

初中几何复习指导

升學考試必讀

初中幾何複習指導

編者 錢洪翔



現代教育研究社出版

1 9 3 6

初中幾何複習指導目次

(一) 導言	1
(二) 點直線及角	3
(1) 通論	4
(2) 點與直線之關係	6
(3) 直線與角之關係	6
(4) 垂線	12
(5) 平行線	17
(三) 三角形	22
(1) 一般三角形	22

2 初中幾何複習指導

(2) 直角三角形.....	35
(3) 等腰三角形.....	41
(4) 等邊三角形.....	48
(5) 總例題.....	50
(四) 四邊形	61
(1) 一般四邊形.....	61
(2) 平行四邊形.....	69
(3) 矩形正方形及菱形.....	77
(4) 梯形.....	83
(五) 多邊形	87
(六) 圓.....	92
(1) 一圓.....	93
(2) 二圓	114
(3) 圓之內接直線形及外切直線形 ...	126
(4) 直線形之外接圓及內切圓	136
(5) 圓與直線形之關係	144
(七) 比例問題	147
(1) 相似形	147
(2) 比例	154

(八)面積問題	166
(1) 面積之比	166
(2) 面積	172
(3) 等積	179
(九)軌跡問題	188
(十)計算問題	195
(十一)極大極小問題	205
(1) 極大	205
(2) 極小	209
(十二)作圖問題	212
(1) 直線及角	212
(2) 三角形	224
(3) 四邊形	234
(4) 圓	236
(5) 比例	246
(6) 等積	256
(7) 極大極小	268

(附)初中三角複習指導目次

(一)導言	275
(二)銳角之三角函數	276
(1) 三角函數之涵義	277
(2) 三角函數之數值	284
(3) 銳角之三角函數恆等式	290
(三)任意角之三角函數	295
(四)兩角之三角函數	305
(五)直角三角形解法	137
(六)斜三角形解法	323
(七)三角方程式	330

初中幾何複習指導

(一)導言

1. 何謂幾何學? (江蘇省立上海中學工一)

[解]幾何學者,乃研究形狀、大小、及位置之科學也。

2. 吾人爲何須研究幾何學?

[解]吾人日常生活,恆不能逸出‘數’與‘量’之範圍,例如:一石豆價五元二角。一(石)及五(元)二(角)乃‘數’之問題,而‘一石豆’究有若干容積,則屬於‘量’之問題矣。‘數’之問題,恆於算術及代數等學科中研究之,而‘量’之研究,則屬於幾何學之範圍。是以全部數學;可分成下列三大類。

1. 算術學 以數字表‘數’而論其關係及性質者也。

2. 解析學 以文字表‘數’,而論其關係及性質者也,內分代數學,微積分學,數論學等科。

3. 幾何學 乃研究形狀、大小及位置等‘量’之問題者也。內分初等幾何學高等幾何學等科。

故幾何學者，實佔數學中一重要部分，且最切合實用之學科也。某偉大倉庫，可堆若干穀物，某廣大土地，可植若干樹木，恆可由幾何學之原理推算而得，而一切工程之設計及科學之研究，其須借助於幾何學者尤多。

3. 何謂初等幾何學？何謂高等幾何學？

〔解〕初等幾何學者，乃研究一部分點、線、面合成之幾何圖形，線祇限於直線及圓，面祇限於直線或圓所成者之學科也。高等幾何學者，乃研究任何點線面合成之幾何圖形。一般之曲線及曲面所成之幾何圖形皆在其討論之列之學科也。

4. 初等幾何學分幾部？

〔解〕分平面幾何學及立體幾何學兩部。

5. 平面幾何學與立體幾何學有何不同？

〔解〕平面幾何學所討論之幾何圖形，圖形上諸點，均在同一平面內。立體幾何學所討論之幾何圖形，圖形上諸點不必均在同一平面內，易言之，即在許多平面內。本書所討論者，乃平面幾何學，立體幾何學之討論，當俟諸異日。

