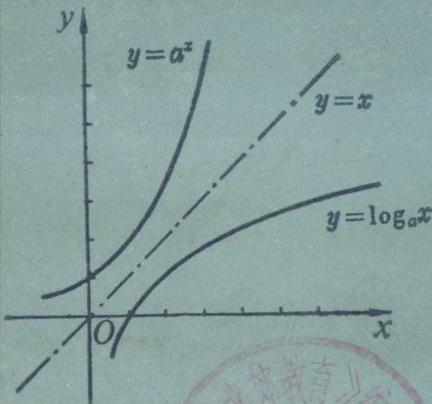
高中复习参考资料



数学

GAOZHONGFUXICANKAOZILIAO

天津教育出版社

高中复习参考资料

数　学

天津市教学研究室 编

天津教育出版社

高中复习参考资料
数　学
天津市教学研究室编
*
天津教育出版社出版
天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行
*
787×1092毫米　32开本　16.25印张　360千字
1985年2月第1版　1985年2月第1次印刷
书号：7348·31　定价：1.60元

说　明

本书是根据中学数学教学大纲和教育部制定的中学数学教学两类要求编写的．全书按知识内容分为代数、平面三角、立体几何、平面解析几何、导数和微分、积分等六个部分，其中导数和微分、积分是属于较高要求的部分．每一部分按知识系统分为若干单元，每个单元都有知识和技能提要，并选配了适量的典型例题和习题．习题分A、B两组，其中A组为基础题，B组是有一定难度的题或综合题．此外，各部分内容之后，附有复习检查题一至二套，全书之后附有总复习检查题六套（其中理科四套，文科两套）．各习题的答案或提示及复习检查题解附于书后，供参考．书中带“*”部分为选学内容．

参加本书编写的有：王连笑、张济华、张鼎言、齐家祥、戴宏祥、陆钦樾、郗昌盛、柳书诰、烟学敏、刘玉翘、窦广生、梁汝芳、郭菊英、李果民等同志，总复习检查题由市内六个区提供，全书由市教研室中数组编辑．

天津市教学研究室

一九八四年十二月

目　录

代　数

平面三角

立体几何

平面解析几何

导数和微分

积　　分

总复习检查题

习题答案或提示

代　　数

一 函　数

(一) 集合与对应

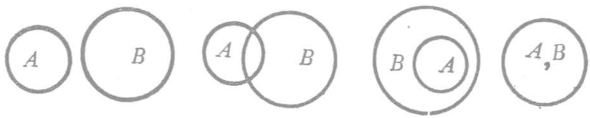
1. 集合的基本概念

集合是个整体的概念，它是数学中最原始的概念之一，它和点、直线、平面等概念一样，也是不定义概念(即不能用其他数学概念来定义它)，我们只能对它作描述性的说明.

(1) 集合与元素

概念	意　　　义
集合	把具有某种属性的一些对象看作一个整体便称为集合
元素	集合里的各个对象叫做这个集合的元素
有限集	含有有限个元素的集合叫做有限集
无限集	含有无限个元素的集合叫做无限集
属于	对于一个给定的集合 A 和确定的元素 x 之间只有以下两种情况: ① x 是 A 的元素，记为$x\in A$，读作“x属于A” ② x 不是 A 的元素，记为$x\notin A$，读作“x不属于A”
包含	若 $a\in A$ 总有 $a\in B$ 则 $A\subseteq B$，读作“A 含于B”或“B包含A”
相等	对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么，集合 A 和集合 B 就叫做相等，表示为$A=B$
空集	不含任何元素的集合叫做空集，记为$\varnothing$

(2) 表示法

名称	方　　　　　法
列举法	把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，如小于 5 的自然数的集合，可表示为$\{1,2,3,4\}$
描述法	把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律写在大括号内.这种表示方法可用大括号括起来的解析式来表示，也可以用大括号括起来的一句话来表示，如由不等式$x-5>2$的所有的解组成的集合可表示为$\{x\mid x-5>2\}$；所有等边三角形组成的集合，可表示为{等边三角形}特别要注意：$\varnothing$，0，$\{0\}$，$\{\varnothing\}$它们都是互不相同的.
图象法（韦恩图）	在同一平面内，用一条封闭曲线所围成的图形表示集合(图形的形状与集合性质无关)
两集合相互关系	 （不相交）　（相交）　（包含）　（重合）

（3）集合的特征

① 确定性，② 元素互异性，③ 元素无序性.

