现代数学基础

38 李代数（第二版）

■ 万哲先 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

38

李代数（第二版）

L I D A I S H U

■ 万哲先　编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

1961年秋至1963年春，作者在中国科学院数学研究所陆续作了关于李群和李代数的专题报告。由于当时国内缺少系统且全面介绍李代数的书籍，作者在这些报告的基础上，补充内容，将其改编成了本书的第一版。书中系统地叙述了复半单李代数的经典理论，即它的结构、自同构、表示和实形。时至今日，本书仍是学习李代数标准的、全面的教科书或教学参考书。本书仅要求作者具备线性代数知识。

在此次的修订中，作者对本书的体例格式进行了便于查询的修改，改正了第一版某些排版错误，并修改了部分定理的证明，使得本书结构更清晰，更具可读性。

图书在版编目（CIP）数据

李代数 / 万哲先编著 . -- 新 1 版 . -- 北京 : 高等教育出版社，2013. 6

ISBN 978-7-04-037266-3

Ⅰ. ①李…　Ⅱ. ①万…　Ⅲ. ①李代数　Ⅳ. ① O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 075457 号

策划编辑　王丽萍　　责任编辑　李　鹏　　封面设计　张　楠　　版式设计　余　杨
责任校对　孟　玲　　责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	18.25	版　　次	2013年6月第1版
字　　数	340 千字	印　　次	2013年6月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	59.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　37266-00

第二版序

本书 1964 年由科学出版社出版, 1972 年商务印书馆香港分馆又再次出版. 1975 年本书英译本由英国 Pergamon 出版社出版. 1978 年科学出版社又发行了第二次印刷本.

现在高等教育出版社出版了第二版. 在这一版中, 作者对本书的体例格式进行了便于查询的修改, 改正了第一版某些排版错误, 并修改了部分定理的证明, 使得本书结构更清晰, 更具可读性. 在出版过程中, 高等教育出版社的王丽萍、李鹏等同志给我热情、耐心与细微的帮助. 我谨对他们表示衷心的感谢.

万哲先

2013 年 5 月

初 版 序

1961 年秋至 1963 年春作者在中国科学院数学研究所李群讨论班上陆续作了一些专题报告, 本书就是根据这些报告的讲稿改编而成. 内容包括复半单李代数的经典理论, 即它的结构、自同构、表示和实形. 当时, 作者的目的是和参加讨论班的同志们共同学习李代数的基础知识, 为进一步学习李群及李代数的近代文献打下基础. 这些专题报告, 主要参考邓金的《半单纯李氏代数的结构》(曾肯成译, 科学出版社, 北京, 1954) 和 Seminaire Sophus Lie 的讲义 *Théorie de algèbres de Lie et topologie de groupes de Lie* (Paris, 1955). 邓金的书叙述清楚, 易于被初学者领会, 遗憾的是内容太少; Seminaire Sophus Lie 的讲义内容较丰富, 但是要求读者具有较多的预备知识. 两书虽各具优点, 但都不能完全满足我国初学者的需要, 于是, 作者就想到要写一本适应这种需要的书. 这就是这本书的来历.

李代数是 S. Lie 作为研究后来以他命名的李群的代数工具而引进的. 在李代数经典理论方面有重要贡献者, 除 S. Lie 本人外, 当推 W. Killing, E. Cartan 和 H. Weyl 等人. 虽然本书为了初学者的方便, 在叙述上尽可能少地涉及李群, 却应该指出, 李代数经典理论的重要性主要在于它对李群的应用. 另一方面, 本书的大部分内容, 都已推广到特征 0 的代数封闭域上的李代数, 而且一部分结果也已推广到特征 0 的任意域上的李代数. 但我们在本书中却仅对复数域上的李代数来叙述, 这是因为复数域上的李代数理论是最基本的, 同时只要求读者具备线性代数知识就能阅读本书绝大部分内容也是一个限制.

作者感谢参加李群讨论班的同志们. 当作者报告时, 他们的意见以及和他们共同讨论使作者学到很多东西, 也使本书的某些叙述得以改进并消除了许多错误. 作者特别感谢李根道先生, 他还帮助作者校对本书.