6. 研究幾何學之方法爲何？

[解](1) 將緊要之定理分類熟記，本書將幾何圖形分成三角形，四邊形等五大類。五大類外，又將有特殊性質之問題，分成面積，比例等六類問題，每類問題中，均含有上述五大類之幾何圖形，蓋此六類問題，皆係由五大類幾何圖形中分出，以便記憶。讀者宜將每類幾何圖形及每類問題中之定理，擇其緊要者熟記之，則解題時，得手應心，自無茫無頭緒之苦。(2) 選擇基本問題，細研其解法及步驟，務使融會貫通，瞭然於胸中，則此後遇相類之問題，自能按步解答，極爲易易。(3) 解問題時所作之圖，務求正確，因正確之圖，能將問題主要之關係看出，幫助問題之解答極多。又所畫之圖，應力求普遍，不可畫成特殊情形。例如問題中單云三角形，圖中不能畫成等邊形或等腰三角形。應畫最普遍之不等邊三角形，否則極易陷於錯誤，最宜注意。(4) 倘問題一時無法解答，可假定問題爲已解，往上逆推之，迨其主要之關係既明，則問題亦不難證明矣。

(二) 點、直線及角

(1)通論

【定義】

- (a) 點 在空間佔一位置之單位謂之點 (Point)，幾何上之點，無長、廣、及厚，純屬理想，因若有長廣及厚，則作幾何圖形及討論時，時時須顧及此等條件，殊多窒礙也。
- (b) 線 點在空間移動，行過後所留之痕跡，謂之線 (Line)，幾何上之線，有長而無廣及厚，純屬理想。
- (c) 面 線在空間移動，行過後所留之痕跡，謂之面 (Face)，幾何上之面，有長及廣而無厚，純屬理想。
- (d) 直線 線之處處在同方向者，謂之直線 (straight line)，簡稱曰線。
- (e) 曲線 線之處處改變其方面者，謂之曲線 (curve line 或 curve)。
- (f) 平面 在面內，任取兩點，以一直線聯之，此線全在此面內者，謂之平面。 (Plane surface 或 plane)。
- (g) 曲面 凡面之無一部分為平面者，謂之曲面 (curved surface)。

【公理】

1. 與某量相等之諸量，彼此必等。
2. 相等之諸量，同時加某量，結果仍彼此相等。
3. 相等之諸量，同時減某量，結果仍彼此相等。
4. 不相等之諸量，同時加某量，結果仍彼此不等，本為大量者，仍為大量。不相等之諸量，同時加不相等之諸量，若係大量加大量，小量加小量，結果仍彼此不等，本為大量者，仍為大量。
5. 不相等之諸量，同時減某量，結果仍彼此不等，本為大量者，仍為大量。相等之諸量同時減不相等之諸量，所減為大量者，所餘為小量，所減為小量者，所餘為大量。
6. 相等諸量之倍數，彼此必等。不相等諸量之倍數，彼此必不等。
7. 相等諸量之幾分之幾，彼此必等。不相等諸量之幾分之幾，彼此必不等。
8. 全量大於其分量。
9. 全量等於諸分量之和。

〔附註〕 本公理可用代數證明之，甚重

要，須加熟記。

(2) 點與直線之關係

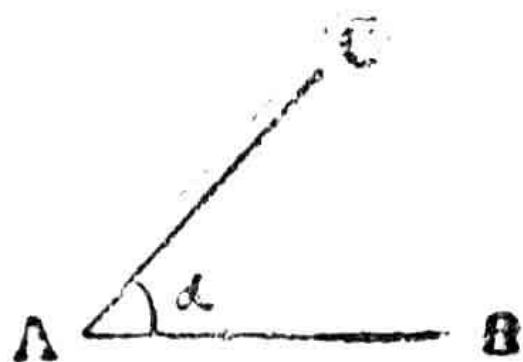
【定理】

1. 一點至他點，可作一直線，且僅可作一直線，故兩點可定一直線，此直線可引至無限長。
2. 兩直線有兩公共點，則此兩線必相合而成一線，故兩直線僅能相交於一點。
3. 兩相交線，可定一點。
4. 直線為兩點間之至短線。此至短線謂之兩點間之距離(Distance)。

