普通高等教育
软件工程“十二五”规划教材

12th Five-Year Plan Textbooks
of Software Engineering

离散数学

郝晓燕 ◎ 主编
王华 李誌 ◎ 副主编

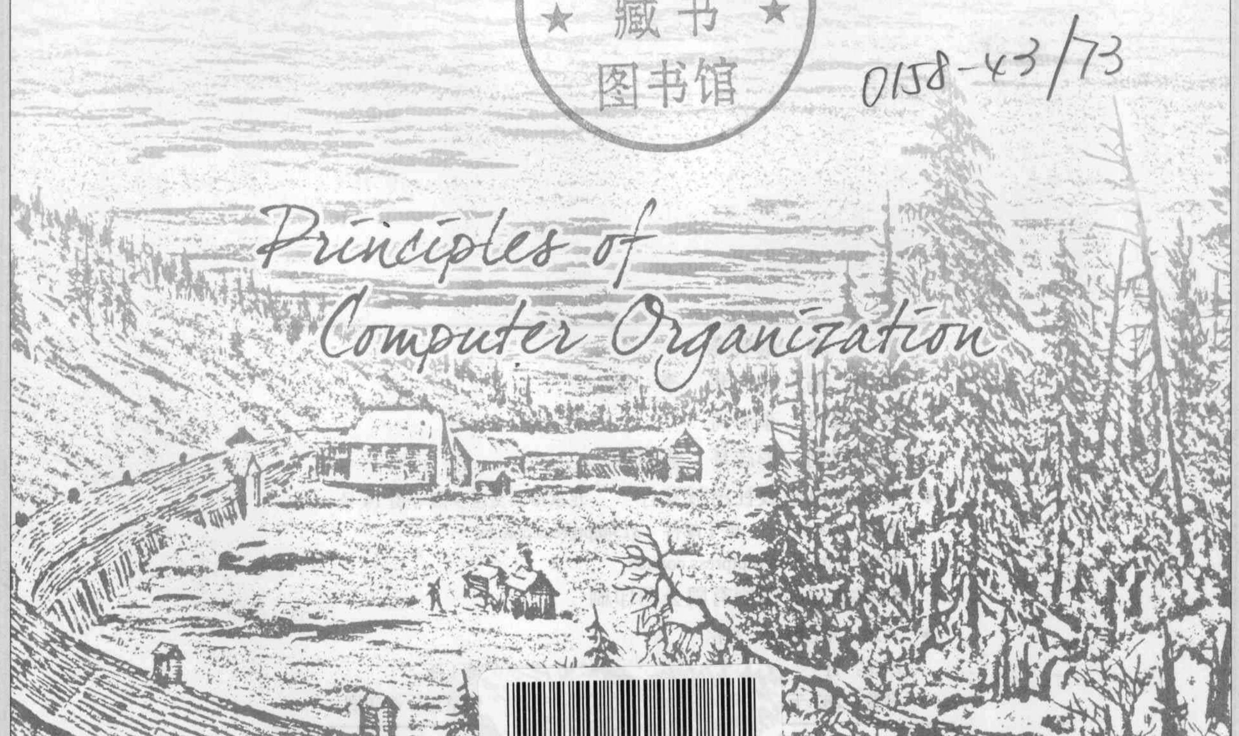
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

普通高等教育**软件工程**“十二五”规划教材

12th Five-Year Plan Textbooks of Software Engineering

离散数学

郝晓燕 ◎ 主编
王华 李誌 ◎ 副主编



人民邮电出版社
北京

图书在版编目（C I P）数据

离散数学 / 郝晓燕主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2013.9
普通高等教育软件工程“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-32495-5

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①郝… Ⅲ. ①离散数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第187065号

内 容 提 要

本书介绍计算机专业必需的离散数学基础知识，包括离散数学四大分支的基础理论，它们是数理逻辑、集合论、代数系统和图论，共8章，依次为命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、代数结构、格与布尔代数、图论及其应用。本书包含较多的与计算机科学和工程有关的例题和习题。

