

硕士学位研究生

数学物理方法试题解答

阜阳师范学院物理系

一九八四年十月

言

目

本题解是我们根据汇集的中国科学院原子能研究所、大气物理研究所、中国科技大学、南京大学、武汉大学、中山大学、上海交大、大连工学院、西北电讯工程学院、同济大学等三十余个单位硕士学位物理类《数学物理方法》招生试题（一九八〇——一九八四年）作出解答编写而成的。

为了便于教学及报考有关专业研究生的读者参考，我们将题解基本上按现行数理方法教学大纲的内容和要求加以分类，并在附录中附有各单位完整的试题及解答参照表。（注：分散在高等数学试题中的数理方法试题省略了试题的出处）。

因编者水平有限，时间仓促，错误和不妥之处在所难免，敬请读者提出批评指正。



录

一、	解析函数的基本理论	3
二、	幂级数展开	20
三、	级数理论及其应用	37
四、	保角变换	74
五、	二阶线性偏微分方程的分类	83
六、	定解问题的适定性	95
七、	分离变量法	101
八、	行波法与积分变换法	154
九、	二阶常微分方程的本征值问题及幂级数解	176
十、	特殊函数及其应用(一) 勒让德函数	187
十一、	特殊函数及其应用(二) 贝塞尔函数	204
十二、	格林函数	222
十三、	变分法	245
	附 录	252

一、解析函数基本理论

1. (1) 試研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的可导性.

(2) 設 $f(z) = u(x, y) + iV(x, y)$ 在区域 D 内解析. 且 $V = u^2$. 試求 $f(z)$.

解(1): $f(z) = x^2 + y^2$ 考虑极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - x^2 - y^2}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{2x\Delta x + 2y\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{2x + 2y \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

显然上式中当 $f(z+\Delta z)$ 沿不同路径趋于 $f(z)$ 时, 上式极限值是不相同的, 如取 $y=x$ 的路径, 则:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{2(x+y)}{1+i}$$

如取 $y=2x$ 的路径, 则:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{2(x+2y)}{1+2i}$$

所以 $|z|^2$ 处处不可导.

(2): 由 C-R 条件: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$\text{由 } V = u^2, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

4.

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = -2u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

$$\text{由(1), (2)得: } -4u^2 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

$$-4u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\text{由(3), (4)得: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \therefore u = C$$

故此解析函数为 $C + ic^2$, C 为任一实常数.

2. 设 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 作变换 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. 证明: 等式
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$
 成立的充要

条件是: 等式
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (r \neq 0) \quad \text{成立.}$$

$$\text{解证: } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\text{代入等式 } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad \text{中得:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} = -\frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \end{cases} \quad (2)$$

(1) $\cdot \cos \varphi$ + (2) $\sin \varphi$ 得:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

(1) $\sin \varphi$ - (2) $\cos \varphi$ 得:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

于是证明了条件的必要性，下证证明条件的充分性：

由 $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ 得：

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi$$

代入等式 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases}$ 中得：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi = \frac{1}{r} [-\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \varphi] \\ \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi = -\frac{1}{r} [-\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi] \end{cases}$$

或化简为：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi = -\frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi = +\frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi \end{cases} \quad (4)$$

(3) $\cdot \cos \varphi$ - (4) $\sin \varphi$ 得： $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(3) $\sin \varphi$ + (4) $\cos \varphi$ 得： $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

3. 证明函数 $f(z) = \ln(z-a)$ 的实部和虚部在不包含 $z=a$ 的任一区域 D 内均是调和函数，且在 D 内处处有等式：

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = |f'(z)|^2$$

其中 a 是实常数， $u = \operatorname{Re} f(z)$ ，

$v = \operatorname{Im} f(z)$ 。

证明: $\ln(z-a)$ 除点 $z=a$ 外处处解析, 故满足(-R)条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

故: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

即 u 与 v 均为调和函数

又: $\ln(z-a) = \ln|z-a| + i \arg(z-a)$

$$u = \ln|z-a| = \ln|\sqrt{(x-a)^2 + y^2}|$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} \end{aligned}$$

