



高等学校智能科学与技术专业“十二五”规划教材

机器人学简明教程

张奇志 周亚丽 编著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

高等学校智能科学与技术专业“十二五”规划教材

机器人学简明教程

张奇志 周亚丽 编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书简明地介绍了机器人学最基础也是最重要的内容,主要包括绪论,空间描述与坐标变换,机器人运动学,机器人逆运动学,速度与静力学关系,机器人动力学,机器人路径规划,驱动器与传感器,机器人控制等内容。在附录中介绍了双连杆平面机械手跟踪控制 Matlab 程序和 Puma 机械手逆运动学 Matlab 程序。本书写作力求简明扼要,并通过例题和仿真帮助读者理解理论内容。

本书可作为普通高等学校工科相关专业高年级学生的机器人学教材,也可以供从事机器人相关研究和开发的教师、研究生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机器人学简明教程/张奇志,周亚丽编著. —西安:西安电子科技大学出版社,2013.3

高等学校智能科学与技术专业“十二五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3020 - 5

I. ① 机… II. ① 张… ② 周… III. ① 机器人学—高等学校—教材

IV. ① TP24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 028147 号

策划编辑 邵汉平

责任编辑 马武装 邵汉平

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 西安文化彩印厂

版 次 2013年4月第1版 2013年4月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 8.5

字 数 196千字

印 数 1~3000册

定 价 17.00元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3020 - 5/TP

XDUP 3312001 - 1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

机器人技术是近年来得到广泛关注的研究领域，中国、日本、韩国和欧盟等各国都将机器人技术列入了国家科技发展规划。工业机器人、医疗机器人已经得到了广泛的应用，随着人口的老龄化，服务机器人也得到了越来越多的重视。“机器人学”是机械电子、自动控制、计算机和人工智能等学科交叉形成的学科，是目前世界范围内受到广泛关注的学科领域。

“人工智能”和“机器人学”关系紧密，机器人被认为是人工智能研究的最佳平台，智能机器人可以完美展示人工智能的研究成果，使人工智能研究得到更广泛的认同。

目前，机器人学课程比较著名的教材主要有美国斯坦福大学 John J. Craig 教授的《机器人学导论》和中南大学蔡自兴教授的《机器人学基础》。这两本经典教材主要以机械手为对象，详细介绍了机器人运动学、动力学和控制等机器人学的基本原理。其中蔡自兴教授在《机器人学基础》中对人工智能与机器人学的关系进行了深入的分析与论述。但是这两本教材也存在难度较大，所需课时数较多等问题。

本书作者为北京信息科技大学“模式识别与智能系统”硕士专业学生和“智能科学与技术”本科专业学生讲授了多次“机器人学”相关课程，在教学中深感为了满足教学时数缩减和大众化高等教育的需求，有必要编写一本简明教程。本书就是作者为此所做的努力的成果。

本书精选了机器人学的经典内容，并结合作者多年从事机器人研究的经验介绍了机器人学的一些新成果。机器人的发展与传感器和驱动技术的发展紧密相关，近年来微软的 3D 传感器 Kinect、激光扫描雷达等已经广泛应用于机器人平台。由于本书侧重于基础，故没有对此进行专门的介绍。

本书是在北京信息科技大学教务处、自动化学院领导和教师的支持下完成的。其中第 8 章驱动器与传感器由周亚丽编写，其余各章由张奇志编写。本书的出版得到了北京市属高等学校人才强教深化计划——模式识别与智能系统学术创新团队项目(PHR201106131)和北京信息科技大学教学改革项目(2010JG15, 2011JGYB12)的资助。

虽然作者进行了反复修改，但因为水平所限，不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。

张奇志

2012 年 10 月 8 日

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 机器人的由来	(1)
1.2 机器人的分类	(1)
1.3 机器人的学科领域	(2)
1.4 机器人的发展趋势	(3)
1.5 机器人的基本结构	(5)
1.6 本书的主要内容	(6)
第 2 章 空间描述与坐标变换	(7)
2.1 位置姿态表示与坐标系描述	(7)
2.2 坐标变换	(9)
2.3 齐次坐标变换	(12)
2.4 齐次变换算子	(12)
2.5 复合变换	(14)
2.6 齐次变换的逆变换	(15)
2.7 变换方程	(17)
2.8 姿态的欧拉角表示	(19)
习题	(23)
第 3 章 机器人运动学	(25)
3.1 双轮移动机器人运动学	(25)
3.2 三轮全向移动机器人运动学	(26)
3.3 平面机械臂运动学	(27)
3.4 空间机械臂连杆描述	(29)
3.5 空间机械臂连杆坐标系选择	(30)
3.6 空间机械臂运动学	(32)
3.7 PUMA560 工业机器人运动学	(34)
3.8 坐标系的标准命名规则	(37)
习题	(38)
第 4 章 机器人逆运动学	(39)
4.1 逆运动学问题的可解性	(39)
4.2 欧拉变换解	(40)
4.3 PUMA560 逆运动学	(41)