本书适合作为高等理工科院校计算机科学与技术、软件工程等相关专业教材，也可供教师、研究生、有关工程技术人员作为参考书。

◆ 主　　编　郝晓燕
副 主 编　王　华　李　誌
责任编辑　李海涛
责任印制　彭志环　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：11　　　　　　　　2013年9月第1版
字数：282千字　　　　　　2013年9月北京第1次印刷

定价：29.80元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，主要研究离散对象及其相互间的关系。离散数学课程所涉及的概念、方法和理论，广泛地体现在计算机科学技术及相关专业的各个领域。通过课程的学习，一方面有益于培养和提高学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、归纳构造能力；有益于培养学生严谨、完整、规范的科学态度。另一方面，它给后继课程，如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能等提供必要的数学基础。正因为如此，离散数学在国际上已受到高度重视，在我国也已经成为高等院校许多理工科专业的重要基础课，尤其是计算机相关专业。

离散数学作为计算机专业的主干课程，不仅是一门服务于专业的工具性学科，而且也是一门培养学生具有良好的抽象思维和逻辑思维能力的核心基础课程，其重要性不言而喻。为了适应新型的教学要求，我们编写了《离散数学》一书。在编写时理论紧密联系实际，摒弃一些繁琐的定理证明，从工程实际出发引入工程案例和解决方案，更注重的是加强学习者的应用模拟解题技巧，力求做到脉络清晰，重点突出，精讲多练，实用有效，从而培养学生抽象思维和缜密概括的能力。

本书内容包括离散数学四大分支的基础理论，它们是数理逻辑、集合论、代数系统和图论。考虑到组合数学、可计算性理论常被独立选作计算机科学与技术专业的专业选修课，因此本书没有涉及此部分内容。本书共分 8 章，依次为命题逻辑、谓词逻辑、集合、关系、函数、代数结构、格与布尔代数、图论及其应用。

本教材特色表现在四个方面。第一，加深理论，注重实践。大多数离散数学的教材，只注重经典的数学理论和解题，没有联系生产实践，学习者感觉理论抽象、枯燥。本教材结合计算机专业的学习特点，在相应章节的例题或课后习题中编排了将离散结构理论与实际工程问题相结合的题目，并给出解决方案。第二，突破经典，勇于发现。根据多年的教学实践和体会，在教材中总结了一些共性问题和有争议性的问题，对这些问题做了个人观点的阐述，抛砖引玉鼓励学习者继续深入研究和探讨。第三，明确关系，理清脉络。本书包括数理逻辑、集合论、图论、代数结构四大部分，这四部分内容既自成理论体系，又有密切的联系，我们在每部分内容的讲授之前，简明阐述理论的起源、发展以及和其他理论之间的相互关系，使学习者感觉脉络清晰。第四，突出重点，圈定难点。具体到每一章都总结出本章学习的难点和重点，并指明应掌握的基本概念和解题的技巧。

本书由郝晓燕任主编，王华、李誌任副主编，其中第 1 章、第 2 章由王华编写，第 3 章由降爱莲编写，第 4 章由程海青编写，第 5 章由暨南大学王景周编写，郝晓燕负责编写第 6 章、第 7 章以及全书的统稿工作，第 8 章由李誌编写。

我们在编写本书时虽然花费了很多时间，且有同行们的多本离散数学教科书作为蓝本，但限于作者水平，书中难免有不当和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2013 年 6 月

目 录

数理逻辑又称符号逻辑、数学逻辑，是用数学方法研究符号化、形式化的逻辑演绎规律的数学分支。数理逻辑是古典逻辑的发展，古典逻辑又称形式逻辑，从亚里士多德的三段论起已有 2000 多年的历史。古典逻辑分析语言所表达的逻辑思维形式，但人们日常使用的自然语言中会有含糊不清不易判别的语句，从而引起理解上的歧义，甚至争论。

