由,一端固定;5—两端固定。

参考文献(略)