习题	(44)
第 5 章 速度与静力学关系	(45)
5.1 速度的符号表示	(45)
5.2 刚体的线速度和角速度	(46)
5.3 机器人连杆间速度传递	(47)
5.4 机器人雅可比矩阵	(49)
5.5 机器人静力关系	(50)
习题	(53)
第 6 章 机器人动力学	(54)
6.1 刚体定轴转动与惯性矩	(54)
6.2 刚体的惯性张量	(55)
6.3 刚体的牛顿-欧拉方程	(57)
6.4 拉格朗日方程	(58)
6.5 双足机器人动力学	(62)
习题	(66)
第 7 章 机器人路径规划	(68)
7.1 移动机器人路径规划	(68)
7.2 机械臂路径规划	(70)
习题	(80)
第 8 章 驱动器与传感器	(81)
8.1 直流伺服电动机	(81)
8.2 舵机	(90)
8.3 旋转编码器	(102)
习题	(106)
第 9 章 机器人控制	(107)
9.1 反馈与闭环控制	(107)
9.2 二阶系统控制	(108)
9.3 控制律的分解	(109)
9.4 轨迹跟踪控制	(110)
9.5 单关节控制	(112)
9.6 机械臂非线性控制	(113)
习题	(123)
附录	(124)
附录 1 双连杆平面机械手跟踪控制 Matlab 程序	(124)
附录 2 Puma 机械手逆运动学 Matlab 程序	(127)
参考文献	(129)

第1章 绪 论

1.1 机器人的由来

机器人(Robot)一词首次出现在捷克作家 K. Capek 1920 年的科幻剧《罗萨姆的万能机器人》中, Robot 是剧中的人造劳动者。1950 年, 美国科幻小说家阿西莫夫在他的小说《我是机器人》中提出了机器人必须遵守的“三准则”:

第 1 准则: 机器人不得伤害人类, 或坐视人类受到伤害。

第 2 准则: 机器人必须服从人类命令, 与第 1 准则相违背的情况除外。

第 3 准则: 机器人必须保护自己不受伤害, 与第 1、2 准则相违背的情况除外。

这三个准则也是机器人研究和开发中应该遵守的机器人三定律。

最早得到应用的机器人是工业机器人, 1962 年, 美国万能自动化公司的第一台机器人(机械手)Unimate 在美国通用汽车公司投入使用, 这标志着第一代机器人的诞生。从 20 世纪 70 年代开始, 日本购买美国专利技术生产了大量的工业机器人, 并在汽车制造等工业领域广泛应用机器人。工业机器人的使用极大地提高了汽车生产线的工作效率, 使得美国和日本汽车生产在当时占据了主导地位。20 世纪 80 年代以后, 随着机械电子技术、计算机软硬件技术的发展, 机器人的应用从工业机器人扩展到了非常广阔的领域, 水下机器人、空间机器人、空中机器人、服务机器人、微小型机器人等各种用途的机器人相继问世。

虽然机器人已经得到了非常广泛的应用, 但是关于什么是机器人并没有公认的统一定义。一般把模拟人类的外形、认知和决策等功能的人造机器称为机器人。例如, 目前广泛应用的工业机器人主要模拟的是人类手臂的动作和功能。

1.2 机器人的分类

机器人的分类方法非常多, 按照不同的分类标准可以得到不同的机器人类别。例如, 可以按模拟人类功能分为工业机器人(手)、移动机器人(脚)和视觉机器人(眼); 也可以根据机器人的结构分为直角坐标机器人、关节机器人和轮式机器人等。根据智能程度则可以将机器人分为以下三类:

示教再现机器人: 示教再现与声音和视频的录放含义相同。设置机器人完成工作任务的方法是通过手工或者遥控方式操纵机器人运动, 在关键点处记录机器人的位置(相当于录音)。进行作业时把记录的动作再现, 即机器人顺序跟踪记忆的位置。因为示教再现机器人能自由地示教动作, 所以它可以应用于各种各样的作业, 如汽车厂的点焊作业等。因为该类机器人只是简单地重复示教时记忆的动作, 所以没有什么智能可言。

感觉控制机器人：这类机器人带有传感器，能对自身的状态和周围的环境进行感知，并对感知信息做出反应。例如带力传感器的工业机器人，当它与环境接触时可以做出相应的反应以避免发生强烈的冲击。另外，一些带有视觉传感器的机器人可以根据视觉信息完成跟踪和避障等任务。该类机器人具有感知—动作型的智能，即能对外界刺激做出反应，属于具有低级智能的机器人。

智能机器人：这类机器人能够通过传感器主动采集工作环境信息，并借助其自我决策推理能力做出相应的动作，如生产线上能对零件进行识别的装配机器人，以及具有学习能力的机器人等。这类机器人能够模拟人的识别能力或者学习能力，是目前机器人研究的主要方向。