17 世纪德国哲学家、数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716）提出用数学符号式的“通用语言”来进行思维演算，使人们能够证明思维的正确性，从而避免争论，这是数理逻辑最早的萌芽。19 世纪初英国数学家乔治·布尔（George Boole，1815—1864）终于成功地构造了一种思维的代数，后来被称为布尔代数，初步实现了莱布尼兹的部分设想，又经过一些数学家的努力，布尔代数被发展成为具有逻辑蕴涵式的命题演算，成为最简单的公理化的逻辑系统。

德国数学家、逻辑学家弗雷格（Gottlob Frege，1848—1925）创造了“量化”逻辑，扩大了逻辑学的内容，最终建立了公理化的谓词演算，成为数理逻辑的基础。

现代数理逻辑的主要分支包括：逻辑演算、模型论、证明论、递归论和公理化集合论。本书介绍了数理逻辑的基础知识——逻辑演算(包括命题逻辑和谓词逻辑)。

第 1 章 命题逻辑

本章介绍命题逻辑的基本知识、基本思想和方法。命题逻辑又称为命题演算，是以命题为研究对象、以推理过程中前提和结论间的形式关系为研究目的的逻辑科学。

§1-1 命　　题

§1-1-1　命题与真值

人类的语言包含丰富的信息，不仅是交流的工具，也同人类思维有密切的联系。语言是思维的载体和物质外壳，是思维最直观的表现形式。日常生活中使用的大部分句子都是陈述句，陈述句通常是用来描述一个事实，反映人们的看法以及判断。选定具有可判断真假性的陈述句作为命题逻辑的研究对象，通过定义和分析命题相关的性质，从而明确语言所表达的逻辑思维形式。

定义 1-1.1　能够判明真假的陈述句称作命题。

判断的结果即命题的真值，真值只有“真”和“假”两种，真值为真时用“T”（或“1”）表

示，真值为假时用“F”（或“0”）表示。

例 判断以下语句是否为命题，若是命题请给出命题的真值。

（1）多美丽的景色呀！

（2）你喜欢大学生活吗？

（3）请不要在室内吸烟！

（4）3+2=5

（5）3+2=1

（6）X+2=5

（7）郑州是河北的省会。

（8）中国承办 2008 年奥运会。

（9）地球外的星球上也有人类。

（10）我在说谎。

解：（1）是感叹句，所以不是命题。

（2）是疑问句，所以不是命题。

（3）是祈使句，所以不是命题。

（4）是命题，真值为 1。

（5）是命题，真值为 0。

（6）当 X 取值为 3 时，陈述句的真值为真，当 X 取值不等于 3 时，陈述句的真值为假，不存在唯一确定的真值，即真值可真可假，所以不是命题。

（7）是命题，真值为 0。

（8）是命题，真值为 1。

（9）在人类现有的知识范畴内，无法判断陈述句的真值是真还是假，但此陈述句的真值是唯一确定的，即真值非真即假，所以是命题。

（10）如果说话者在说假话，那么“我在说谎”就与事实相背，说话者说的是实话；如果说话者在说实话，那么“我在说谎”就与事实相符，说话者说的是谎话。前提的真值无论假设为真还是假，总会由前提得出一个与之矛盾的结论，这样的命题就是一个悖论（paradox）。悖论是逻辑中具有独立研究价值的对象，不在本书的讨论范围之内。

§1-1-2　原子命题与复合命题

在例 1-1.1 中出现的命题，有一个共同的特点，即反映了对单一事物的真假判定，是简单的不能再分解的陈述句，这样的命题称之为原子命题或简单命题。原子命题通常用英文字母 A、B、C、…P、Q、R、…A_1、B_2、C_3、…P_i、Q_i、R_k、…等表示。例如：

