清华大学出版社“十二五”规划教材
高等农林院校大学数学系列教材

线性代数及其应用

主编　张海燕　房宏
主审　赵翠萍

清华大学出版社

高等农林院校大学数

线性代数及其应用

主编　张海燕　房宏

清华大学出版社
北京

内容简介

本书包括6章内容：行列式及其应用、矩阵、线性方程组与向量、矩阵的特征值与特征向量、二次型及Mathematica软件应用.每章都配有习题，书末给出了习题答案.

本书在编写中力求重点突出、由浅入深、通俗易懂.

本书可作为高等农林院校非数学专业本科生的教材，也可作为其他非数学类本科专业学生的教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用/张海燕，房宏主编. --北京：清华大学出版社，2013
高等农林院校大学数学系列教材
ISBN 978-7-302-31703-6

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①张…　②房…　Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第045629号

责任编辑：石　磊　赵从棉
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　印　　张：10.75　　字　　数：229千字
版　　次：2013年7月第1版　　印　　次：2013年7月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：19.00元

产品编号：038022-01

前言

本书是为普通高等院校非数学专业“线性代数”课程编写的教材.在编写的过程中,吸收了国内现有教材的优点,力求做到:知识引入自然合理,文字阐述通俗易懂.与同类教材进行比较分析,在教学内容、习题配置方面进行了适当的取舍,避免了偏难、偏深的理论证明.根据目前绝大部分高等院校非数学类专业的线性代数课程学时数少的特点,我们在保证知识的完整性的同时力求做到内容的难易适中,以适应高等院校“扩招”后教学的需要.本教材删去了较长的理论证明,尽量多作直观解释,增加部分应用案例以及一些典型例题,努力做到有助于学生理解基本概念和基本原理,提高学生的学习兴趣,并进一步提高学生融会贯通地分析问题和解决问题的能力.

参加本教材编写工作的人员均是天津农学院的教师:房宏(第1,3章),张海燕(第2章),金惠兰(第4,5章),陈雁东(第6章),张海燕完成了全书的统稿工作,赵翠萍完成了全书的审阅工作.

天津农学院基础科学系及教材科的领导和老师在本教材的出版过程中给予了周到的服务和大力协助,在此一并致谢!

教材中难免存在不妥之处,敬请读者不吝指正.

编　者

2013年5月于天津

目 录

第 1 章

行列式及其应用

行列式是一种特定的算式,它作为数学工具在数学的许多分支中有着广泛的应用.本章通过对二元线性方程组和三元线性方程组求解的结论,引入二阶行列式、三阶行列式,并推广到 n 阶行列式.

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 二阶和三阶行列式

1. 二元线性方程组与二阶行列式

从消元法解二元线性方程组入手,引入二阶行列式.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 x_2,分别以 a_{22} 与 a_{12} 乘上列两方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2;$$

类似地消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,求得方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

从式(1.2)可以看出,x_1,x_2 的分母都等于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,它是由方程组(1.1)的 4 个系数确定的,把这 4 个数按它们在方程组(1.1)中的位置,排成 2 行 2 列(横排称行,竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的二阶行列式,并记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.4}$$

其中,数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为二阶行列式的元素.它的第 1 个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第 2 个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1.4)的(i,j)元.称 D 为方程组(1.1)的系数行列式.

二阶行列式的定义(1.4)可用对角线法则来记忆.从行列式的左上角元素 a_{11} 到右下角元素 a_{22} 作连线,该连线称为行列式的主对角线;而行列式的左下角元素 a_{21} 到右上角元素 a_{12} 作连线,该连线称为行列式的副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得之差.

利用二阶行列式的概念,式(1.2)中 x_1,x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

显然,$D_i(i=1,2)$即为 D 中的第 i 列换成方程组(1.1)的常数项所得到的行列式.于是,当 $D\neq0$ 时,二元线性方程组(1.1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.5}$$

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-3x_2=5, \\ 2x_1+4x_2=0. \end{cases}$$

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10\neq0$,方程组有唯一解.

由于

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=20-0=20,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0-10=-10,$$

因此 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{20}{10}=2,x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-10}{10}=-1.$

2. 三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$排成 3 行 3 列的数表,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.6}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.7}$$

式(1.7)称为数表(1.6)所确定的三阶行列式.