另外根据机器人的用途还可以将其分为以下几类：

工业机器人：主要应用在制造领域，多用于完成焊接、喷漆、物料搬运和产品检测等工作任务。

极限作业机器人：工作于人类难以承受的工作环境，如完成清理核废料、太空及海底探索作业等任务的机器人。

军事机器人：用于进攻或防御目的的各种机器人，如扫雷机器人。其中的无人飞机近年来发展非常快，已经成功运用于空中侦察、地面目标攻击等军事任务。

服务机器人：用于医疗和家庭服务，完成病人护理、辅助诊断、手术等任务。服务机器人将继工业机器人之后成为需求最为旺盛的机器人。

娱乐机器人：各种机器人玩具，日本在该领域处于领先地位，中国也有一些公司从事该方面的工作，已经开发出多种机器人玩具。

1.3 机器人的学科领域

机器人学是目前研究十分活跃且被广泛应用的技术之一，机器人学的研究水平已经成为衡量一个国家科学技术水平的重要标志之一。机器人学也是一个典型的多学科交叉研究领域，内容涉及机械学、电子学、控制科学、计算机科学、人工智能和生命科学等多个学科。下面是一些与机器人相关的比较重要的研究领域。

(1) 传感器与感知系统。该领域主要研究适合机器人应用的传感器。构建机器人环境识别认知系统是机器人学研究的重要领域。目前，机器人的认知水平还相对较低，多数成功的应用还是在具有很强的约束下完成的。例如机器人比赛的环境识别还是依靠颜色，而且使用的方法与人类的认知过程相去甚远。

(2) 驱动器与控制系统。该领域主要研究适合机器人应用的驱动器。机器人应用要求驱动器小型化，同时具有比较大的输出功率。目前机器人常用的高性能驱动器——小型直流伺服电机和舵机还远没有达到理想要求，类人机器人关节质量占总体质量的比例还是非常高的。目前机器人主要采用位置伺服控制，与动物的运动控制系统具有非常明显的差别。

(3) 机器人用计算机系统。单片机或 DSP 类的系统开发比较困难，而且经常达不到机器人系统的性能要求。通用的笔记本电脑对于一些机器人系统来说，质量和体积还是太

大,且通用计算机的大多数功能对机器人系统是没用的。因此,开发质量轻、体积小、计算能力强且方便开发的机器人用计算机系统对机器人的研究和应用是非常重要的。

(4) 机器人应用系统。不论任何研究,必须有实际的应用需求,尤其是成功的商业应用才具有强大的生命力。机器人发展初期工业机器人的广泛应用对机器人研究发展的巨大推动作用就是最好的例证。采用机器人技术来解决实际问题是机器人研究的最主要课题之一。

1.4 机器人的发展趋势

随着相关领域研究和技术的快速发展,机器人已经从初期的固定基座工业机器人发展到轮式移动机器人、足式行走机器人和飞行机器人等诸多领域。机器人的研究和应用几乎涵盖了社会生活的各个领域。

目前机器人研究有两条主线:一条是以日本为主导的娱乐机器人研究,另一条是以欧美为主导的服务机器人研究。

1. 娱乐机器人研究

日本近年来研究开发了多种娱乐机器人,其中最著名的当属本田公司的类人机器人“Asimo”。“Asimo”从形态到动作都比较好地模拟了人类,可以完成跑步、上楼梯和与人类交流等任务(见图1-1)。“Asimo”机器人的控制系统基本属于位置伺服控制,首先根据稳定性、期望动作等约束规划各关节的期望轨迹,然后采用高性能的伺服电机实现关节轨迹跟踪。另外, Sony 公司的类人机器人可以完成优美的舞蹈动作,早期用于机器人比赛的机器狗也非常具有娱乐效果。



图1-1 “Asimo”表演踢球

2. 服务机器人研究

欧美在机器人学的研究方面选择了与日本不同的路线,研究的重点是机器人的服务应用领域,其中比较有影响的是波士顿动力实验室2005年开发并向外界发布的四足机器人“BigDog(大狗)”。“大狗”可以在崎岖的山路甚至光滑的冰面上稳定行走,在试验中工作人员狠狠地踹了“大狗”一脚,它的反应和真正的动物一样,沿着受力方向快速移动并马上恢复正常行走状态。最近,波士顿动力实验室又发布了他们开发的双足机器人,机器人的行走和对外界环境的反应均与人类十分相似。图1-2是“大狗”在山路上行走的情景。



图 1-2 在山路上行走的“大狗”

机器人研究的另一个成功例子是被动行走机器人。该研究采用与传统轨迹跟踪控制完全不同的思路，充分利用了系统的动力学特性，系统的能量效率得到了非常大的提升。2005 年美国康乃尔大学、麻省理工学院和荷兰代尔伏特理工大学在美国《Science》杂志上发表了关于采用被动行走技术的双足机器人的文章。该双足机器人的行走步态和能量效率与人类十分相似。另外，在军事应用方面，穿戴助力机器人可以使战士背负更重的装备，假肢机器人(见图 1-3)可以使腿残疾的人和正常人一样行走。