P：郑州是河北的省会。

R_1：北京是中国的首都。

原子命题之外，有很多命题是由一个或者多个命题组合而来的，例如：

郑州不是河北的省会。

郑州不是河北的省会并且北京是中国的首都。

明天有雨或有雪。

定义 1-1.2　原子命题通过逻辑联结词组合成的新命题称作复合命题。

思考：逻辑联结词如何选取和表示？

§1-2　逻辑联结词

通过对大量复合命题的考察，针对联结词的使用频率以及表现力，选取以下 5 个联结词作为命题逻辑的常用逻辑联结词。

§1-2-1　否定联结词

定义 1-2.1　设 P 为命题，复合命题“非 P”（或“P 的否定”）称为 P 的否定式，记作$\neg P$，$\neg$称作否定联结词。规定$\neg P$ 的真值为真当且仅当 P 的真值为假，否则$\neg P$ 的真值为假。采用表格形式可以更直观清晰地分析命题 P 与其否定命题$\neg P$ 的逻辑关系，如表 1-1 所示。

表 1-1　否定联结词

P	$\neg P$
T	F
F	T

例 1-2.1　99 不是素数。

解：令 P：99 是素数。则该命题可表示为$\neg P$。

§1-2-2　合取联结词

定义 1-2.2　设 P，Q 为两个命题，复合命题“P 并且 Q”称为 P 与 Q 的合取式，记作 $P\wedge Q$，$\wedge$称作合取联结词。规定 $P\wedge Q$ 的真值为真当且仅当 P 与 Q 的真值同时为真，否则 $P\wedge Q$ 的真值为假。其逻辑关系如表 1-2 所示。

表 1-2　合取联结词

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

例 1-2.2　小王能歌善舞。

解：令 P：小王会唱歌。Q：小王会跳舞。则该命题可表示为 $P\wedge Q$。

通常在自然语言中“并且”、“不但……而且……”、“既……又……”、“又……还……”等均可由合取联结词表示。

例 1-2.3　小王和小张是好朋友。

解：上述命题是简单命题不是复合命题，因为联结词是命题逻辑上的联结，而非单纯的名词、形容词、数词等联结。该命题可表示为 P。

例 1-2.4　雪是白色的并且小王会唱歌。

解：上述命题在自然语言表达上我们会认为不具备实际语义，但在命题逻辑中是被允许的，因为逻辑联结词联结的是命题的真值，而不是联结命题的具体含义，其联结的命题的具体语义可

以无任何内在联系。令 P：雪是白色的。Q：小王会唱歌。则该命题可表示为 $P \wedge Q$。

§1-2-3　析取联结词

定义 1-2.2　设 P，Q 为两个命题，复合命题"P 或者 Q"称作 P 与 Q 的析取式，记作 $P \vee Q$，$\vee$称作析取联结词。规定 $P \vee Q$ 的真值为假当且仅当 P 与 Q 的真值同时为假，否则 $P \vee Q$ 的真值为真。其逻辑关系如表 1-3 所示。

表 1-3　　析取联结词

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

例 1-2.5　今天刮风或者下雨。

解：令 P：今天刮风。Q：今天下雨。则该命题可表示为 $P \vee Q$。

例 1-2.6　第一节课上数学或者上英语。

解：例 1-2.5 中的或者是可兼取或，也称之为相容或，即析取"$\vee$"。而此例中的或者是不可兼取或，也称之为异或、排斥或，其表达的含义是"第一节课上数学而没有上英语或者第一节课上英语而没有上数学。"异或的逻辑含义如表 1-4 所示。令 P：第一节课上数学。Q：第一节课上英语。则该命题可表示为（$\neg Q \wedge P$）$\vee$（$\neg P \wedge Q$）。

表 1-4　　例 1-2.6 真值表

P	Q	P 异或 Q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

§1-2-4　蕴含联结词

定义 1-2.3　设 P，Q 为两个命题，复合命题"如果 P 那么 Q"（或"若 P 则 Q"）称为 P 与 Q 的蕴含式，记作 $P \rightarrow Q$，$\rightarrow$称作蕴含联结词（也称为"单条件联结词"），也说成 P 是 $P \rightarrow Q$ 的前件，Q 是 $P \rightarrow Q$ 的后件。还可以说 P 是 Q 的充分条件，Q 是 P 的必要条件。规定 $P \rightarrow Q$ 的真值为假当且仅当 P 的真值为真同时 Q 的真值为假，否则 $P \rightarrow Q$ 的真值为真。其逻辑关系如表 1-5 所示。