万哲先

1963 年 4 月

现代数学基础　图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	21717-9	代数和编码（第三版）	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析（第二版）	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论（第二版）	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程（第二版）	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析（第二版）	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步（第三版）	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	26547-7	微分方程与数学物理问题	[瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论（第二版）	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著

续表

	书号	书名	著译者
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论（修订版）	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论——从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37525-6	伽罗瓦理论——天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数（第二版）	万哲先 编著

目 录

第一章　基本概念

§1　李　代　数

定义 1.1　设 $\mathfrak{g}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维向量空间 (或称线性空间), 并设在 $\mathfrak{g}$ 中定义了一个求换位元素的运算 (简称换位运算), 即对于 $\mathfrak{g}$ 中任意二元素 X 和 Y, $\mathfrak{g}$ 中都有唯一的一个元素与之相应. 这个元素记作 $[X,Y]$, 称为 X 和 Y 的换位元素. 再设这个换位运算满足以下条件:

I. $[\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2, Y]=\lambda_1[X_1,Y]+\lambda_2[X_2,Y]$, 对任意 $X_1,X_2,Y\in\mathfrak{g}$ 及任意复数 λ_1,λ_2.

II. $[X,Y]=-[Y,X]$, 对任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$.

III. $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$, 对任意 $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$.

这时 $\mathfrak{g}$ 就称为复数域上的李代数, 简称为复李代数, 有时更简称为李代数. 向量空间 $\mathfrak{g}$ 的维数称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的维数, 记作 $\dim\mathfrak{g}$.

条件 I 是说换位运算对于第一个因子是线性的. 利用 II, 可以从 I 推出换位运算对于第二个因子也是线性的:

I′. $[X,\lambda_1 Y_1+\lambda_2 Y_2]=\lambda_1[X,Y_1]+\lambda_2[X,Y_2]$, 对任意 $X,Y_1,Y_2\in\mathfrak{g}$ 及任意复数 λ_1,λ_2.

其次, 利用 II, 又可以从 III 推出

III′. $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$.

也可以将 III 写成

III″. $[X,[Y,Z]]=[[X,Y],Z]+[Y,[X,Z]]$.

通常我们将条件 III 称为 Jacobi 恒等式. 最后在 II 中置 $X = Y$, 我们有

II′. $[X, X] = 0$, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$.

我们举出下面几个例子.

例 1.1　设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的任一有限维向量空间. 对于任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 定义 $[X, Y] = 0$, 这时 I, II, III 自然成立. 于是 $\mathfrak{g}$ 成为一个李代数, 我们称 $\mathfrak{g}$ 是个交换李代数.

一般地, 李代数 $\mathfrak{g}$ 中如有两个元素 X 和 Y, 具有性质 $[X, Y] = 0$, 我们就说 X 和 Y 交换.

例 1.2　设 V_3 是 $\mathbb{C}$ 上三维向量空间, 而 e_1, e_2, e_3 是 V_3 的一组基, 于是 V_3 中任一元素 x 皆可写作

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

再设 $y \in V_3$, 可将 y 写作

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3.$$

定义

$$[X, Y] = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3,$$

则 V_3 对于如此定义的换位运算组成一个李代数.

例 1.3　设 $\mathfrak{g}_3$ 是 $\mathbb{C}$ 上 3×3 斜对称矩阵的全体, $\mathfrak{g}_3$ 可看作 $\mathbb{C}$ 上的向量空间. 如果对于任意 $X, Y \in \mathfrak{g}_3$, 定义 $[X, Y] = XY - YX$, 则 $\mathfrak{g}_3$ 就成为一个李代数.

我们可以在 $\mathfrak{g}_3$ 中选一组基

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$[M_1, M_2] = M_3, \quad [M_2, M_3] = M_1, \quad [M_3, M_1] = M_2.$$

而 $\mathfrak{g}_3$ 中任一矩阵 X 可写作

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} = x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3.$$

设

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} = y_1M_1 + y_2M_2 + y_3M_3,$$

则

$$[X,Y]=(x_2y_3-x_3y_2)M_1+(x_3y_1-x_1y_3)M_2+(x_1y_2-x_2y_1)M_3.$$

因之从 V_3 到 $\mathfrak{g}_3$ 的映射

$$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\mapsto X=x_1M_1+x_2M_2+x_3M_3$$

是一一映射且具有性质:

1) 如 $x\mapsto X, y\mapsto Y$, 则对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}, \lambda x+\mu y\mapsto\lambda X+\mu Y$;

2) 如 $x\mapsto X, y\mapsto Y$, 则 $[x,y]\mapsto[X,Y]$.

这就是说, V_3 和 $\mathfrak{g}_3$ 具有相同的代数结构.

一般说来,

定义 1.2 从李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 之上的一一映射 $X\mapsto Y$, 称为同构, 如果它满足下述条件:

1) 如 $X_1\mapsto Y_1, X_2\mapsto Y_2$, 则对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}, \lambda X_1+\mu X_2\mapsto\lambda Y_1+\mu Y_2$.