图 1-3 假肢机器人

服务机器人研究的另一个热点领域——家庭服务机器人研究，目前已经得到了国内外学者的广泛关注。近年来欧盟各国、日本、韩国和中国都启动了服务机器人研究计划，中国 863 计划的服务机器人重大项目一期投入经费 4648 万元，资助了 14 个相关项目，2010 年启动了二期项目。随着中国老龄人口比例的迅速增加、劳动力比例的减少，各种服务机器人，尤其是家庭服务机器人具有非常大的社会需求。据国际机器人联合会(IFR)2009 年统计，到 2008 年年底，服务机器人的市场达 112 亿美元，家庭服务机器人达 440 万台。IFR 预测 2009—2012 年间家庭服务机器人销售将达到 480 万台，具有广阔的市场前景。为了促进家庭服务机器人技术的发展，国际 RoboCup 机器人竞赛从 2006 年开始增加家庭服务机器人比赛项目，从 2007 年起该项目列为中国 RoboCup 机器人竞赛正式比赛项目。中国科技大学、上海交通大学和上海大学等家庭服务机器人队伍在目标识别、小型物体的抓取等方面达到了较高的水平。

家庭服务机器人的关键技术主要包括以下几个方面：

(1) 物体识别技术。机器人需要识别家庭环境,如家具、电器和玩具等。

(2) 人体识别技术。通过人脸检测和识别技术识别主人和陌生人,识别人的动作和表情等。

(3) 动态不确定环境下的自定位、地图创建与导航。家庭环境是动态变化的,如家具等可能移动位置,因此机器人需要在完成自定位的同时完成环境地图创建,并在此基础上实现从当前位置到目标位置的自主导航。

(4) 人机交互与语音识别技术。机器人需要与人类进行交流,人可以通过语音向机器人发布命令,同时机器人可以通过语音向人类进行询问、回答人类的问题、表达机器人完成任务的情况。

(5) 物体操纵技术。机器人需要完成成为主人开门、拿食物饮料、清扫房间等任务,因此机械臂是家庭服务机器人必需的装备。

为了让机器人走进家庭,必须很好地解决前面提到的家庭服务机器人的关键技术,而这些技术属于多学科的交叉研究范畴。

1.5 机器人的基本结构

机器人的基本结构如图 1-4 所示,机器人通过对外部环境的感知和人机接口实现与外部世界的信息交互。机器人系统一般由人机接口子系统(人机接口装置)、控制子系统(控制装置)、驱动子系统(执行装置)和感知子系统(传感装置)等组成。下面以图 1-5 所示的家庭服务机器人系统为例说明机器人系统的构成。

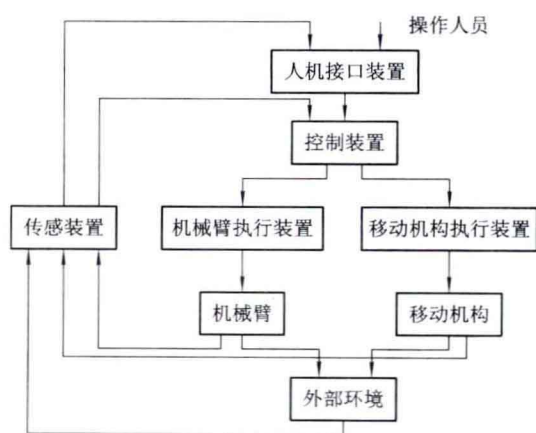


图 1-4 机器人基本结构图

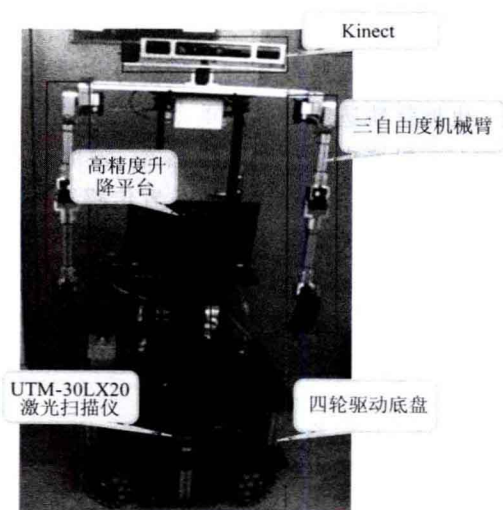


图 1-5 家庭服务机器人系统

该机器人是为开展家庭服务机器人相关技术研究而开发的机器人平台,其人机接口子系统主要由语音交互系统构成,采用微软的语音识别与合成库实现人与机器人之间的信息交流。该机器人的控制子系统主要由一台高性能的笔记本电脑构成,根据人的指令和机器人对外部环境的感知控制机器人完成相应的动作。驱动子系统主要由四个直流伺服电机构