表 1-5　　蕴含联结词

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

例 1-2.7　如果天气持续干旱，植物就会死亡。

解：令 P：天气持续干旱。Q：植物会死亡。则该命题可表示为 $P \to Q$。

例 1-2.8　如果雪是白色的那么房间里有两盆兰花。

解：上述命题在自然语言表达上是没有意义的，因为在自然语言的表达中"如果……那么……"通常有因果联系，而在命题逻辑中例 1-2.8 是被允许的，因为逻辑联结词只关注形式上真假的联结关系，不关心具体的语义。令 P：雪是白色的。Q：房间里有两盆兰花。则该命题可表示为 $P \to Q$。

§1-2-5　等价联结词

定义 1-2.4　设 P，Q 为两个命题，复合命题"P 当且仅当 Q"称作 P 与 Q 的等价式，记作 $P \leftrightarrow Q$，$\leftrightarrow$称作等价联结词（也称为"双条件联结词"）。规定 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为真当且仅当 P 与 Q 的真值相同，否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为假。其逻辑关系如表 1-6 所示。

表 1-6　等价联结词

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例 1-2.9　四边形是平行四边形当且仅当它的对边平行。

解：令 P：四边形是平行四边形。Q：四边形的对边平行。则该命题可表示为 $P \leftrightarrow Q$。

§1-3　命 题 公 式

§1-3-1　命题公式的概念

考虑上述任意一个复合命题的形式，譬如 $P \vee Q$，你会发现如果单单观察其形式本身是无法从这样的 3 个符号中判定其真值到底是真或是假，只有赋予 P 和 Q 具体语义使其表达为一个确定的命题时，P 和 Q 才具有确定的真值，根据$\vee$联结词的逻辑含义从而进一步得到复合命题 $P \vee Q$ 的真值。因此在命题逻辑中，如果 P 代表一个确定的具体的命题，称 P 为命题常元；若 P 代表一个不确定的泛指的任意命题，称 P 为命题变元。显然，命题变元 P 不是命题，只有用一个特定的命题或一个真值取代 P 才能成为命题，这样的过程称作对 P 指派或解释。在命题逻辑中并不关心具体命题的涵义，只关心其真值。因此，可以形式地定义它们如下。

定义 1-3.1　以真、假为其变域的变元，称为命题变元；真值，以及一个确定的具体命题称为命题常元。命题变元和命题常元均用 p，q，r，…，p_i，q_i，r_i，…，等表示。

通常把含有命题变元的断言称为命题公式，但这没能指出命题公式的结构，因为不是所有由命题变元、联结词和括号所组成的字符串都能成为命题公式。为此常使用递归定义命题公式，以便构成的公式有规则可循。由这种递归定义产生的公式称为合式公式。为了方便，合式公式也简称公式。