2. 子集、交集、并集、补集

概念	意　　义	性　　质
子集	如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 就叫做集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$. 若 B 中至少有一个元素不属于A，那么集合 A 就叫集合 B 的真子集，记为$A\subset B$	① $A\subseteq A$ ②若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$ 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$ ③ $\varnothing\subset A$
交集	由同时属于 A 和 B 的一切元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，表示为$A\cap B$	$A\cap A=A$ $A\cap\varnothing=\varnothing$
并集	由属于 A 或属于 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的并集，表示为 $A\cup B$	$A\cup A=A$ $A\cup\varnothing=A$
补集	若 $A\subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 的补集，表示为$\bar{A}$. I称为全集合	$A\cup\bar{A}=I$ $A\cap\bar{A}=\varnothing$

3. 对应

(1) 四种对应

一对一的对应、多对一的对应、一对多的对应、多对多的对应.

(2) 单值对应

概念	意　　义	说　　明
单值对应	设 A 与 B 是两个集合，如果按照某种对应关系，使 A 的任何一个元素，在 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应关系叫做从集合 A 到集合 B 的单值对应	①一对一的对应，多对一的对应都是单值对应，单值对应也叫做映射 ②在单值对应下，A 中的元素 a 所对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象
一一对应	设 A、B 是两个集合，f 是从集合 A 到集合 B 的单值对应，如果对于集合 A 的不同元素，在 B 中有不同的象，而且 B 中的每一个元素都有原象，这个单值对应就叫做从 A 到 B 的一一对应	一对一的对应不一定是一一对应
逆对应	设 f 是从集合 A 到集合 B 的一一对应，对于 B 中的每一个元素 b，使在 A 中 b 的原象 a 和它对应．这样所得的对应叫做对应 f 的逆对应．表示为 f^{-1}	①f 和 f^{-1} 互为逆对应 ②只有对于一一对应，我们才研究它的逆对应

(二) 函数

1. 有关函数的基本概念

(1) 函数的一般概念

① 定义:

如果对于集合 M 里的每一个元素 x，有集合 N 里唯一确定

的元素 y 与它对应，我们就说在集合 M 上已定义了一个函数 f，并记做 $y=f(x)$，通常说成 y 是 x 的函数，集合 M 里的元素 x 叫做自变量的值，集合 N 里与之对应的元素 y 叫做函数的值，集合 M 叫做函数的定义域，集合 N 叫做函数的值域.

② 函数概念中的两要素:

函数概念的实质就是“两个集合，一个对应”，即定义域和值域，以及从定义域到值域的单值对应.

③ 中学代数中函数定义域求法的三种典型情况:

(i) $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为：$x\neq 0$，

(ii) $y=\sqrt{x}$ 的定义域为：$x\geqslant 0$，

(iii) $y=\lg x$ 的定义域为：$x>0$.

(2) 函数的表示法

①解析法，②列表法，③图象法。

(3) 函数的分类

- 函数
  - 代数函数
    - 有理函数
      - 整式函数
      - 分式函数
    - 无理函数
  - 超越函数
    - 指数函数
    - 对数函数
    - 三角函数

(4) 三种重要的函数的性质

①增函数与减函数:

(i) 若 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)<f(x_2)$，我们就说 $f(x)$ 是增函数. 其函数的图形是上升的.

(ii) 若 $x_1<x_2$，则有 $f(x_1)>f(x_2)$，我们就说 $f(x)$ 是减函数，其函数的图象是下降的。

② 奇函数与偶函数:

(i) 对于定义域中的任意一个 x, 都有 $f(-x)=-f(x)$, 函数 $f(x)$ 就叫做奇函数, 其函数图象关于原点对称.