成的全向移动底盘、六个数字舵机构成的一对两自由度机械手和一个丝杠构成的升降平台组成。整个系统具有5个自由度，可以完成在工作空间内竖直摆放瓶子等物体的抓取任务。若再增加一个腕部的旋转自由度，即可实现任意方位物体的抓取操作。感知子系统由两部分组成：①由感知外部环境的视觉传感器(微软 Kinect)与距离传感器平面激光扫描雷达组成的外传感器；②由感知机器人自身状态的多个旋转编码器组成的内传感器。

1.6 本书的主要内容

机器人学是典型的多学科的交叉领域，在较短的时间内学习和掌握所有相关内容是不切合实际的。因此，本书将重点介绍机器人学中最基础和重要的部分，希望通过本书的学习读者可以掌握机器人学的基本原理和技术，并为进一步的机器人学研究和应用开发打下良好的基础。

本书主要包括以下内容：

(1) 空间描述与坐标变换：该部分属于机器人学的数学基础知识，是进行机器人运动学分析、机器人定位与导航等研究和应用开发的基础。

(2) 机器人运动学和逆运动学：该部分介绍机器人的运动学和逆运动学问题，包括机器人连杆描述的规范方法，以及典型工业机器人的运动学和逆运动学问题。因为目前大部分机器人采用位置伺服控制，所以运动学分析非常重要。

(3) 机器人静力学与动力学：该部分主要介绍机器人关节力矩与末端环境接触力之间的静力学关系，建立机器人动力学的拉格朗日方法。此部分是机器人控制和仿真研究的基础。

(4) 机器人路径规划：该部分主要介绍了移动机器人路径规划和机械臂轨迹规划方法。机械臂轨迹规划部分重点介绍关节空间的三次多项式插值规划方法。

(5) 机器人驱动器与传感器：该部分主要介绍了机器人最常用的驱动器——直流伺服电机和舵机，以及常用的角位置传感器——旋转编码器。

(6) 机器人控制：该部分主要介绍了机器人运动分解控制方法和力控制方法，还介绍了非线性系统稳定性分析的李雅普诺夫直接法。

第2章 空间描述与坐标变换

工业机械臂和移动机器人完成各种任务需要进行相应的运动,而对机器人运动的描述最直观和方便的方法是建立坐标系。对于通用的多关节工业机械手,一般需要建立多个坐标系来描述机械手末端工具的位置和方向、工件的位置和方向等。而对于轮式机器人,至少需要建立场地坐标系和机器人坐标系。如何描述机器人在空间的位置和方位,以及不同坐标系间各种描述的变换关系是本章将要介绍的主要内容。

2.1 位置姿态表示与坐标系描述

忽略机器人的变形影响,机器人可以抽象为由一个(或者多个)刚体。刚体在空间中的位置可以用质心的位置和刚体的方位来描述,实现描述的工具是坐标系。在机器人学中假设存在一个世界坐标系,所有描述都可以参照这个坐标系或者用世界坐标系定义的坐标系。

1. 位置描述

假设已经建立了坐标系,我们可以用一个 3×1 的位置矢量对世界坐标系中的任何点进行定位。因为经常需要定义多个坐标系来描述机器人的几何关系和运动,在描述一个位置矢量的时候需要指明是用哪一个坐标系描述的。如图 2-1 表示的一个坐标系和位置矢量,用三个单位正交基矢量表示坐标系 $\{A\}$,坐标原点和沿坐标轴的单位矢量均用下标“A”表示它们属于 $\{A\}$ 坐标系。矢量 ${}^A\mathbf{p}$ 表示箭头指向点的位置矢量,其中右上角标“A”表示该点是用 $\{A\}$ 坐标系描述的。位置矢量 ${}^A\mathbf{p}$ 可以用分量表示为

$${}^A\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

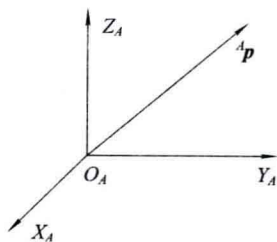


图 2-1 坐标系和位置矢量

2. 姿态描述

一个刚体除了需要描述它的位置外,还需要描述它的方位(姿态)。任意平面刚体都可

以用三个参数 (x, y, θ) 唯一描述其姿态。例如图 2-2 所示的机器人, 为了完整描述地面上的机器人, 除了机器人的位置(质心 O_B 坐标 x, y)以外, 还需要知道机器人的方位(头的方向 θ)。平面机器人位置一般用两个坐标系来描述, 一个是固定的场地坐标系 $\{A\}$, 另一个是与机器人固连在一起的机器人(运动)坐标系 $\{B\}$ 。机器人的位姿可以用机器人坐标系 $\{B\}$ 的原点和坐标轴在固定坐标系 $\{A\}$ 中的方向来描述。