定义 1-3.2 单个命题变元和命题常元称为原子命题公式，简称原子公式。

定义 1-3.3 合式公式是由下列规则生成的公式：

① 单个原子公式是合式公式；

② 若 A 是一个合式公式，则$(\neg A)$也是一个合式公式；

③ 若 A、B 是合式公式，则$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$都是合式公式；

④ 只有有限次使用①、②和③生成的公式才是合式公式。

合式公式中的命题标识符、联结词和左右括号的数目，称为合式公式的长度。

例 1-3.1 说明$(Q\rightarrow(Q\vee R))$是合式公式。

解：（1）Q 是合式公式　　根据规则①

（2）R 是合式公式　　根据规则①

（3）$(Q\vee R)$是合式公式　　根据（1）、（2）和规则③

（4）$(Q\rightarrow(Q\vee R))$是合式公式　　根据（1）、（3）和规则③

显然那些不能由定义中指出的规则生成的字符串，均不是合式公式，如下列字符串：

（1）$(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q)$

（2）$(\neg P\vee Q\vee(R$

（3）$P\rightarrow\rightarrow Q$

当合式公式比较复杂时，常常使用很多圆括号，为了减少圆括号的使用量，可作以下约定：

① 规定联结词的优先级由高到低的次序为：

$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$

② 相同的联结词按从左至右次序计算时，圆括号可省略；

③ 最外层的圆括号可以省略。

例如，$(\neg((P\wedge Q)\vee(\neg R))\rightarrow((P\vee Q)\vee R))$

可写成：

$\neg(P\wedge Q\vee\neg R)\rightarrow P\vee Q\vee R$

有时为了看起来清楚醒目，也常常保留某些可省去的圆括号。

§1-3-2 命题符号化

所谓命题符号化，就是用命题公式的符号串来形式化表示命题，即自然语言翻译为命题公式。

命题符号化的方法：

① 首先要明确给定命题的含义；

② 对于复合命题，明确逻辑联结词，用联结词断句，分解出各个原子命题；

③ 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

例 1-3.2 将下列命题符号化。

（1）张辉和王丽都是三好学生。

解：令 P：张辉是三好学生。Q：王丽是三好学生。则该命题可表示为 $P\wedge Q$。

（2）张辉和王丽是同学。

解：令 P：张辉和王丽是同学。则该命题可表示为 P。

（3）张辉或王丽都可以做好这件事情。

解：令 P：张辉可以做好这件事情。Q：王丽可以做好这件事情。则该命题可表示为 $P\wedge Q$。

（4）校学生会主席是张辉或王丽。

解：令 P：校学生会主席是张辉。Q：校学生会主席是王丽。则该命题可表示为$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$。

（5）因为雪是白色的，所以 2+2=4。

解：令 P：雪是白色的。Q：2+2=4。则该命题可表示为 $P\rightarrow Q$。

（6）如果雪是白色的，那么 2+2=4。

解：令 P：雪是白色的。Q：2+2=4。则该命题可表示为 $P\rightarrow Q$。

（7）只有雪是白色的，才有 2+2=4。

解：令 P：雪是白色的。Q：2+2=4。则该命题可表示为 $Q\rightarrow P$。

（8）只要雪不是白色的，就有 2+2=4。

解：令 P：雪是白色的。Q：2+2=4。则该命题可表示为$\neg P\rightarrow Q$。

（9）除非雪是白色的，否则 2+2≠4。

解：令 P：雪是白色的。Q：2+2=4。则该命题可表示为$\neg P\rightarrow\neg Q$ 或 $Q\rightarrow P$。

（10）雪是白色的当且仅当 2+2=4。

解：令 P：雪是白色的。Q：2+2=4。则该命题可表示为 $P\leftrightarrow Q$。

（11）若天不下雨，我就上街；否则在家。

解：令 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。则该命题可表示为 $(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)$。

（12）仅当天不下雨且我有时间，才上街。

解：令 P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。则该命题可表示为 $R\rightarrow(\neg P\wedge Q)$

命题的符号化应该注意下列事项：

① 要正确地表示原子命题，区分复合命题与简单命题。例如尽管语句中都有联结词“和”，但（1）是合取式，（2）是简单命题；

② 明确句子的含义，正确判读“或”的意义。例如尽管语句（3）和（4）中都有联结词“或”，（3）强调两人都有做事情能力，因此是合取式；校学生会主席只能是一人担任，因此（4）是排斥或；

③ 适当选择逻辑联结词，区分必要与充分条件及充分必要条件。例如命题（5）～（12）。

§1-3-3　命题公式真值表

对于含有命题变元的公式 A，因它不能确定其真假，故该公式不是命题。但对公式中 A 出现的每一个命题变元指派一真值，称该组真值为公式的一个指派或解释，记为 $\mathrm{I}(A)$。对于每个指派，公式会有一个确定的真值，若公式确定真值为真，称该指派为成真指派；否则，称为成假指派。所有的指派及相应的公式真值组成了该公式的真值表。下面正式给出公式真值表的定义。