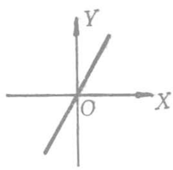
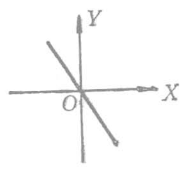
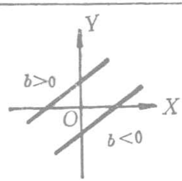
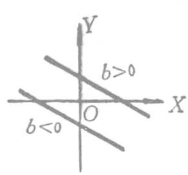
(ii) 对于定义域中的任意一个 x, 都有 $f(-x)=f(x)$, 函数 $f(x)$ 就叫做偶函数, 其函数图象关于 y 轴对称.

③ 反函数:

若函数 $y=f(x)$ 的对应关系 f 是一一对应, 则 f 的逆对应 f^{-1} 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫函数 $y=f(x)$ 的反函数. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

2. 一次函数

形如 $y=kx+b$ 的关于 x 的函数叫做一次函数, 其性质及图象见下表:

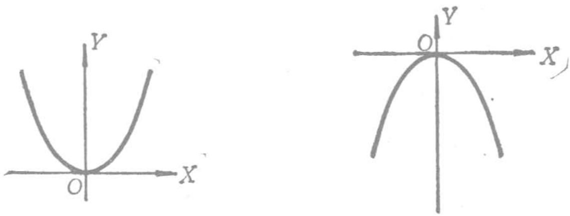
	$b=0$ (正比例函数 $y=kx$)	
	$k>0$	$k<0$
一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$		
	$b\neq0$ $(y=kx+b)$	
	$k>0$	$k<0$
		

3. 二次函数

(1) 定义　形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的关于 x 的函数叫做二次函数. $y=ax^2+bx$、$y=ax^2+c$ 和 $y=ax^2$ 都是特殊的二次函数.

(2) 图象

(i) $y=ax^2$ 的图象是以原点为顶点，y 轴为对称轴的抛物线(图 1-1)

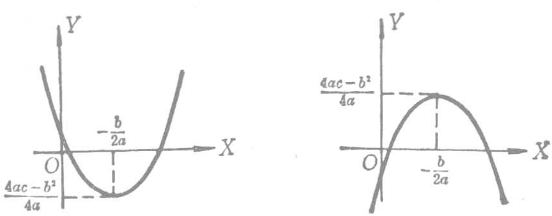


$a>0$　　　　$a<0$

图　1-1

(ii) $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

它的图象是以$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$为顶点，直线$x=-\dfrac{b}{2a}$为对称轴的抛物线(图 1-2).



$a>0$　　　　$a<0$

图　1-2

(iii) 函数$y=ax^2$与$y=ax^2+bx+c$的图象的位置关系如图 1-3(特例)所示.

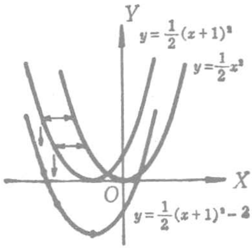


图 1-3

(3) 性质

(i) 顶点$\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$;

(ii) 对称性　对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$;

(iii) 图象的开口方向　当$a>0$时, 开口向上; 当$a<0$时, 开口向下;

(iv) 增减性

$$a>0\begin{cases}\text{当}x<-\dfrac{b}{2a}\text{时, 函数递减;}\\ \text{当}x>-\dfrac{b}{2a}\text{时, 函数递增.}\end{cases}$$

$$a<0\begin{cases}\text{当}x<-\dfrac{b}{2a}\text{时, 函数递增;}\\ \text{当}x>-\dfrac{b}{2a}\text{时, 函数递减.}\end{cases}$$

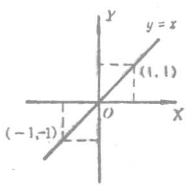
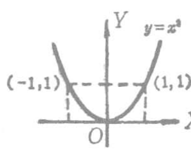
(v) 极值　当$x=-\dfrac{b}{2a}$时, 函数有极值$y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, 当$a>0$时, 函数有极小值; 当$a<0$时, 函数有极大值.