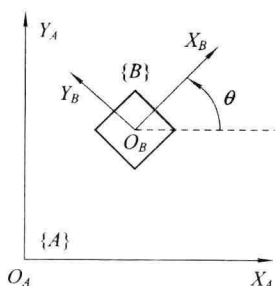


图 2-2 平面机器人位姿表示

三维刚体的描述比较复杂, 如图 2-3 所示的机械手末端工具, 需要描述工具的空间位置和姿态(方位), 三维姿态的描述一般通过固定在物体上的坐标系来实现。

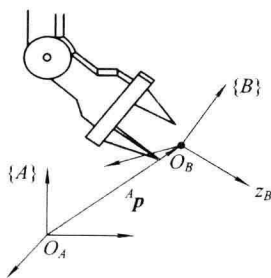


图 2-3 机械手末端工具及坐标系

图 2-3 中坐标系 $\{B\}$ 与机械手末端工具固连, 工具的位置可以用固连坐标系 $\{B\}$ 的原点描述、工具的姿态可以由坐标系 $\{B\}$ 的方向来描述。而坐标系 $\{B\}$ 的方向可以用沿三个坐标轴的单位矢量来表示:

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{X}_B & {}^A\mathbf{Y}_B & {}^A\mathbf{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

式中, ${}^A_B\mathbf{R}$ 称为旋转矩阵, 即坐标系可以用旋转矩阵来描述。根据坐标矢量的正交性和单位长度条件, 可以得到 6 个约束方程, 因此旋转矩阵只有 3 个独立变量, 后面将介绍采用 3 个独立变量描述刚体姿态的方法。式(2-2)中旋转矩阵的元素可以用坐标系 $\{B\}$ 的单位矢量在坐标系 $\{A\}$ 单位矢量上的投影来表示:

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{X}_B & {}^A\mathbf{Y}_B & {}^A\mathbf{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_A^T \mathbf{X}_B & \mathbf{X}_A^T \mathbf{Y}_B & \mathbf{X}_A^T \mathbf{Z}_B \\ \mathbf{Y}_A^T \mathbf{X}_B & \mathbf{Y}_A^T \mathbf{Y}_B & \mathbf{Y}_A^T \mathbf{Z}_B \\ \mathbf{Z}_A^T \mathbf{X}_B & \mathbf{Z}_A^T \mathbf{Y}_B & \mathbf{Z}_A^T \mathbf{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{X}_A^T \\ {}^B\mathbf{Y}_A^T \\ {}^B\mathbf{Z}_A^T \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

式(2-3)中内积运算的矢量都是在坐标系 $\{A\}$ 下表示的, 因此, 为了简单省略了矢量

的上标。事实上,矢量的内积与所选择的坐标系无关,由矢量内积的定义得

$$r_{11} = \mathbf{X}_B \cdot \mathbf{X}_A = \mathbf{X}_B^T \mathbf{X}_A = \|\mathbf{X}_B\| \|\mathbf{X}_A\| \cos\theta = \cos\theta \quad (2-4)$$

式中, θ 表示矢量 $\mathbf{X}_B$ 和 $\mathbf{X}_A$ 的夹角; $\|\mathbf{X}_B\|$ 表示矢量的长度。因为 $\mathbf{X}_B$ 是单位矢量, 所以 $\|\mathbf{X}_B\| = 1$ 。式(2-4)表明, r_{11} 是两个坐标系 X 轴夹角的余弦, 旋转矩阵的其余元素的表示与式(2-4)类似, 因此, 旋转矩阵的元素也称为方向余弦。

旋转矩阵 B_R 是用坐标系 $\{A\}$ 来表示坐标系 $\{B\}$ 沿坐标轴方向单位矢量组成的矩阵, 同样我们也可以坐标系 $\{B\}$ 来表示坐标系 $\{A\}$ 的单位矢量得到旋转矩阵 B_R 。

$${}^B_R = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{X}_A & {}^B\mathbf{Y}_A & {}^B\mathbf{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B^T \mathbf{X}_A & \mathbf{X}_B^T \mathbf{Y}_A & \mathbf{X}_B^T \mathbf{Z}_A \\ \mathbf{Y}_B^T \mathbf{X}_A & \mathbf{Y}_B^T \mathbf{Y}_A & \mathbf{Y}_B^T \mathbf{Z}_A \\ \mathbf{Z}_B^T \mathbf{X}_A & \mathbf{Z}_B^T \mathbf{Y}_A & \mathbf{Z}_B^T \mathbf{Z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{X}_B^T \\ {}^A\mathbf{Y}_B^T \\ {}^A\mathbf{Z}_B^T \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

对比式(2-3)和式(2-5)可知两个旋转矩阵互为转置, 再根据正交矩阵的性质可得以下关系:

$${}^B_R = {}^B_R^T = {}^B_R^{-1} \quad (2-6)$$

根据坐标系单位矢量的正交关系可以验证式(2-6)成立。

$${}^B_R^T {}^B_R = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{X}_B^T \\ {}^A\mathbf{Y}_B^T \\ {}^A\mathbf{Z}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{X}_B & {}^A\mathbf{Y}_B & {}^A\mathbf{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

3. 坐标系描述

从前面介绍的位置和姿态描述可知, 刚体的位姿可以用固连在刚体上的坐标系来描述, 坐标原点表示刚体的位置, 坐标轴的方向表示刚体的姿态。因此, 固连坐标系把刚体位姿描述问题转化为坐标系的描述问题。图 2-3 中坐标系 $\{B\}$ 可以在固定坐标系 $\{A\}$ 中描述为

$$\{B\} = \{{}^A_R, {}^A\mathbf{P}_{BO}\} \quad (2-8)$$

旋转矩阵 A_R 描述坐标系 $\{B\}$ 的姿态, 矢量 ${}^A\mathbf{P}_{BO}$ 描述坐标系 $\{B\}$ 的原点位置。

2.2 坐标变换

在机器人学中, 经常需要用不同坐标系描述同一个量。为了确定从一个坐标系的描述到另一个坐标系的描述之间的关系, 需要研究空间点在不同坐标系之间的坐标变换。

1. 平移坐标变换

在图 2-4 中, ${}^B\mathbf{P}$ 为坐标系 $\{B\}$ 描述的某一空间位置, 同样, 我们也可以用 ${}^A\mathbf{P}$ (坐标系 $\{A\}$) 描述同一空间位置。假设坐标系 $\{A\}$ 和坐标系 $\{B\}$ 姿态相同, 则坐标系 $\{B\}$ 可以理解为坐标系 $\{A\}$ 的平移。 ${}^A\mathbf{P}_{BO}$ 称为坐标系 $\{B\}$ 相对坐标系 $\{A\}$ 的平移矢量, 也可以理解为坐标系 $\{B\}$ 原点在坐标系 $\{A\}$ 描述下的位置矢量。因为两个坐标系具有相同的姿态, 同一个点在不同坐标系下的描述满足以下关系

$${}^A\mathbf{P} = {}^B\mathbf{P} + {}^A\mathbf{P}_{BO} \quad (2-9)$$

式(2-9)表明了不同坐标系描述同一个点位置矢量之间的变换关系, 变换关系由平移矢量 ${}^A\mathbf{P}_{BO}$ 唯一确定。可以从另外一个角度理解式(2-9)表示的变换关系, 假设开始坐标系

$\{B\}$ 与坐标系 $\{A\}$ 重合, 矢量 ${}^B\mathbf{P}$ 与坐标系 $\{B\}$ 固定, 将坐标系 $\{B\}$ 连同矢量 ${}^B\mathbf{P}$ 一起平移 ${}^A\mathbf{P}_{BO}$ 。这样理解式(2-9)表示的是同一坐标系描述的位置矢量之间的平移关系。

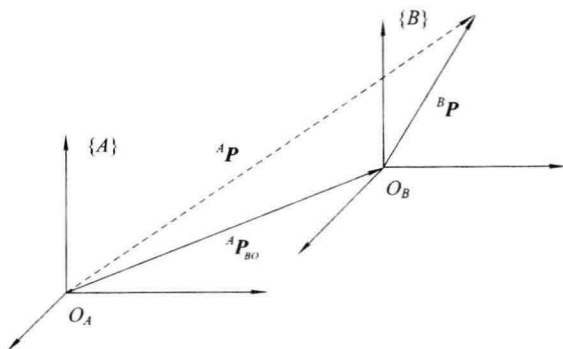


图 2-4 平移坐标变换

2. 旋转坐标变换

假设坐标系 $\{A\}$ 和坐标系 $\{B\}$ 的原点重合, 但两者的姿态不同。图 2-5 给出了两个坐标系的示意图, 坐标系 $\{B\}$ 的姿态可以用旋转矩阵 ${}^B\mathbf{R}$ 描述。旋转坐标变换的任务是已知坐标系 $\{B\}$ 描述的一个点的位置矢量 ${}^B\mathbf{P}$ 和旋转矩阵 ${}^B\mathbf{R}$, 求在坐标系 $\{A\}$ 下描述同一个点的位置矢量 ${}^A\mathbf{P}$ 。为了得到在坐标系 $\{A\}$ 下表示的位置矢量, 我们计算该矢量在坐标系 $\{A\}$ 三个坐标轴上的投影:

$$\begin{cases} {}^A p_x = {}^B\mathbf{X}_A^T {}^B\mathbf{P} \\ {}^A p_y = {}^B\mathbf{Y}_A^T {}^B\mathbf{P} \\ {}^A p_z = {}^B\mathbf{Z}_A^T {}^B\mathbf{P} \end{cases} \quad (2-10)$$

