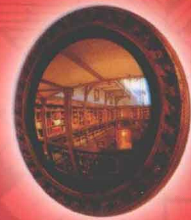
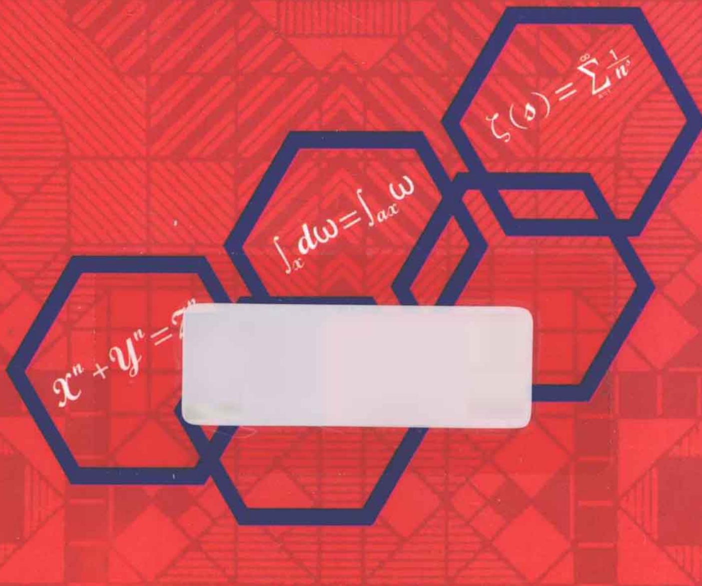
FULL STRATEGIES
OF ADVANCED MATHEMATICAL
PROBLEMS (II)



高等数学解题全攻略（下卷）

吴振奎　梁邦助　唐文广　编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

FULL STRATEGIES OF ADVANCED MATHEMATICAL PROBLEMS (II)

高等数学解题全攻略（下卷）

吴振奎　梁邦助　唐文广　编著

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

高等数学是大学理工科及经济管理类专业的重要基础课，是培养学生形象思维、抽象思维、创造性思维的重要园地.

本书从浩瀚的题海中归纳、总结出的题型解法，对同学们解题具有很大的指导作用. 书中的经典问题解析对教材的重点、难点进行了诠释，对同学们掌握这方面知识起到事半功倍的效果.

本书是针对考研、参加数学竞赛的同学撰写的，对在读的本科生、专科生及数学教师同仁也具有很高的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题全攻略. 下卷/吴振奎，梁邦助，唐文广编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.5

ISBN 978-7-5603-4073-9

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①吴…　②梁…　③唐…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—题解　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 090534 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　钱辰琛　刘家琳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 39.25　字数 1189 千字
版　　次　2013 年 5 月第 1 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-4073-9
定　　价　58.00 元

目　　录

线性代数篇

概率统计篇

线性代数篇

第 9 章

行 列 式

内 容 提 要

1. 矩阵

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的(m 行 n 列的)矩形数表

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫作 m 行 n 列的矩阵.简记为

$$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$$

其中 a_{ij} 叫作 $\mathbf{A}$ 的第 i 行、第 j 列元素.当 $m=n$ 时,称 $\mathbf{A}$ 为方阵,简称 n 阶矩阵.且记 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 为含实元素 $m\times n$阵的全体(集合).特别地,$1\times n$ 的矩阵称为向量,常记为 $\mathbf{R}^n$.

2. 行列式

(1)行列式的定义

行列式的定义有很多,其中较为直接的(构造性的)定义是

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1 i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\cdots\cdot a_{ni_n}$$

其中$(i_1 i_2\cdots i_n)$是数字 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列,$\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$为排列$(i_1 i_2\cdots i_n)$的**逆序数**.

矩阵(方阵)$\mathbf{A}$ 的行列式常记为 $\det \mathbf{A}$ 或简记成$|\mathbf{A}|$.

注 这里想再强调一点,矩阵与行列式的本质区别在于:行列式是数,而矩阵是一个数表.

对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 而言,若 $\mathbf{A}_{ij}$ 为 $\mathbf{A}$ 中划去第 i 行、第 j 列剩下的 $n-1$ 阶矩阵,则$(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$称为 a_{ij} 的**代数余子式**,它常简记成 A_{ij}.又 $\mathbf{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}$称为 $\mathbf{A}$ 的**伴随矩阵**.