(3) 直線與角之關係

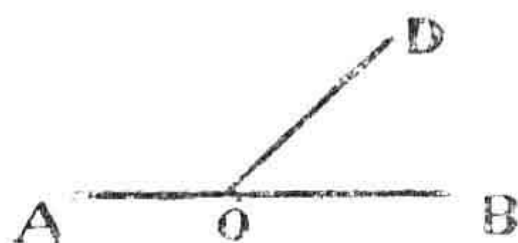
【定義】

(A) 角 由一點，引兩直線，其所開之口，謂之平面角 (plane angle)，簡稱爲角 (angle)，恆以略號 $\angle$ 表示之，例如



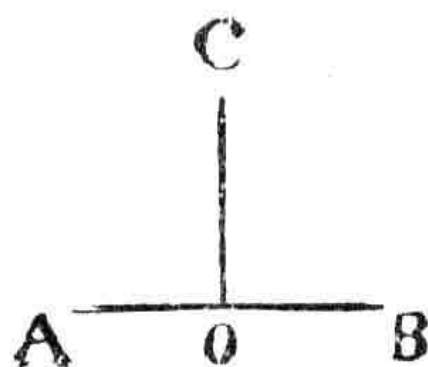
α 爲自A點引兩直線AB, AC所成之角, A爲角頂, 通常恆以 $\angle BAC$ 表示之, (即將角頂書在中間, 其餘依字母之次序排列, 不然書成 $\angle CAB$, 固無不可, 然甚易錯亂, 最宜注意) 角之大小, 視其兩邊所開之口之廣狹而定, 與其邊之長短無關。

- (B) 鄰角 設兩角有一公共頂, 及一公共邊, 則此兩角互爲鄰角 (adjacent angles) 例如:



$\angle AOD$ 爲 $\angle BOD$ 之鄰角, $\angle BOD$ 爲 $\angle AOD$ 之鄰角。

- (C) 直角 設兩直線相遇, 其所成之兩鄰角相等, 此兩隣角, 彼此皆稱爲直角 (Right angle), 恆以略號rt. $\angle$ 表示之, 例如



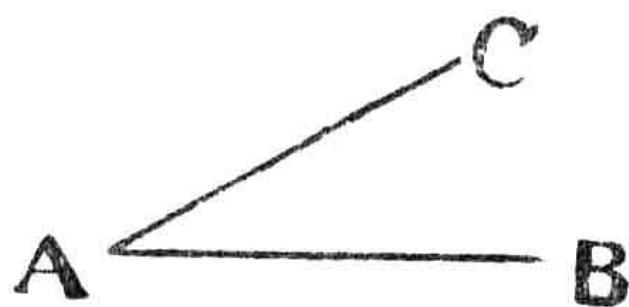
$\angle AOC$ 及 $\angle BOC$ 爲兩隣角，且 $\angle AOC = \angle BOC$ ，則 $\angle AOC$ 及 $\angle BOC$ 均爲直角。