而: $|f'(z)|^2 = \left| \frac{1}{z-a} \right|^2 = \frac{1}{(x-a)^2 + y^2}$

所以: $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = |f'(z)|^2$

4. 已知 $\operatorname{Im} f(z) = \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ 求解析函数 $f(z)$

解: 设 $f(z) = u + iv$

则由柯西黎曼条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

所以: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy$

$$= \frac{y/\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}} dx - \frac{-1+x/\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}} dy$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

$$= d\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

积分 $u = \sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} + C$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}} + i\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}} + C \\ &= \sqrt{2z} + C \end{aligned}$$

解 = : 用极坐标解:

$$v = \sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{r(1-\cos\theta)} = \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2}$$

利用柯西黎曼条件 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{r\partial\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial\theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \therefore du &= \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial\theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} dr - \frac{r}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= d(\sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

$$u = \sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2} + C$$

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = \sqrt{2r} (\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}) + C \\ &= \sqrt{2z} + C \end{aligned}$$

註: 亦可直接以 $v = \sqrt{2} r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}$ 看出

$$u = \sqrt{2} r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{即} \quad f(z) = \sqrt{2} r^{1/2} e^{i\theta/2} = \sqrt{2z}$$

5. 証明在函数的零点必是孤立点.

解证. 设 $z=b$ 为奇函数 (即在全部 z 平面上解析的函数) $f(z)$ 的零点. 设其阶数为 m , 则在 b 点附近可将 $f(z)$ 展开成幂级数.

$$f(z) = (z-b)^m [a_m + a_{m+1}(z-b) + a_{m+2}(z-b)^2 + \dots]$$

$a_m \neq 0$ 对于足够接近 b 而不等于 b 的 z , 有:

$$a_m + a_{m+1}(z-b) + a_{m+2}(z-b)^2 + \dots = \frac{1}{(z-b)^m} f(z)$$

故存在 b 的一个邻域, 在其内除 b 之外

$$f(z) \neq 0 \quad \text{即 } b \text{ 点为 } f(z) \text{ 的孤立零点.}$$

6. 在下列各题的括号中选择正确的答案 (直接在题纸上将不正确的回答划去, 而只留一个正确的回答):

(1) 若 $f(z)$ 在单连通区域 G 中解析, C 为 G 内一条分段光滑曲线, 则积分 $\int_C f(z) dz$

[(i) 与路径无关, 但与起止点有关. (ii) 与路径及起止点均有关. (iii) 与路径及起止点均无关.]

(2) 若 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶零点, 则 $\frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$

在 $z=z_0$ 点的残数等于:

[(i) 0 ; (ii) n ; (iii) $-n$;]

(3) 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \neq 0$) 的收敛半径为 R , 则级数:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} z^n$ 的收敛半径

[(i) $= \frac{1}{R}$; (ii) $\geq \frac{1}{R}$; (iii) $\leq \frac{1}{R}$)

- (4). 若 $f(z)$ 在 ∞ 点解析, $f(z)$ 在 ∞ 点的残数 $\text{Res } f(z)$ (i) 一定等于; (ii) 一定不等于; (iii) 不一定等于) 0, 因为 $\text{Res } f(z)$ 是由 $f(z)$ 在 ∞ 点邻域内以级数展开式中的 (i) z^{-1} ; (ii) z^0 ; (iii) z^1) 项的系数决定的。

7. (1) 试叙述并证明解析函数的唯一性定理。

(2) 求函数 $\sin \frac{1}{2-3z}$ 的零点, 及零点集的聚点. 此函数显然不恒等于零, 问这与解析函数的唯一性定理是否矛盾? 说明其理由。

解(1): 设 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 是在域 G 上的解析函数, 又没有某个无穷点列: $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 收敛于域 G 的内点 a , 若 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在该点列上的值完全相等, 则 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在整个域 G 上恒等。