(2)行列式的性质

①行、列互换(行变列、列变行),其值不变,即$|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$,这里 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的转置;

②交换行列式两行(或列)位置,行列式值变号;

③某数乘行列式一行(或列)诸元素等于该数乘行列式值;

④将某行(或列)的倍数加到另外一行(或列),行列式值不变;

⑤若两行(或列)对应元素成比例,则行列式值为零;

⑥(拉普拉斯(Laplace)展开)行列式可按某一行(或列)展开,且

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}\ |\boldsymbol{A}|$$

其中
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1 \leqslant i,j \leqslant n)$$

这里 δ_{ij} 称为克罗内克(Kronecker)符号.特别地,$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}(i = 1,2,\cdots,n)$.

注 拉普拉斯展开实际上是指行列式可以按照某几行(或列)展开,这里只是该展开的特例情形.

⑦若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

⑧$|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

⑨$|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异阵.

⑩$|a\boldsymbol{A}| = a^n|\boldsymbol{A}|$,其中 $a \in \mathbf{R}$,且 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

(3)行列式的常用计算方法

①用行列式定义(多用于低阶行列式);

②利用行列式性质,将行列式化成特殊形状(上三角形或下三角形);

③用拉普拉斯展开;

④利用不同阶数行列式间的递推关系(常结合数学归纳法);

⑤利用著名行列式(如范德蒙(A. T. Vandermonde)行列式)的展开式;

⑥利用矩阵性质(如矩阵变换分块及矩阵特征问题)等.

(4)几个特殊的行列式

①范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

它的推广情形为:

若 $f_k(x) = a_{k0}x^k + a_{k1}x^{k-1} + \cdots + a_{k,k-1}x + a_{kk}(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$,则

$$\begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_0(x_2) & \cdots & f_0(x_n) \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & f_{n-1}(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = D \cdot \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

其中 D 为 $f_k(x)(k=0,1,\cdots,n-1)$ 的系数组成的行列式.

②格拉姆(Gram)行列式

设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}) \in \mathbf{R}^n$,又 $a_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j$ 的内积,则

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

③循环(矩阵)行列式

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}(x_0+x_1\zeta^k+x_2\zeta^{2k}+\cdots+x_{n-1}\zeta^{(n-1)k})$$

这里 ζ 是 1 的 n 次原根 $e^{\frac{2\pi}{n}i}=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$($e^{\frac{2\pi}{n}i}$ 又可记为 $\exp\left\{\frac{2\pi}{n}i\right\}$).

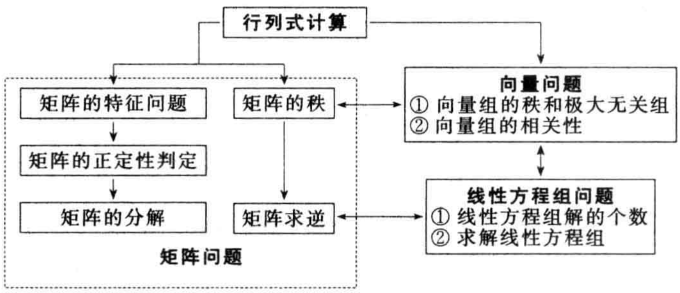
④交错矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0, & n\text{ 是奇数} \\ P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)^2, & n\text{ 是偶数} \end{cases}$$

这里 $P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)$ 是变量 x_{ij} 的多项式,称为普法弗(Pfaff)多项式.

经 典 问 题 解 析

计算行列式的本身,也许只是一种运算或技巧,它通常依据如何巧妙地运用行列式的性质来解决.然而就其问题本身来讲,似乎意义不大,关键还是在于它的应用.关于这一点可见下面的行列式的应用关系:



尽管如此,我们还是介绍一些较为经典的行列式计算问题.它的常用计算方法前文已述,下面来看例题.

1. 行列式计算问题

先来看一个稍简单的问题.

例 1 若 5 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}=a$,计算下面的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \frac{1}{b}a_{12} & \frac{1}{b^2}a_{13} & \frac{1}{b^3}a_{14} & \frac{1}{b^4}a_{15} \\ ba_{21} & a_{22} & \frac{1}{b}a_{23} & \frac{1}{b^2}a_{24} & \frac{1}{b^3}a_{25} \\ b^2a_{31} & ba_{32} & a_{33} & \frac{1}{b}a_{34} & \frac{1}{b^2}a_{35} \\ b^3a_{41} & b^2a_{42} & ba_{43} & a_{44} & \frac{1}{b}a_{45} \\ b^4a_{51} & b^3a_{52} & b^2a_{53} & ba_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

这里 $b\neq0$.