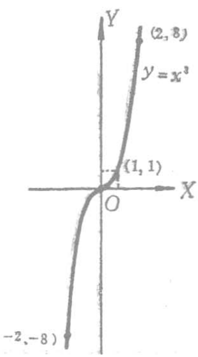
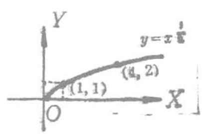
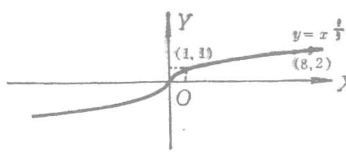
4. 幂函数

(1) 幂函数的概念及其典型函数分析

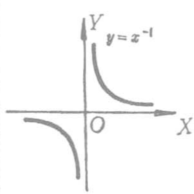
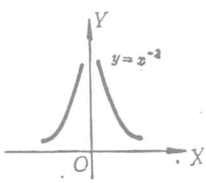
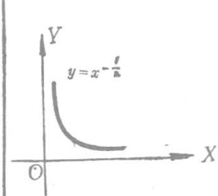
定义　形如$y=x^n$的函数叫做幂函数．这里x是自变量，n是常数(有理数)，定义域是使$y=x^n$有意义的实数集合．

幂函数典型分析

典型函数	$y=x$	$y=x^2$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值　域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$
图象所在象限	I, III	I, II
单调性	在$(-\infty,+\infty)$上是增函数	在$(-\infty,0]$上是减函数 在$[0,+\infty)$上是增函数
奇偶性	奇函数	偶函数
关键点	(0, 0) (1, 1)	(0, 0), (1, 1), (−1, 1)
图象		
性质	$n>0$	
	1. 图象经过两个点(0, 0), (1, 1) 2. 在第I象限即在$[0,+\infty)$上是增函数	

<table>
<tr><td>典型函数</td><td>$y=x^3$</td><td>$y=x^{\frac{1}{2}}$</td><td>$y=x^{\frac{1}{3}}$</td></tr>
<tr><td>定义域</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td><td>$[0, +\infty)$</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td><td>$[0, +\infty)$</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>图象所在象限</td><td>I, III</td><td>I</td><td>I. III</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>在$(-\infty, +\infty)$上是增函数</td><td>在$[0, +\infty)$上是增函数</td><td>在$(-\infty, +\infty)$上是增函数</td></tr>
<tr><td>奇偶性</td><td>奇函数</td><td>非奇非偶函数</td><td>奇函数</td></tr>
<tr><td>关键点</td><td>(0, 0), (1, 1), (2, 8), (−1, −1), (−2, −8)</td><td>(0, 0) (1, 1), (4, 2)</td><td>(0, 0), (1, 1), (8, 2) (−1, −1), (−8, −2)</td></tr>
<tr><td>图象</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">性质</td><td colspan="3">$n>0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">同 上 页</td></tr>
</table>

续表 2

典型函数	$y=x^{-1}$	$y=x^{-2}$	$y=x^{-\frac{1}{2}}$
定义域	$(-\infty,0),(0,+\infty)$	$(-\infty,0),(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,0),(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
图象所在象限	Ⅰ,Ⅲ	Ⅰ,Ⅱ	Ⅰ
单调性	在$(-\infty,0)$或者$(0,+\infty)$上是减函数	在$(-\infty,0)$上是增函数 在$(0,+\infty)$上是减函数	在$(0,+\infty)$上是减函数
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶函数
关键点	$(1,1),(-1,-1)$ $\left(\frac{1}{2},2\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ $\left(2,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$	$(1,1),(-1,1)$ $\left(2,\frac{1}{4}\right)$, $\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{2},4\right)$, $\left(-\frac{1}{2},4\right)$	$(1,1)$ $\left(\frac{1}{4},2\right)$, $\left(4,\frac{1}{2}\right)$
图象			
性质	$n<0$		
	1. 图象经过$(1,1)$，不过原点 2. 在第Ⅰ象限即在$(0,+\infty)$上是减函数		