证明:

$$\text{设 } f(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

则点 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 是 $f(z)$ 的零点, 点 a 也是 $f(z)$ 的零点, 因为如果 $f(a) \neq 0$, 则由 $f(z)$ 的连续性, $f(z)$ 在 a 的某个邻域内也异于零, 这是不可能的, 因为在 a 的任一充分小邻域内均包含有 $f(z) = 0$ 的点列 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 中的无穷子点. 故 a 是 $f(z)$ 的零点。

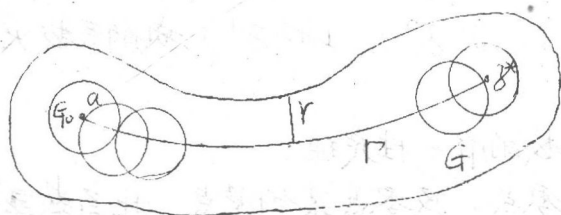
则在 a 点的邻域内 $f(z) \equiv 0$

如若不然, 则在 a 的某一充分小邻域内 $f(z)$ 不恒等于零, 则:

$$f(z) = (z-a)^m [C_m + C_{m+1}(z-a) + \dots] \quad C_m \neq 0$$

由此推知, 在 a 的充分小邻域内 $f(z)$ 没有别的零点, 这与上述相矛盾。

设 z^* 是域 G 内任一点. 在 G 内用曲线 Γ 连结 a 与 z^* , r 为 Γ 上的点到 G 边界的最短距离.



以 a 为中心, r 为半径作圆, 则由上述证明, 可知在此圆所围域 G_0 内 ($f(z) \equiv 0$) 设 a_1 是此圆与 Γ 的交点. 则在 a_1 的任一邻域内, 含有 G_0 的无穷个点. 对点 a_1 重复以上对点 a 的讨论, 可得到在以 a_1 为中心, r 为半径的圆内, $f(z) \equiv 0$.

重复进行上述的讨论, 直到 $f(z) \equiv 0$ 在包含 z^* 的圆内成立. 由于 z^* 是任意的, 此结论对整域 G 成立.

$$\therefore \text{在 } G \text{ 上, } f_1(z) \equiv f_2(z)$$

解(2): 由 $\frac{1}{2-3z} = n\pi$, 得:

$$z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3n\pi} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

是 $\sin \frac{1}{2-3z}$ 的零点. 此零点集的聚点是 $\frac{2}{3}$.

因为 $z = \frac{2}{3}$ 是 $\sin \frac{1}{2-3z}$ 的奇点, 而非解析点.

故 $\sin \frac{1}{2-3z}$ 不恒等于零. 与唯一性定理并不矛盾.

8. 设 z 是方程 $z = z_0 + a\varphi(z)$ ($a \neq 0$) 在圆 $K: |z - z_0| < R$ 内唯一的单根, 其中 $\varphi(z)$ 在闭圆 $\bar{K}: |z - z_0| \leq R$ 上解析. 且 $|a\varphi(z)| \leq r < R$. 求证:

$$\zeta = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [\varphi(z)]^n_{z=z_0}$$

证明:

设 $f(z) = z - z_0 - a\varphi(z)$, 其唯一零点设为 ζ .

则 $f(z) = (z - \zeta)g(z)$. 考虑积分:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{CR} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z[g(z) - (z - \zeta)g'(z)]}{(z - \zeta)g(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z}{z - \zeta} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{zg'(z)}{g(z)} dz = \zeta \end{aligned}$$

$$\text{即: } \zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{zf'(z)}{f(z)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z[1 - a\varphi'(z)]}{z - z_0 - a\varphi(z)} dz \quad (\text{注意到在 } CR \text{ 上 } |a\varphi(z)| < |z - z_0|)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z[1 - a\varphi'(z)]}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a\varphi(z)}{z - z_0} \right]^n dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{[z - z_0 + z_0][1 - a\varphi'(z)]}{z - z_0} \cdot \left[\frac{a\varphi(z)}{z - z_0} \right]^n dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \left[1 + \frac{z_0}{z - z_0} \right] \left[\frac{a\varphi(z)}{z - z_0} \right]^n dz -$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \left[1 + \frac{z_0}{z - z_0} \right] \left[\frac{a\varphi(z)}{z - z_0} \right]^n a\varphi'(z) dz$$

上式第一个积分为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a\varphi(z)]^n_{z=z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0}{n!} \frac{d^n}{dz^n} [a\varphi(z)]^n_{z=z_0}$$

第二个积分为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \left(1 + \frac{z_0}{z - z_0} \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n(n+1)}} d[a\varphi(z)]^{n+1} \quad (\text{分部积分})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{[a\varphi(z)]^{n+1}}{(z-z_0)^{n+1}} \left[\frac{n}{(z-z_0)^{n+1}} + \frac{z_0(n+1)}{(z-z_0)^{n+2}} \right] dz \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)n!} \frac{d^n}{dz^n} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^n \\
 \therefore \zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)n!} \frac{d^n}{dz^n} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^{n+1} \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0}{n!} \frac{d^n}{dz^n} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^{n+1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{n(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^n \\
 &+ z_0.
 \end{aligned}$$

$$\text{即: } \zeta = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a\varphi(z)]_{z=z_0}^n$$

9. 设函数 $f(z)$ 在 $|z| \leq R$ 上解析. 用 $M(r)$, $A(r)$ 分别表示 $|f(z)|$ 和 $\operatorname{Re} f(z)$ 在 $|z| = r$ 上的最大值. 求证: 当 $0 < r < R$ 时:

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

证明: 当 $f(z)$ 是常数时, 结论显然成立.

现设 $f(z)$ 不是常数, 且先设 $f(0) = 0$, 这时 $A(R) > A(0) = 0$.

$$\text{令: } \varphi(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}.$$

则因分母实部恒不为零, 故 $\varphi(z)$ 于 $|z| \leq R$ 上解析:

$\varphi(0) = 0$. 又如设 $f(z) = u + iv$ 则因:

$$-2A(R) + u \leq u \leq 2A(R) - u$$

$$\text{故: } |\varphi(z)|^2 = \frac{u^2 + v^2}{(2A(R) - u)^2 + v^2} \leq 1$$

由许瓦兹引理: $|\varphi(z)| \leq r/R$

所以: $|f(z)| = \left| \frac{2A(R)\varphi(z)}{1+\varphi(z)} \right| \leq \frac{2A(R)r}{R-r}$ 即得结果

如果 $f(0) \neq 0$ 则把已得的结果用于 $f(z) - f(0)$ 便有:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(0)| &\leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re} \{f(z) - f(0)\} \\ &\leq \frac{2r}{R-r} [A(R) + |f(0)|] \end{aligned}$$

$$\text{又} \because |f(z) - f(0)| \geq |f(z)| - |f(0)|$$

$$\begin{aligned} \text{从而: } |f(z)| &\leq \frac{2r}{R-r} [A(R) + |f(0)|] + |f(0)| \\ &= \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)| \text{ 即得结果} \end{aligned}$$

10. 设 Ω 为具有充分光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域. u 是 $\Omega + \partial\Omega$ 上充分光滑的函数. $u|_{\partial\Omega} = f$. f 在 $\partial\Omega$ 上充分光滑. 问如下问题:

(1), 设: φ 是 Ω 上调和函数. n 是 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的外法线.

证明:

$$\left[\int_{\partial\Omega} \left[f \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(n, x) + f \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(n, y) + f \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos(n, z) \right] ds \right]^2$$

$$\leq \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega$$

$$\leq \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\Omega.$$

(2). 设 u 是问题 $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$ 的解. $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$

是 Ω 上光滑到边界的调和函数序列. 试利用 $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

• 14 •

$\varphi_1, \dots$ 给出 $\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\Omega$ 的下界. 记这个下界为 μ_n , 试问对 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ 附加什么条件才能使:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\Omega \text{ 并解释其理由.}$$