定义 1-3.4　对于公式中命题变元的每一种可能的真值指派，以及由它们确定出的公式真值所列成的表，称为该公式的真值表。

由本定义可知，在先前命题联结词定义中所给出的各表，都是真值表，即相应也称为各命题联结词真值表。

定义 1-3.5　设 p_1、p_2、…、p_n 是出现在公式 A 中的所有命题变元，指定 p_1、p_2、…、p_n 一组真值，则这组真值称为对 A 的一个赋值或解释，若使 A 的真值为真，则称这组值为 A 的成真赋值；若使 A 的真值为假，则称这组值为 A 的成假赋值。

一般来说，若有 n 个命题变元，则应有 2^n 个不同的解释。

如 000，010，101，110 是$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$ 的成真赋值；001，011，100，111 是成假赋值。

构造真值表的步骤如下：

（1）找出公式中所含的全部命题变项 p_1、p_2、…、p_n，若无下角标则按字母顺序排列，列出 2^n 个全部赋值，从 00…0 开始，按二进制加法，每次加 1，直至 11…1 为止；

（2）按从低到高的顺序写出公式的各个层次；

（3）对每个赋值依次计算各层次的真值，直到最后计算出公式的真值为止。

例 1-3.3 写出下列公式的真值表，并求它们的成真赋值和成假赋值。

（1）$A=(p\vee q)\to\neg r$

公式 A 的真值表如表 1-7 所示。

表 1-7 公式 A 真值表

$p\ q\ r$	$p\vee q$	$\neg r$	$(p\vee q)\to\neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值：000，001，010，100，110；成假赋值：011，101，111。

（2）$B=(q\to p)\wedge q\to p$

公式 B 的真值表如表 1-8 所示。

表 1-8 公式 B 真值表

$p\ q$	$q\to p$	$(q\to p)\wedge q$	$(q\to p)\wedge q\to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

成真赋值：00，01，10，11；无成假赋值。

（3）$C=\neg(\neg p\vee q)\wedge q$

公式 C 的真值表如表 1-9 所示。

表 1-9 公式 C 真值表

$p\ q$	$\neg p$	$\neg p\vee q$	$\neg(\neg p\vee q)$	$\neg(\neg p\vee q)\wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

成假赋值：00，01，10，11；无成真赋值。

§1-3-4　命题公式的类型

定义 1-3.6　设 A 为任一命题公式

（1）若 A 在它的任何赋值下均为真，则称 A 为重言式或永真式；

（2）若 A 在它的任何赋值下均为假，则称 A 为矛盾式或永假式；

（3）若 A 不是矛盾式，则称 A 是可满足式。

由例 1-3.3 的真值表可知，$(p\vee q)\to\neg r$，$(q\to p)\wedge q\to p$，$\neg(\neg p\vee q)\wedge q$ 分别为可满足式、重言式、矛盾式。

注意：重言式一定是可满足式，但可满足式不一定是重言式。

在推理以及决策判断时，人们最关心的是关于“真”和“假”的问题。因为重言式的否定是矛盾式，矛盾式的否定是重言式，这样只研究其一就可以了，因此我们将重点研究重言式。

现在我们已知，只要 n 为有限个数，通过正确描述包含 n 个命题变元的命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, P_n)$的真值表，就可以判断公式是否为重言式，这是一种很直观清晰并且很容易标准化的方法，完全可以通过计算机编写程序实现（希望同学在课下完成计算机自动生成任意命题公式真值表的程序）。但是依靠这样的方法来研究重言式，随着 n 值的增大，算法的复杂度呈指数级增长，并且也缺乏灵活性，因此我们想找到更简洁的方法来判定重言式。

§1-3-5　重言式的性质

（1）如果 A 是重言式，则新公式$\neg\neg A$ 是重言式。

（2）如果 A，B 是重言式，则新公式$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\to B)$和$(A\leftrightarrow B)$也都是重言式。