解 将 D 的第 1 行提出$\frac{1}{b^4}$,第 2 行提出$\frac{1}{b^3}$,第 3 行提出$\frac{1}{b^2}$,第 4 行提出$\frac{1}{b}$,得

$$D=\frac{1}{b^{10}}\begin{vmatrix} b^4a_{11} & b^3a_{12} & b^2a_{13} & ba_{14} & a_{15} \\ b^4a_{21} & b^3a_{22} & b^2a_{23} & ba_{24} & a_{25} \\ b^4a_{31} & b^3a_{32} & b^2a_{33} & ba_{34} & a_{35} \\ b^4a_{41} & b^3a_{42} & b^2a_{43} & ba_{44} & a_{45} \\ b^4a_{51} & b^3a_{52} & b^2a_{53} & ba_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

从上面行列式的第 1,2,3,4 列分别提出 b^4,b^3,b^2,b,有

$$D=\frac{b^{10}}{b^{10}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}=a$$

下面是一个十分典型的行列式计算问题.这里先介绍一下,至于它的解法,我们将在后文中给出.

例 2 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

该行列式以及与之相关的问题,可见全国研究生招生考试试题,它的变化、解法很多且很有代表性,详见后文.

下面是它的一个变形问题.

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解 将 D 的第 2 列到第 $n+1$ 列加到第 1 列,且提公因子,有

$$D=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} \quad \text{(行间相减)}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2-x & x-a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(x+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

注　该题曾为兰州大学 1981 年研究生入学考试试题. 下面的问题只是例 3 的变形或推广：

(1)计算行列式 $D=\begin{vmatrix}x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}$.

略解：将 D 的第 1 行乘 -1 加至其后各行，再按第 1 列展开，得

$$D=\begin{vmatrix}x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1-x & x-a_2 & 0 & \cdots & 0\\ a_1-x & 0 & x-a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1-x & 0 & 0 & \cdots & x-a_n\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}x-a_2 & & & \\ & x-a_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a_n\end{vmatrix}+(a_1-x)\begin{vmatrix}a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ & x-a_3 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & x-a_n\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{n+1}(a_1-x)\begin{vmatrix}a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ x-a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ & x-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & x-a_{n-1} & 0\end{vmatrix}$$

$$=x\prod_{k=2}^{n}(x-a_k)+\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{x-x_k}{x-x_i}\right)$$

(2)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x_1 & a & a & \cdots & a\\ b & x_2 & a & \cdots & a\\ b & b & x_3 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & b & \cdots & x_n\end{vmatrix}$.

略解:注意到 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ b & x_2 & a & \cdots & a \\ b & b & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & 0 \\ b & x_2 & a & \cdots & a & 0 \\ b & b & x_3 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b & x_n-a \end{vmatrix}$.

再按 $a\neq b$ 和 $a=b$ 两种情形分别计算行列式 D_n,有:

①当 $a\neq b$ 时,$D_n=\dfrac{1}{a-b}\left[a\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-b)-b\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)\right]$;

②当 $a=b$ 时,$D_n=x_1\prod\limits_{i=2}^{n}(x_i-a)+a\sum\limits_{j=2}^{n}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i-a}{x_j-a}\right)$.

(3)计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

它显然是例的特殊情形,也可由从第 n 行起后一行减去其前一行,然后将第 $2\sim n$ 列统统加到第 1 列,再按第 1 列展开即可. 计算详见后文,有

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{2}(n+1)n^{n-1}$$

下面的问题可视为前面例的推广或变形.

例 4 设 $a_k\neq 0(k=2,3,\cdots,n)$,计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2+a_2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a_3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & (n-1)+a_{n-1} & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n+a_n \end{vmatrix}$$

略解 1 将行列式第 1 行遍乘 $-k$ 加到第 k 行 $(k=2,3,\cdots,n)$,再将第 k 行遍乘 $-\dfrac{1}{a_k}(k=2,3,\cdots,n)$ 加到第 1 行,有

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -2a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -3a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -(n-1)a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -na_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+\left(1+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k}{a_k}\right)a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -3a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -(n-1)a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -na_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left[1+\left(1+\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{a_k}\right)a_1\right]a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_n$$

略解 2 将 D_n 先按第 1 列拆成两个行列式,且将其第 1 个行列式的首列乘 -1 后遍加到各列,有

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2+a_2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n+a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&1&\cdots&1\\0&2+a_2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&n&\cdots&n+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\2&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}+a_1D_{n-1}=a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_n+a_1D_{n-1}$$

递推地可有 $D_n=\sum\limits_{k=1}^{n}ka_1\cdot\cdots\cdot a_{k-1}a_{k+1}\cdot\cdots\cdot a_n+a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n$.

下面是一个三对角行列式(三对角矩阵行列式),它的解法也较典型,且有许多不同的变形(特例或推广).

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&&&&\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&&&\\&1&\alpha+\beta&\alpha\beta&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&\alpha+\beta&\alpha\beta\\&&&&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}$,这里 α,β 是给定的实数.