上述定义表明，三阶行列式含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律如图 1.1 所示：图中三条实线看作是平行于主对角线的连线，实线上三个元素的乘积冠以正号，三条虚线看作是平行于副对角线的连线，虚线上三个元素的乘积冠以负号。

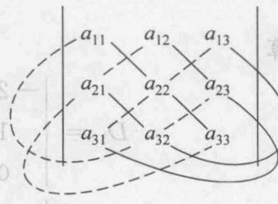

图 1.1

例 1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 2\times 2\times(-2) + (-1)\times 1\times 4 + 3\times(-1)\times 1 \\ &\quad - 3\times 2\times 4 - (-1)\times(-1)\times(-2) - 2\times 1\times 1 \\ &= -8 - 4 - 3 - 24 + 2 - 2 = -39. \end{aligned}$$

类似地，可以用三阶行列式解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.8}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 D 称为方程组(1.8)的系数行列式，D_j 是以常数项 b_1, b_2, b_3 分别替换系数行列式中的第 j 列的 a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}（未知数 x_j 的系数）所得的行列式. 于是当行列式 $D \neq 0$ 时，方程组(1.8)有唯一解，可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

上述用行列式解线性方程组的方法称为克莱姆法则，以后还将介绍 n 元线性方程组的克莱姆法则.

例 1.3 求解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 因为系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+2-6+1+3-4=-5\neq 0$,从而

计算

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2+1+0-0-6-2=-5,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1+0-6+1-0-4=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0-4+2-2-1-0=-5,$$

得方程组的唯一解为 $x_1=\frac{D_1}{D}=1, x_2=\frac{D_2}{D}=2, x_3=\frac{D_3}{D}=1.$

对角线法则只适用于二阶及三阶行列式,为研究 4 阶及更高阶行列式,下面先介绍有关 n 元排列的知识,再引出 n 阶行列式的概念.

1.1.2 n 元排列

1. 排列与逆序

定义 1.2 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 称为一个 n 元排列.

如由自然数 1,2,3,4 组成的不同排列有 $4!=24$ 种,那么由互异元素 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 构成的不同排列有多少种?

首先从 n 个元素中选取 1 个有 n 种取法;再从剩余 $n-1$ 个元素中选取 1 个有 $n-1$ 种取法;这样继续下去,直到最后只剩 1 个元素放在第 n 个位置上,只有 1 种取法. 于是由 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 组成的不同排列有 $n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$ 种.

对于 n 个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序).

定义 1.3 在 n 个不同的元素的任一排列中,当某两个元素的次序与标准次序不同时,称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中所有逆序的总数,称为这个排列的**逆序数**,

记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

下面给出计算一个 n 元排列的逆序数的方法:在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$ 中,如果一个较大的数排在一个较小的数之前,即若 $p_t>p_s$,则称这两个数 p_t,p_s 构成一个逆序.排在 p_s 前比 p_s 大的数的个数称为 p_s 的逆序数,记为 $\tau(p_s)$.

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\tau(p_1)+\tau(p_2)+\cdots+\tau(p_n).$$

例 1.4 求排列 637251 的逆序数,并确定其奇偶性.

解 在排列 637251 中:

6 排在首位,逆序数为 0;

3 的前面比 3 大的数有 1 个(6),故逆序数为 1;

7 是最大数,故逆序数为 0;

2 前面比 2 大的数有 3 个(6,3,7),故逆序数为 3;

5 前面比 5 大的数有 2 个(6,7),故逆序数为 2;

1 前面比 1 大的数有 5 个(6,3,7,2,5),故逆序数为 5,于是这个排列的逆序数为 $\tau=\tau_1+\cdots+\tau_6=0+1+0+3+2+5=11$,故该排列为奇排列.

例 1.5 求排列 $1\ 3\ 5\ \cdots(2n-1)2\ 4\ 6\ \cdots(2n)$ 的逆序数,并确定其奇偶性.

解
$$\begin{aligned}&\tau(1\ 3\ 5\ \cdots(2n-1)2\ 4\ 6\ \cdots(2n))\\&=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2},\end{aligned}$$

而 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性由 n 确定,讨论如下:

当 $n=4k$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n=4k+2$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

所以,当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,为奇排列.

2. 对换

出于研究 n 阶行列式的需要,我们先讨论对换的概念以及它与排列奇偶性的关系.

定义 1.4 在排列 $p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$ 中将任意两个数 p_t,p_s 的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列,这种作出新排列的手续叫做**对换**.将相邻两个元素对换,称为**相邻对换**.

定理 1.1 一个排列中任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换：设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b，变为 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$，显然 $a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 的逆序数经过对换并不改变，而 a 与 b 的逆序数的改变为

若 $a<b$，对换后 a 的逆序数增加 1，b 的逆序数不变；

若 $a>b$，对换后 a 的逆序数不变，b 的逆序数减少 1.

因此，无论是增加 1 还是减少 1，排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 的奇偶性改变.

再证一般对换：设 (1) $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$；(2) $a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m abc_1\cdots c_n$；(3) $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$.