(D) 平角 設角之兩邊，由其頂點，引在兩反對方向，恰成一直線者，謂之平角 (straight angle)，例如



角頂爲A，而AC及AB爲兩角邊，BC爲一直線，故 $\angle BAC$ 爲一平角。

(E) 銳角 小於一直角之角，謂之銳角 (acute angle)，例如 $\angle BAC$ 小於一直角，



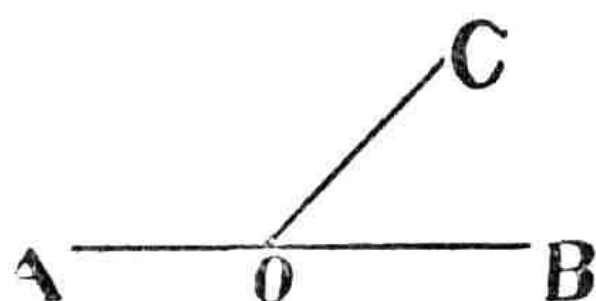
則 $\angle BAC$ 爲一銳角。

(F) 鈍角 大於一直角之角，謂之鈍角 (obtuse angle)，例如 $\angle BAC$ 大於一直角，



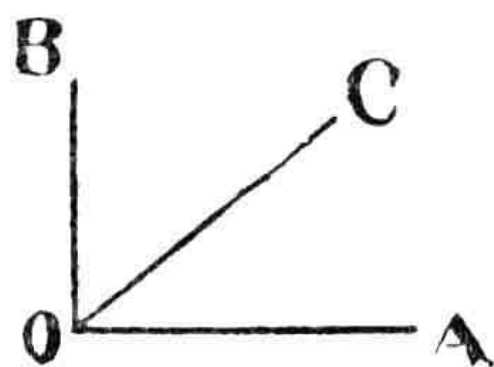
則 $\angle BAC$ 爲一鈍角。

- (G) 補角 設兩角之和，等於一平角，則此兩角互爲補角，(Supplement of an angle 或 supplement) 例如：



$\angle AOC$ 爲 $\angle BOC$ 之補角， $\angle BOC$ 爲 $\angle AOC$ 之補角。

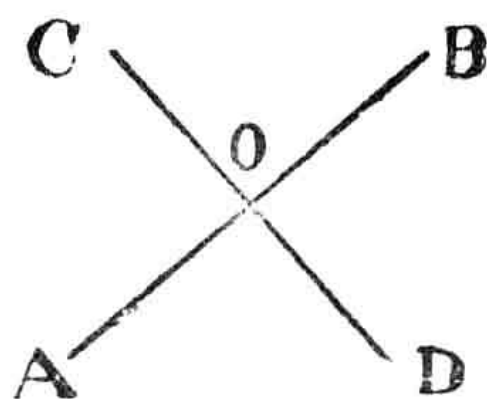
- (H) 餘角 設兩角之和，等於一直角，則此兩角互爲餘角 (Complement of an angle 或 Complement)，例如：



$\angle AOC$ 爲 $\angle BOC$ 之餘角， $\angle BOC$ 爲 $\angle AOC$ 之餘角。

- (I) 對頂角 設兩角有公共頂，而此角之兩

邊爲彼角兩邊之引長線，則兩角謂之對頂角，例如



$\angle AOD$ 及 $\angle BOC$ 爲對頂角， $\angle AOC$ 及 $\angle BOD$ 爲對頂角。

- (J) 角度 將一直角，分成90等分，每1等分，謂之一度 (degree)，以 1° 表示之，每度分成60等分，每1等分謂之一分 (Minute)，以 $1'$ 表示之，每分又分成60等分，每1等分，謂之1秒 (second)，以 $1''$ 表示之。故5度16分7秒可書作 $5^\circ 16' 7''$

【定理】

5. (a) 直角等於平角之半。 (b) 一平角等於兩直角。
6. 在一平面內，將一直線迴繞一點旋轉一週所成諸角之和，等於兩平角或四直角。
7. 在一平面內，將一直線迴繞一點旋轉半週所成諸角之和，等於一平角，或兩直

角。

8. (a) 凡平角均等, (b) 凡直角均等。
9. (a) 同角或等角之補角均等, (b) 同角或等角之餘角均等。
10. (a) 設兩鄰角之外邊, 成一直線, 則此兩角互為補角。(b) 設兩鄰角之外邊不成一直線, 則此兩角不互為補角。
11. (a) 設兩鄰角互為補角。則其兩外邊成一直線。(b) 設兩鄰角不互為補角, 則其兩外邊, 不成一直線。
12. 兩直線相交, 其對頂角必等。
13. 設兩直線相交, 所成之四角中, 若一角為直角, 則他三角必皆為直角。
14. 由一點至一直線之兩端, 所作兩線之和, 大於在形內依同法所作兩線之和。

【例題】

1. 有一角為 51° , 求其餘角及補角。

〔解〕依定義(J)一直角等於 90° ,

$$\text{則餘角} = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ \quad (\text{定義H})$$

$$\text{依定理5, 平角} = 90^\circ \times 2 = 180^\circ$$

$$\text{則補角} = 180^\circ - 51^\circ = 129^\circ$$

2. 有一角為其餘角之二分之一, 求此角之度數。

〔解〕設 所求之角之度數為 x , 則