解 记所求行列式为 D_n,按其第 1 列展开有 $D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$,即

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

注意到 $D_1=\alpha+\beta,D_2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$,从而

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})=\beta^3(D_{n-3}-\alpha D_{n-4})=\cdots$$

$$=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^{n-2}[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)]=\beta^n$$

即
$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n$$

同理(或由 α,β 的对称性)有

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n$$

由上两式有

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n,\quad \alpha\neq\beta$$

其实,当 $\alpha=\beta$ 时直接可有 $D_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\beta^n$.

注 1 若能发现 $D_n=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\beta^n$,亦可用数学归纳法去证,然而发现此结论并非易事.

注 2 这是一个三对角行列式问题,全国研究生招生统考前,不少院校以它、它的特例或推广作为试题(详见后文).

注 3 下面的问题亦属此类行列式,它即可视为上面的三对角行列式的特例,也可另寻其他解法.

(1)试证 $D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha&1&&&&\\1&2\cos\alpha&1&&&\\&1&2\cos\alpha&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&1&2\cos\alpha&1\\&&&&1&2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

略证:用数学归纳法.

①$n=2$ 时,由 $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$,命题为真.

②设小于等于 $n-1$ 时命题为真,今考虑 n 的情形.

将 D_n 按最后一行展开,有

$$D_n=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}$$

由归纳假设及三角函数公式,并注意到 $\cos(n-2)\alpha=\cos[(n-1)-1]\alpha$,则有

$$D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha=\cos(n-1)\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha\sin\alpha$$

又由归纳假设 $D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha$,故

$$\begin{aligned} D_n &=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-1)\alpha\cos\alpha+\sin(n-1)\alpha\sin\alpha \\ &=\cos(n-1)\alpha\cos\alpha+\sin(n-1)\alpha\sin\alpha \\ &=\cos n\alpha \end{aligned}$$

从而命题对所有自然数 n 成立.

(2)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

略解:利用例的结论,注意到这里 $\alpha+\beta=0,\alpha\beta=1$,从而可有

$$D_n=\begin{cases} 0, & n=4k\pm1\text{ 时} \\ 1, & n=4k\text{ 时} \\ -1, & n=4k+2\text{ 时} \end{cases}$$

(3)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

略解:这里 $\alpha+\beta=-2,\alpha\beta=-1$. 从而 $D_n=n+1$.

下面的问题是例的推广情形.

(4)计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1+x & y & & & & \\ z & 1+x & y & & & \\ & z & 1+x & y & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & z & 1+x & y \\ & & & & z & 1+x \end{vmatrix}$,其中 $x=yz$.

略解:由 $D_n=(1+x)D_{n-1}-yzD_{n-2}=(1+x)D_{n-1}-xD_{n-2}$,有

$$D_n-D_{n-1}=x(D_{n-1}-D_{n-2})=\cdots=x^n$$

故

$$D_n=D_{n-1}+x^n=(D_{n-2}+x^{n-1})+x^n=\cdots=1+x+\cdots+x^n$$

注 4 下面的行列式

$$F_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -1 & 1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 & 1 \\ & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

当 $n=1,2,3,4,5,\cdots$ 时，可以给出著名的斐波那契(Fibonacci)数列 $1,2,3,5,8,13,\cdots$.

显然，由仿例的解法可得出 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$(这也是该数列本身的性质).

此外，结论还可由例的结论直接给出.

顺便讲一句，该数列的通项公式还可表示为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$. 这是用无理数的方幂表示某些整数的典例.

注 5 关于三对角矩阵行列式还可有下面的等式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & & & & \\ 1 & a_2 & b_2c_2 & & & \\ & 1 & a_3 & b_3c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & & & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

这是三对角矩阵行列式的一个有趣的性质.

注 6 该问题的推广情形如下：

(5)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & & & \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$.

略解：它利用递推公式 $D_n=(a_{n-1}+a_n)D_{n-1}-a_{n-1}^2D_{n-2}$，有

$$D_n=\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{a_j}\right)\cdot\prod_{i=0}^{n}a_i$$

(6)计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}$.

略解：当 $c=0$ 时，$D_n=a^n$. 当 $c\neq 0$ 时，行列式每行提出因子 c，则它可化为例的情形.

令 $\alpha+\beta=\dfrac{a}{c}$，$\alpha\beta=\dfrac{b}{c}$，有 $\alpha=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2c}$，$\beta=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2c}$.

当 $\alpha\neq\beta$ 时，$D_n=\dfrac{(a+\sqrt{a^2-4bc})^{n+1}-(a-\sqrt{a^2-4bc})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{a^2-4bc}}$；