2) 如 $X_1\mapsto Y_1, X_2\mapsto Y_2$, 则 $[X_1,X_2]\mapsto[Y_1,Y_2]$.

这时我们也说 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 同构, 记作 $\mathfrak{g}_1\approx\mathfrak{g}_2$. 特别, 从李代数 $\mathfrak{g}$ 到自身之上的同构称为自同构.

李代数的基本问题之一就是定出所有互不同构的李代数.

设 $\mathfrak{g}$ 是 r 维李代数, 并设 $X_1,\cdots,X_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 假定

$$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{r}c_{ij}^kX_k,\quad 1\leqslant i,j\leqslant r,$$

则 $\mathfrak{g}$ 中任意两个元素的换位元素可利用 c_{ij}^k 这 r^3 个常数计算出来, 即如 $X=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_iX_i, Y=\sum\limits_{j=1}^{r}\mu_jX_j$, 则

$$[X,Y]=\sum_{i,j,k=1}^{r}\lambda_i\mu_jc_{ij}^kX_k. \tag{1.1}$$

这样, c_{ij}^k $(i,j,k=1,2,\cdots,r)$ 这 r^3 个数就称为 $\mathfrak{g}$ 的一组结构常数. 不难验证, $\mathfrak{g}$ 的一组结构常数 c_{ij}^k 满足以下关系式:

1) $c_{ij}^k=-c_{ji}^k, 1\leqslant i,j,k\leqslant r$,

2) $\sum\limits_{s=1}^{r}(c_{ij}^sc_{sk}^l+c_{jk}^sc_{si}^l+c_{ki}^sc_{sj}^l)=0, 1\leqslant i,j,k,l\leqslant r.$

反之, 设 $\mathfrak{g}$ 是 r 维向量空间, c_{ij}^k $(i,j,k=1,2,\cdots,r)$ 是 r^3 个常数且满足上述条

件 1) 和 2). 如果在 $\mathfrak{g}$ 中选一组基 $X_1, \cdots, X_r$, 并利用 (1.1) 式来定义 $\mathfrak{g}$ 中两个元素 $X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i$ 和 $Y = \sum_{j=1}^{r} \mu_j X_j$ 的换位元素, 可以证明 $\mathfrak{g}$ 对于这样定义的换位运算组成一个李代数.

显而易见, 可选取同构的李代数的基, 使它们可以有同一组结构常数, 而且有相同的结构常数组的李代数必同构. 另一方面, 李代数的结构常数组依赖于基的选取. 设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的另一组基, 假定

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{r} c'^k_{ij} Y_k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant r.$$

设

$$Y_i = \sum_{j=1}^{r} a_i^j X_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

而 $\det(a_i^j) \neq 0$, 于是有

$$\sum_{k=1}^{r} c'^k_{ij} a_k^l = \sum_{s,t=1}^{r} a_i^s a_j^t c_{st}^l, \quad 1 \leqslant i, j, l \leqslant r. \tag{1.2}$$

因此, 两个李代数同构当且仅当它们的结构常数组 c_{ij}^k 和 c'^k_{ij} 适合关系式 (1.2), 其中 (a_i^j) 为一非异矩阵.

最后, 我们再举出下面的例子.

例 1.4　设 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}$ 上所有 $n \times n$ 矩阵的集合. 我们知道 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 对于矩阵加法及数乘矩阵的乘法组成 $\mathbb{C}$ 上的一个 n^2 维向量空间. 现在对于任意 $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 定义

$$[X, Y] = XY - YX,$$

则 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 组成一李代数.

$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 亦可看作由 $\mathbb{C}$ 上某一 n 维向量空间 V 上的一切线性变换所组成, 这时常记作 $\mathfrak{gl}(V)$. 有时我们采用这一观点, 有时则采用另一观点, 读者可从上下文自明, 因而常不加特殊声明.

§2　子代数, 理想, 商代数

设 $\mathfrak{g}$ 是李代数, $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子集. 以 $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ 表由 $\mathfrak{g}$ 中一切形如 $M + N (M \in \mathfrak{m}, N \in \mathfrak{n})$ 的元素所张成的向量子空间; 以 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ 表由 $\mathfrak{g}$ 中一切形如 $[M, N] (M \in \mathfrak{m}, N \in \mathfrak{n})$ 的元素所张成的向量子空间. 设 $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的子空间, 则有以下诸性质: