山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

甲种本·上册

（第三版）

□ 主编 王爱云 宋 枚

Advanced Mathematics

刮涂层 输密码

中国石油大学出版社

山东省高等教育面向21世纪
教学内容和课程体系改革系列教材

高等数学

（甲种本·上册·第三版）

主　　编　王爱云　宋　枚
副主编　张　燕　张玉芬

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:甲种本. 上/王爱云,宋枚主编. —3版. —东营:中国石油大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-5636-3768-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②宋… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 190856 号

书　　名: 高等数学(甲种本·上册·第三版)

主　　编: 王爱云　宋　枚

副 主 编: 张　燕　张玉芬

责任编辑: 刘玉兰(0532—86981535)

出 版 者: 中国石油大学出版社(山东 东营　邮编 257061)

网　　址: http://www.uppbook.com.cn

电子信箱: eyi0213@163.com

印 刷 者: 青岛双星华信印刷有限公司

发 行 者: 中国石油大学出版社(电话 0532—86981535)

开　　本: 185 mm×260 mm　印张:15.5　字数:397 千字

版　　次: 2012 年 8 月第 3 版第 1 次印刷

定　　价: 27.80 元

再版前言

本书在《高等数学》(甲种本)第二版基础上修订而成。

《高等数学》(甲种本)上、下册是山东省高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革系列教材中的一套教材。它适合于省级师范院校的物理、电子、化工、计算机等与国家研究生入学考试“高等数学(一)”要求相一致的本科专业作为教材使用,也可供广大数学爱好者学习、研修之用。

本教材自2001年出版,2005年修订为第二版以来,一直作为山东师范大学相关专业的教材使用,省内也有其他六所高等院校先后用作教材,使用的效果是好的。且本教材第二版获得了2008年山东省高等学校优秀教材奖。这次教材修订的目标是:进一步适应大众化高等教育新形势,使教材更符合教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的新的“理工科本科数学基础课程教学基本要求”,努力反映近年来高等数学课程建设和教学改革的新成果。在保留第二版优点、特色的基础上,教材主要有以下改进:

1. 采纳广大教师和同学的意见、建议,将不定积分内容从一元函数积分学中独立出来自成一章,全书共十二章;第八章中变动了第五、六节的先后次序。

2. 进一步强化与中学数学教材的衔接。函数概念的引入,既突出了变量间的依赖关系,又采用了与中学教材同样的表述方法。

3. 进一步整合内容,优化知识体系,对诸如函数极限与数列极限的关系、向量值函数的分析运算、积分与微分、各类积分之间的关系等学生理解有困难的知识点进行更深入系统的阐释。

4. 调整各章习题配置,使之更好地起到深化概念理解、强化方法训练、引导数学创新的作用。

本版教材修订人员:第一、四章王爱云,第二、三章张燕,第五、六章王德臣,第七、十二章徐述声,第八章程涛,第九、十章孙胜秋,第十一章马军英。全书由王爱云统稿、加工。

本教材的编写出版及修订,自始至终得到中国石油大学出版社领导、同志们的指导、帮助,得到山东师范大学教务处、数学科学学院的大力支持,得到各兄弟院校专家、同行的热情鼓励,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平所限,教材仍难免有谬误之处,恳请专家、读者不吝指正。

编　者

2012年7月

目　录

第一章　函数　极限　连续

函数是高等数学的研究对象,它反映了客观世界变量间的依赖关系.极限的思想方法是研究函数的一种基本方法.连续函数是高等数学讨论的主要函数类型.本章主要介绍函数、极限、连续的基本概念及其重要性质.

第一节　函　数

在中学教材中,已介绍过函数的概念以及一些常见函数的性质和图形.本节将简要地复习函数的有关内容,同时作必要的补充和提高.

一、集合与映射

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念.所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体,组成一个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$.一个集合,若它只含有限个元素,则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种:一种是列举法,就是把集合的全体元素一一列举出来表示.例如,由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A,可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

另一种是描述法,若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可表示成

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

元素是数的集合称为数集.常见的数集通常用专用记号表示.例如:全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$,即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}^+$,即

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^*$ 表示排除数 0 的实数集,$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B \supset A$（读作 B 包含 A）.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如：

$$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 1 = 0\}$$

是空集，因为适合条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\varnothing$，且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing \subset A$.

2. 区间与邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$，则称数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$. 称数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$.

类似地可说明：

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1-1(a) 与 (b) 所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c)、(d)所示.

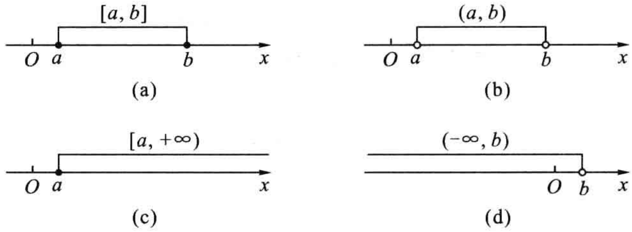

图 1-1

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就

简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

邻域是比区间还要基本的概念.

设 a 为实数，δ 是正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 是点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径（图 1-2）.

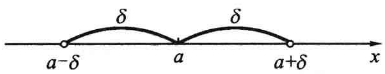

图 1-2

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

3. 映射

定义 1 设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f:X\rightarrow Y,$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}.$$

根据上述映射的定义，需要注意：

（1）构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域所在的范围 $R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

（2）对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）.

4. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$. 于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g:R_f\rightarrow X.$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射.

设有两个映射

$$g: X \to Y_1, \quad f: Y_2 \to Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则,它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然,这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射,这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射,记作 $f \circ g$,即

$$f \circ g: X \to Z,$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

由复合映射的定义可知,映射 g 和 f 构成复合映射的条件是:g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内,即 $R_g \subset D_f$. 否则,不能构成复合映射. 由此可以知道,映射 g 和 f 的复合是有顺序的,$f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义,复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

二、函数概念

函数是实数集到实数集的映射,其对应法则刻画了现实世界中变量之间的依赖关系.

例 1　圆的面积 A 与其半径 r 满足关系式 $A = \pi r^2$,当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时,圆的面积就有确定的数值与之对应.

例 2　自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,落下的路程为 s,假定开始下落的时刻为 $t=0$,那么,s 与 t 之间的对应关系由公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 确定,其中 g 为重力加速度. 假定物体着地时刻为 $t=T$,那么,当 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时,由上式 s 就有确定的数值与之对应.

例 3　某气象站用自动记录器记录了某一天 24 小时的气温变化曲线(图 1-3).

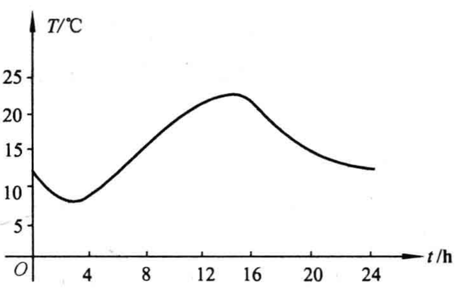

图 1-3

这里的气温 T 是随着时间 t 的变化而变化的,当 t 在 $[0, 24]$ 中任意取定一个数值时,根据这条曲线,T 都有确定的数值与它对应.

类似的例子很多,虽然它们的具体背景不同,在数学上却有一个共同点:在某变化过程中都有两个变量,并且当其中一个变量(x)在它的取值范围(D)内任意取定一个数值后,按照某个法则(f),另一个变量(y)都有唯一确定的数值与之对应. 这里的对应法则 f 就是数集 D 到 R 的映射,称为定义在 D 上的函数.

定义 2　设数集 $D \subset \mathbf{R}$,则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,记作 D_f,即 $D_f = D$.

函数定义中,对每个 $x \in D$,按对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函

数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}.$$

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x), x\in D$”或“$y=f(x), x\in D$”来表示定义在 D 上的函数.

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如 g、F、φ 等. 相应的，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需用不同的记号来表示它们.

关于函数的定义，有以下几点说明：

(1) 函数是特殊的映射，其定义域、值域总在 **R** 内，因此，构成函数的要素是：定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(2) 函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2, t\in[0,T].$$

这个函数的定义域就是区间 $[0,T]$. 另一种是对抽象地用算式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用“$y=f(x)$”表达，而不必再表出 D_f. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1,1)$.

(3) 在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，那么，这样的对应法则并不符合函数的定义，习惯上我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$ 可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值. 所以这方程确定了一个多值函数. 对于多值函数，如果我们附加一些条件，使得在附加条件之下，按照这个法则，对每个 $x\in D$，总有唯一确定的实数值 y 与之对应，那么这就确定了一个函数. 我们称这样得到的函数为多值函数的单值分支. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加“$y\geqslant 0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geqslant 0$”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加“$y\leqslant 0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\leqslant 0$”作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法（公式法），这在中学里大家已经熟悉. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形（图 1-4）. 图中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

在用公式法表示函数时，常常会遇到在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子

表示的情形，通常称这种函数为分段函数.

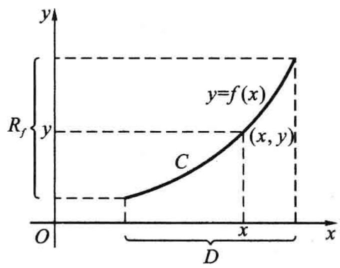

图 1-4

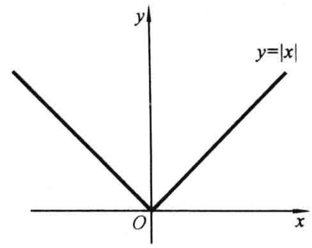

图 1-5

例 4　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $x\in[0,+\infty)$时，函数用 $y=x$ 来表达；当 $x\in(-\infty,0)$时，函数用 $y=-x$ 表达. 因此，这是一个分段函数. 它的值域 $W=[0,+\infty)$，其图形如图 1-5 所示.

例 5　符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 也是一个分段函数. 其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为集合 $W=\{-1,0,1\}$，图形由两条半直线及一个点组成(图 1-6). 利用符号函数，对于任何实数 x，$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$成立.

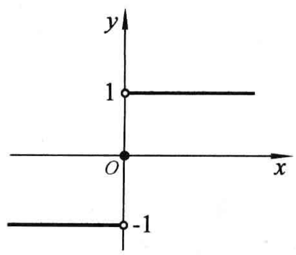

图 1-6

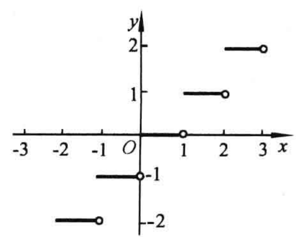

图 1-7

例 6　取整函数 $y=[x]$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如$[3.6]=3$，$[-2.5]=-3$，$[12]=12$ 等等. 它也是一个分段函数. 函数 $y=[x]$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为集合 $W=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}=\mathbf{Z}$，其图形由无穷多条直线段组成(图 1-7)，这图形称为阶梯曲线.

例 7　在电子技术中经常遇到的三角波，它的一个波形的表达式为

$$u=u(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2-t, & 1<t\leqslant 2.\end{cases}$$

这也是一个分段函数. 它的图形如图 1-8 所示.

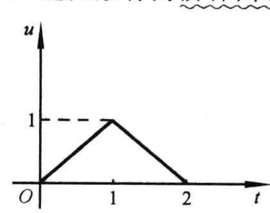

图 1-8

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$在数集 I 上有定义，若存在正数 M，使得对于任一 $x\in I$，均有$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数$f(x)$在 I 上有界，M 称为函数 $f(x)$在 I 上的一个界；若这样的 M 不存在，就称函

数 $f(x)$ 在 I 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$，对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的任一 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，但在 $(0,1)$ 内无界.

如果存在数 $A(B)$，使得对于任一 $x\in I$，均有 $f(x)\leqslant A(f(x)\geqslant B)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界（下界）. $A(B)$ 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上（下）界. 容易证明，函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调递增（减）. 单调递增（减）函数称为单调函数，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

函数的奇偶性和周期性在中学教材中介绍比较系统，这里不再赘述.

四、复合函数与反函数

1. 复合函数

复合函数是复合映射的特例，按照函数概念及其记号，复合函数概念可如下表述.

设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，即 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，y 通过 u 而是 x 的函数，称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 u 称为中间变量.

例如，由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x$ 可以复合而成复合函数 $y=\sqrt{1-x}$.

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=2+x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[2,+\infty)$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，无论 x 取何值，对应的 u 值都不属于区间 $[-1,1]$.

复合函数的概念可以推广到多个中间变量的情形. 例如，函数 $y=\lg\sin x^2$ 可以看作由 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 复合而成.

例 8 已知函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 和 $f(x+1)$.

解 这里给出一个复合函数，即已知 $f(u)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$u=x+\dfrac{1}{x}$，现在要求 $f(u)$ 关于 u 的对应关系 f.

由于 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=u^2-2$，所以 $f(u)=u^2-2$，从而 $f(x)=x^2-2$，$f(x+1)=(x+1)^2-2=x^2+2x-1$.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

解 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=0$，从而 $g[f(x)]=g(0)=0$；当 $x>0$ 时，$f(x)=x$，从而 $g[f(x)]=g(x)=-x^2$，于是

$$g[f(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$$

读者可练习求出 $f[g(x)]$，并画出图形.

2. 反函数

反函数是逆映射的特例，其概念可如下表述.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，且对任意的 $x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，即 $f:D\to W$ 是单射，则它有逆映射 $f^{-1}:W\to D$，称此逆映射为函数 f 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y), y\in W$.

习惯上，函数的自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，于是，函数 $y=f(x), x\in D$ 的反函数通常记作 $y=f^{-1}(x), x\in W$. 如函数 $y=x^3, x\in\mathbf{R}$ 是单射，所以存在反函数，其反函数是 $y=x^{\frac{1}{3}}, x\in\mathbf{R}$.

若 $f:D\to W$ 是单调增加(减少)的函数，则 f 的反函数一定存在，而且容易证明，反函数 $y=f^{-1}(x), x\in W$ 也是单调增加(减少)的函数. 如函数 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 是单增函数，所以其反函数 $y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$ 也是单增函数.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 容易证明，在同一个直角坐标平面上，直接函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 10　函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数，但函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调的，因此，如果把 x 的取值范围限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，这时 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 有反函数，记作 $y=\arcsin x$. 其定义域为闭区间 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，称 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数.

类似地可对 $y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 进行讨论，得到 $y=\cos x$ 的反函数 $y=\arccos x$，它的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$；$y=\tan x$ 的反函数 $y=\arctan x$，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；$y=\cot x$ 的反函数 $y=\operatorname{arccot} x$，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$. 函数 $\arccos x$、$\arctan x$、$\operatorname{arccot} x$ 依次称为反余弦函数、反正切函数、反余切函数，并称 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$、$\operatorname{arccot} x$ 为反三角函数.

五、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数是指以下六类函数.

(1) 常数函数 $y=C$ (C 为常数).

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为常数).

(3) 指数函数 $y=a^x$(a 为常数，$a>0, a\neq1$).

在科学技术中常会用到以常数 $\mathrm{e}=2.718\ 281\ 8\cdots$ 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$(关于常数 e 的意义将在第五节中说明).

(4) 对数函数 $y=\log_a x$(a 为常数，$a>0, a\neq1$).

以 e 为底的对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}} x$ 称为自然对数函数，简记为 $y=\ln x$.

(5) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数中学已学过,读者应熟悉它们的定义域、图形及有关性质(参见附录Ⅰ).

2. *初等函数*

初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤所构成,并且可以用一个式子表示的函数. 例如,$\sqrt{1-x^2}$,$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,$\dfrac{1+2^x\cos x}{1+x^2}$等都是初等函数.

不是初等函数的函数称为非初等函数. 如分段函数

$$y=\begin{cases} x, & -1\leqslant x<0, \\ 2, & x=0, \\ 2-x, & 0<x\leqslant 2 \end{cases}$$

就是非初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

3. *双曲函数*

在工程技术上,常常会遇到由函数 e^x 构成的一类初等函数,即双曲函数.

常用的双曲函数有:

双曲正弦　$\operatorname{sh} x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

双曲余弦　$\operatorname{ch} x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

双曲正切　$\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

它们的图形如图 1-9、图 1-10 所示.

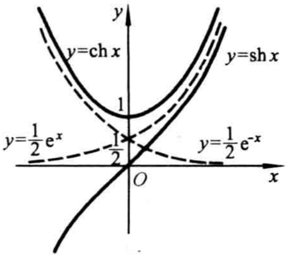

图 1-9

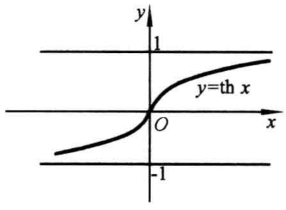

图 1-10

相应的反双曲函数为:

反双曲正弦　$\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　$(-\infty<x<+\infty)$;

反双曲余弦　$\operatorname{arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$　$(x\geqslant 1)$;

反双曲正切　$\operatorname{arth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　$(|x|<1)$.

双曲函数有与三角函数类似的一些性质,如:

(1) $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$;

(2) $\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y$;

(3) $\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y$;

(4) $\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$;

(5) $\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x$.