将式(2-10)写成矩阵形式得(参见(2-3)式)

$${}^A\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{X}_A^T \\ {}^B\mathbf{Y}_A^T \\ {}^B\mathbf{Z}_A^T \end{bmatrix} {}^B\mathbf{P} = {}^A\mathbf{B}\mathbf{R} {}^B\mathbf{P} \quad (2-11)$$

式(2-11)即为我们要求的旋转变换关系, 该变换是通过两个坐标系之间的旋转变换实现的。式(2-11)实现了空间点在不同坐标系下描述的转换, 下面用平面旋转坐标变换的例子说明上述算法。

例 2-1 图 2-6 给出了两个平面坐标系的位置关系, 计算旋转变换矩阵 ${}^B\mathbf{R}$ 和同一矢量 $\mathbf{P}$ 在两个坐标系下表示之间的关系, 假设矢量长度为 r 。

解: 因为坐标轴为单位矢量, 根据几何关系得

$$\begin{cases} {}^A\mathbf{X}_B = +\cos\alpha\mathbf{X}_A + \sin\alpha\mathbf{Y}_A \\ {}^A\mathbf{Y}_B = -\sin\alpha\mathbf{X}_A + \cos\alpha\mathbf{Y}_A \end{cases}$$

所以, 根据式(2-3)可知旋转变换矩阵为

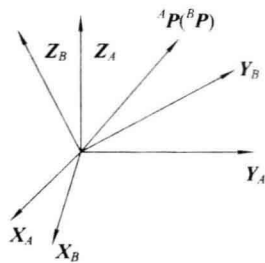


图 2-5 旋转坐标变换

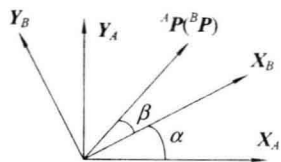


图 2-6 平面旋转变换

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

再根据式(2-11)可得矢量间的变换关系

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{P} &= {}^A_B\mathbf{R} {}^B\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \cos\beta \\ r \sin\beta \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= r \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

观察图 2-6, 根据几何关系直接计算 $\mathbf{P}$ 在 $\{A\}$ 下的表示显然与上式相同, 印证了坐标变换方法的正确性。

也可以从另一个角度获得矢量 $\mathbf{P}$ 在 $\{A\}$ 下的表示, 首先将矢量在 $\{B\}$ 下表示

$${}^B\mathbf{P} = r \cos\beta \mathbf{X}_B + r \sin\beta \mathbf{Y}_B$$

再根据前面的结果, 将坐标系 $\{B\}$ 的基矢量用坐标系 $\{A\}$ 的基矢量表示, 得

$$\begin{aligned} {}^A\mathbf{P} &= r \cos\beta {}^A\mathbf{X}_B + r \sin\beta {}^A\mathbf{Y}_B \\ &= r(\cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha) \mathbf{X}_A + r(\cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha) \mathbf{Y}_A \\ &= r \cos(\alpha + \beta) \mathbf{X}_A + r \sin(\alpha + \beta) \mathbf{Y}_A \end{aligned}$$

结果与前面计算的相同。

前面分别介绍了平移和旋转坐标变换, 如果两个坐标系之间既存在平移又存在旋转关系, 如何计算同一个空间点在两个坐标系下描述的变换关系?

图 2-7 给出了两个坐标系关系的示意图, 为了得到位置矢量 ${}^B\mathbf{P}$ 和 ${}^A\mathbf{P}$ 之间的变换关系, 我们建立一个中间坐标系 $\{C\}$ 。坐标系 $\{C\}$ 与坐标系 $\{B\}$ 原点重合, 且与坐标系 $\{A\}$ 的姿态相同。通过引入坐标系 $\{C\}$, 可以采用前面介绍的平移与旋转变换得到一般情况下的变换关系:

$${}^C\mathbf{P} = {}^C_B\mathbf{R} {}^B\mathbf{P} = {}^A_B\mathbf{R} {}^B\mathbf{P} \quad (2-12)$$

$${}^A\mathbf{P} = {}^C\mathbf{P} + {}^A\mathbf{P}_{(C)} = {}^A_B\mathbf{R} {}^B\mathbf{P} + {}^A\mathbf{P}_{(B)} \quad (2-13)$$

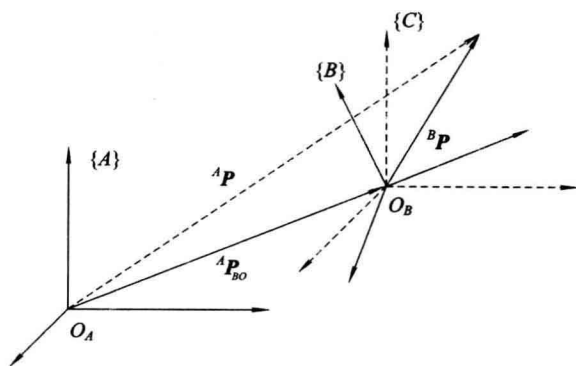


图 2-7 复合变换