解(1): 由 $u|_{\partial\Omega} = f$, Green公式及 Schwarz不等式可知:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\partial\Omega} [f \varphi_x \cos(n, x) + f \varphi_y \cos(n, y) + f \varphi_z \cos(n, z)] ds \right]^2 \\ &= \left[\int_{\partial\Omega} [u \varphi_x \cos(n, x) + u \varphi_y \cos(n, y) + u \varphi_z \cos(n, z)] ds \right]^2 \\ &= \left[\int_{\Omega} (u_x \varphi_x + u_y \varphi_y + u_z \varphi_z) d\Omega + \int_{\Omega} u \Delta \varphi d\Omega \right]^2 \\ &= \left[\int_{\Omega} (u_x \varphi_x + u_y \varphi_y + u_z \varphi_z) d\Omega \right]^2 \\ &\leq \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\Omega \int_{\Omega} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) d\Omega \end{aligned}$$

命题得证.

解(2): 由(1)可知, 对任何的 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 令:

$$\varphi = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k$$

$$\mu_n = \sup_{C_1, \dots, C_n} \frac{\left[\int_{\partial\Omega} [f \varphi_x \cos(n, x) + f \varphi_y \cos(n, y) + f \varphi_z \cos(n, z)] ds \right]^2}{\int_{\Omega} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) d\Omega}$$

$$\text{则: } \mu_n \leq \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\Omega$$

如果对任意的 $u \in C^2(\Omega)$ 及 $\varepsilon > 0$, 都有 N 存在, 当 $n > N$ 时, 总能选择系数 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ 使:

$$\sup_{(x, y, z) \in \Omega} \left| \sum_{k=1}^n C_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \varepsilon$$

$$\sup_{(x,y,z) \in \Omega} \left| \sum_{k=1}^n C_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \varepsilon$$

$$\sup_{(x,y,z) \in \Omega} \left| \sum_{k=1}^n C_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \right| < \varepsilon$$

则: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) d\Omega$

11. 对于调和函数

(1) 叙述并证明它的三维中值(平均值)定理.

(2) 求在单位圆内调和, 在圆周上满足条件 $u|_C = A \sin^2 \varphi$ 的函数.

解(1): 设 u 在以点 M_0 为中心, R 为半径的球内调和, 调和函数 u 在其定义域 D 内任一点 M_0 的值, 等于 u 在以 M_0 为中心而含于 D 内的唯一球面 $S_R^{M_0}$ 上积分的平均值. 即:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R^{M_0}} u ds$$

根据调和函数的基本积分公式

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right) ds$$

取 S 为以 M_0 为中心, R 为半径的球面. 则:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R^{M_0}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} ds - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_R^{M_0}} u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} ds$$

由 Green 第二公式

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dv = \oint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

取 $v=1$, 即得 $\oint \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$

所以: $\iint_{S_R^0} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} ds = \frac{1}{R} \iint_{S_R^0} \frac{\partial u}{\partial r} ds = 0$

即: $u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_R^{M_0}} u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} ds$

而: $\left. \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} \right|_{S_R^{M_0}} = -\frac{1}{r^2} \Big|_{S_R^{M_0}} = -\frac{1}{R^2}$

则: $u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_R^{M_0}} (-\frac{1}{R^2}) u ds = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R^{M_0}} u ds$ 证毕.

解(2): 其定解问题为:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \\ u|_S = A \sin^2 \varphi \end{cases} \quad S \text{ 为单位圆面}$$

考虑到 u 在原点的有界性, 由分离变量法可解得:

$$u(r, \varphi) = C + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) r^m \quad (r < 1)$$

由 $u(r, \varphi)|_{r=1} = A \sin^2 \varphi = \frac{A}{2} (1 - \cos 2\varphi)$

即: $C + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} \cos 2\varphi$

比较上述级数两边系数, 则有: $C = \frac{A}{2}$, $A_2 = -\frac{A}{2}$, 其余系数皆为零. 所以: $u(r, \varphi) = \frac{A}{2} (1 - r^2 \cos 2\varphi)$ 为所求的调和函数.

12. 设函数 $u(x, y, z)$ 在域 G 上连续, 且在含于 G 的任一球面 S_a 上满足平均值公式

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_a} u(M) ds$$

则函数 u 在 G 内调和.