证明：以上性质均可由重言式定义容易得证。

（3）如果 A 是重言式，则用任一公式替代 A 中某个命题变元 p 的所有出现，得到的新公式 B 也是重言式。此过程也称作重言式的代入规则。

证明：因为重言式对任意指派，其值都是真，与所给的某个命题变元 p 指派的真值是真还是假无关，因此，用任一公式处处替代 A 中命题变元 p 后依旧是永真的。

例 1-3.4　求证：$(P\to Q)\vee\neg(P\to Q)$为重言式。

证明：由公式 $r\vee\neg r$ 的真值表可知其为重言式。用公式$(P\to Q)$替代命题变元 r 所有出现的地方，则得$(P\to Q)\vee\neg(P\to Q)$，根据代入规则可知，给定公式是重言式。

注意：若公式$(P\to Q)$只替代一个命题变元 r，得到$(P\to Q)\vee\neg r$，显然它不是重言式，因为这不符合代入规则所要求的处处代入。

§1-4　命题逻辑的等价关系

重言式的性质可以帮助我们找到新的重言式，但是它的使用前提是必须清楚哪些是已知的重言式，而有很多的公式形式上比较复杂，例如公式$(p\to(q\to r))\leftrightarrow(p\wedge q\to r)$，很难一目了然利用重言式的性质直接来判定。以下内容提供更加便捷的方法来判定公式。

§1-4-1　等价

定义 1-4.1　A、B 是含有命题变元 p_1、p_2、$\cdots$、p_n 的命题公式，如果无论对 p_1、p_2、$\cdots$、p_n

作任何指派，都使得 A 和 B 的真值相同，则称 A 与 B 等价，记作 $A \Leftrightarrow B$，并称 $A \Leftrightarrow B$ 是等价式。

定义 1-4.2　A、B 是含有命题变元 p_1、p_2、…、p_n 的命题公式，若公式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 等价，记作 $A \Leftrightarrow B$，并称 $A \Leftrightarrow B$ 是等价式。

例 1-4.1　从真值表 1-10 可以看出，不论对命题变元 p、q 作何指派，都使得公式 $p \to q$ 和 $\neg p \vee q$ 的真值相同，根据定义 1-4.1 表明 $p \to q$ 和 $\neg p \vee q$ 之间彼此等价。

从真值表 1-10 可以看出，公式 $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ 永真，根据定义 1-4.2 表明 $p \to q$ 和 $\neg p \vee q$ 之间彼此等价。

表 1-10　　　　例 1-4.1 真值表

$p\ q$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0 0	T	T	T
0 1	T	T	T
1 0	F	F	T
1 1	T	T	T

若使用重言式的代入规则，任意公式 A 处处替代命题变元 p，任意公式 B 处处替代命题变元 q，则公式 $A \to B$ 和 $\neg A \vee B$ 之间彼此等价。

注意：$\leftrightarrow$ 和 $\Leftrightarrow$ 的区别：$\leftrightarrow$ 是逻辑联结词，属于目标语言中的符号，它出现在命题公式中；$\Leftrightarrow$ 不是逻辑联结词，属于元语言中的符号，表示两个命题公式的一种关系，不属于这两个公式的任何一个公式中的符号。

§1-4-2　基本等价式

若 A 和 B 是任意命题公式，则下列等价关系成立：

双重否定律	$\neg\neg A \Leftrightarrow A$	
幂等律	$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$
交换律	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$,	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
结合律	$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
分配律	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
德摩根律	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
吸收律	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
零律	$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
同一律	$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
排中律	$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$	
矛盾律	$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$	
蕴含等价式	$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$	
等值等价式	$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$	
假言易位	$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$	

思考：观察以上等价式，会发现多数等价式是成对出现的，这种有趣的现象就是对偶性质的反映。在给定的仅使用联结词 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$ 的命题公式 A 中，若把 $\wedge$ 和 $\vee$ 互换，F 和 T 互换而得到一个命题公式 A^*，则称 A^* 为 A 的对偶式。若 A 和 B 为两个命题公式并且 $A \Leftrightarrow B$ 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。利用对偶定理可以扩大等价式的个数，也可减少证明的次数。请读者尝试去发现，以及证明对偶的相关性质。