由(1)变为(2)经过 m 次相邻对换；由(2)变为(3)经过 $m+1$ 次相邻对换；则由(1)变成(3)经过 $2m+1$ 次相邻对换，所以排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 与排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$ 的奇偶性相反.

推论 奇排列变为标准排列的对换次数为奇数，偶排列变为标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此结论成立.

1.1.3 *n* 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.9}$$

容易看出：

(1) 三阶行列式是一些项的代数和，而每一项都是行列式中位于不同行、不同列的 3 个元素的乘积.

(2) 这个代数和的总项数是由 1,2,3 构成的排列的总数 $3!=6$.

(3) 式(1.9)右端的任一项除正负号外均可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第 1 个下标(行标)排成标准次序，而第 2 个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 三个数的某个排列.

(4) 每一项的符号与列标排列的逆序数的奇偶性有关，各项的正负号与列标的排列对照表如下：

带正号的 3 项列标排列是 123、231、312；

带负号的 3 项列标排列是 132、213、321.

经计算可知前 3 个排列都是偶排列，后 3 个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可

以表示为$(-1)^{\tau}$，其中τ为列标排列的逆序数.

因此，三阶行列式的定义又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中，τ为排列$p_1p_2p_3$的逆序数，$\sum$表示对所有3元排列$p_1p_2p_3$求和.

仿此，可以把行列式推广到一般情形，于是有下面n阶行列式的定义.

定义 1.5 设有n^2个数$a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，排成$n$行$n$列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的n个元素的乘积，并冠以符号$(-1)^{\tau}$，得到$n!$个形如$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的项，其中$p_1,p_2,\cdots,p_n$为自然数$1,2\cdots,n$的一个排列，$\tau$为这个排列的逆序数. 所有这$n!$项的代数和$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$称为**$n$阶行列式**，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

简记作$\det(a_{ij})$，其中a_{ij}为行列式D的(i,j)元.

显然，按此定义的二阶、三阶行列式与前面用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 特别要注意当$n=1$时，一阶行列式$|a|=a$，不要与绝对值记号相混淆.

例 1.6 计算4阶行列式$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

解 考虑非零项，第2行中仅有a_{21}不为零，第3行中仅有a_{31}不为零，从而$D=0$.

例 1.7 计算n阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}.$$

行列式D_1的主对角线下方的元素全为0(省略)，称为**上三角行列式**(主对角线上方的元素全为0，称之为**下三角行列式**).

解 D_1 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不显含 0，且列标构成排列的逆序数为 $\tau(12\cdots n)=0$，故 $D_1=(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

D_2 中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 不显含 0，且列标构成排列的逆序数为

$$\tau(n\cdots 21)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

故 $D_2=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

结论：以主对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积；特别地，对角线以外的元素全为 0 的行列式，称为**对角行列式**. 如：

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

应当指出，n 阶行列式的定义有多种形式.

例如，把 n 阶行列式每项的列下标按自然顺序排列，而行下标是 n 元排列的某个排列 $q_1q_2\cdots q_n$，则有行列式的另一种定义形式.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

若 n 阶行列式每项的行下标按 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 排列，而列下标按 n 元排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 排列，则上式还可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)+\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}.$$

1.2 行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知，要计算 n 阶行列式，需要计算 $n!$ 个乘积项，显然比较麻烦. 为此，我们先研究行列式的性质，利用这些性质来简化行列式的计算.

考虑 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

把 D 的行列互换，得到一个新的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}.

例如，设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$. 由对角线法则可知 $D=5$，$D^{\mathrm{T}}=5$，即 $D^{\mathrm{T}}=D$. 一般地，有以下性质成立.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

则 $b_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

而由行列式的定义知，

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

故

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

由此性质可知，行列式中行与列地位相等. 因此，行列式的性质凡是对行成立的，对列同样成立，反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行（或两列），行列式变号.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中,行列式 D_1 是由行列式 D 交换其 i,j 两行得到的.

记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

当 $l\neq i,j$ 时,$b_{lk}=a_{lk}$;当 $l=i,j$ 时,$b_{ik}=a_{jk}$,$b_{jk}=a_{ik}$,于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau}(b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}) \\ &= \sum(-1)^{\tau}(a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}) \\ &= \sum(-1)^{\tau}(a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}) \end{aligned}$$

其中行标 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列,τ 为列标排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_1,则 $(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau_1}$,故

$$D_1=-\sum(-1)^{\tau_1}(a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n})=-D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示行列式的第 i 列,交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

证 因为对调此两行(列)后,D 的形式不变,所以 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3 用一个数 k 乘行列式,等于行列式某一行(列)的所有元素都乘以 k. 即

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$).

推论 行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k,记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

性质 4 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例,则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都可以表示为两项之和,则这个行列式可以表示为两个行列式的和.