3导 自考 3导丛书

导教·导学·导考

2005年

核心学案

自学考试新教材·公共课（一）

工程数学（概率论与数理统计）

教材依据/辽宁大学出版社《工程数学（概率论与数理统计）》 范金城/主编

组　编/全国高等教育自学考试命题研究组

同步辅导同步过关

指定教材核心浓缩

预测试卷历年真题

RED PRECIOUS BOOK 红宝书

航空工业出版社

高等教育自学考试3导丛书

导教·导学·导考

工程数学（概率论与数理统计）

教材依据／辽宁大学出版社《工程数学（概率论与数理统计）》 主编／范金城

组　编／全国高等教育自学考试命题研究组

应对自考课程大规模修订后新教材内容

自学考试新教材

核心学案

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.概率论与数理统计/自学考试命题研究组,《工程数学》编委会编.—北京:航空工业出版社,2005.1

(自学考试新教材核心学案.公共课.第1辑)

ISBN 7-80183-527-1

Ⅰ.工... Ⅱ.①自...②工... Ⅲ.工程数学—高等教育—自学考试—自学参考资料③概率论—高等教育学考试—自学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本国书馆CIP数据核字(2004)第128676号

工程数学(概率论与数理统计)

Gongcheng Shuxue (Gailulun Yu Shuli Tongji)

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

发行部电话:010-84926529 010-64978486

三河市燕山印刷有限公司印刷 全国各地新华书店经售

2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:65

字数:2400千字 (全12册) 定价:168.00元

代言人

简介

张立勇　一个普通的农民孩子，清华大学打工 8 年，一直坚持刻苦自学，不仅 80 分以上通过四级、六级考试，托福考试 630 分，而且获得了北京大学本科文凭。2004 年 10 月共青团中央向张立勇颁发了“中国青年学习成才奖”，他被誉为共青团中央树立的全国十大杰出学习青年之一。

张立勇的事迹被中央电视台“东方之子”“面对面”“新闻会客厅”等多个栏目采访报道，被北京电视台、中国教育电视台等电视媒体，新浪网、雅虎网等网络媒体，《人民日报》《中国青年报》《大学生》等报纸杂志，共 100 多家媒体采访报道，在社会上引起很大反响。被众多青年学子视为学习的榜样。

“因为我选择了这样一条自己的人生道路，所以我没有机会像大多数的学子那样，经历从学校到学校，顺利地接受高等教育的过程。我只能通过自学来圆我的大学梦。”

“我常常想，上帝会厚爱每一个人的，它会用不同的方式对你所付出的艰辛和努力给予补偿。但是，上帝只钟爱那些自助的人。如果你不努力，你不拼搏，所有的机会都会和你失之交臂。如果在这十年之中，我放弃了对人生理想和人生价值的追求，那么，当这一切机遇到来的时候，我又怎么可能把握住呢？”

“大家觉得我是一个榜样，但我个人并不这么想。社会把我放到这样的位置，充当这样的角色，能够影响一些人，这是最让我自豪的。”

-------- 张立勇

导教·导学·导考

编委会

编委主任：程 琨　魏 莹

编委名单：（按姓氏笔画排列）

万　鹏　刘　斌　刘海飞　刘　涛

闫树茂　宋玉珍　张　沁　张远盛

肖　果　郜桂英　崔海燕　程　琨

董金波　董　蕾　蒋　怡　魏　莹

★前 言★ 导

“其实人的智力相差并不悬殊，可毅力的差距却使每个人拥有各自不同的前途。尤其是对于参加自考的人来说，毅力是非常重要的，当然还需要有得当的学习方法。”

“有很多人抱怨自考难以通过，然而正是这种严格的管理制度保证了自考毕业生的质量，使自考生获得了社会的认可和一致的好评。”

——一名从自考获得本科学历后又考上硕士生直到博士生的成功者的自述

参加自学考试，除了需要具备以上成功者所提到的毅力和方法外，还应该了解自考的每门课程都采用我们通常所说的“过关”考试——只要通过课程的一次性考试，就可拿到课程的学分，通过某专业要求课程的全部考试，也就会顺利获得这个专业的自考毕业证。然而，一分之差也会导致参考课程过关失败，有些考生难免多次重考才能修完规定课程。因此，在本书的编写过程中，编委们反复研讨自学考试的特点，努力寻求帮助自考生的有效途径。本书是多位学者、专家，历时数年的产物，具有以下优点。

一 掌握核心内容，了解命题动态，注重知识系统化

了解命题精神，是自学考试的核心，是达到专业标准的关键。自学考试的课程命题以课程自学考试大纲为依据，以最新指定教材为范围。本书紧紧贴住每一门课程的考试大纲和指定教材，用【考纲要求提示】、【知识结构图示】、【核心内容速记】、【同步精华题解】、【典型例题解析】等多个栏目解剖教材内容，是一套脉络清晰的速成讲义，可以使考生在厚厚的教材中抓住重点，对教材的系统学习有极强的指导作用。同时，对于临考考生，它又可以成为离开教材仍能独立使用的贴身笔记。《核心学案》摒弃了一些辅导书的题海战术，引导考生重视教材的学习。那么怎样去自学才能弄懂教材并将厚书读“薄”呢？抓住重点才是关键。《核心学案》用清晰的思路，帮助考生将教材知识系统化，使考生在答卷时知识系统、逻辑清晰、胸有成竹。

二 依据权威资料，重视最新信息，紧跟时代脉搏

参加高等教育自学考试的考生，常常会感到市面上的辅导资料甚至教材都有

前 言

滞后性。全国高教自考办也认可这一事实,并采取了一些有效措施,比如在发布考试大纲和指定教材的基础上又组编了《全国高等教育自学考试活页丛书》等补充学习材料,并明文规定增补内容纳入统一命题范围,要占卷面5~10分。同时高教自考办还加快了教材的修订频率。面对这种情况,原有的一些辅导资料的严重滞后和内容缺陷也是必然的。本套《核心学案》则高度重视这一现象,在依据考试大纲和指定教材时,选用高教自考办的最新修订本(2004年起自考课程已在做大规模修订),并将活页丛书等内容融会贯通其中,有的科目还特意增加了【最新内容补充】以引起考生重视。另外,本套书还吸收了许多自考强化班的授课精华,目的是帮助考生了解最新考试动态。我们还将开通网上自考辅导随时更新有关内容和提供特色售后服务,欢迎点击 www. study-book. com. cn。

三 做到讲练结合,力求精讲精练,提高辅导命中率

本套书配有【同步精华题解】和综合演练题,是在对考纲、教材归纳总结后选编的一些经典同步练习题。这些练习题的题型与考试题型完全一致,使考生能够迅速掌握答题方法与同步要点。另外,本书的编者还依据各科内容,遴选考点,在对历年实考真题做详细分析的基础上精编了《命题预测试卷》。这些试卷不仅题型题量完全与真考试卷保持一致,而且力求覆盖考试大纲的各科重点。考生如果在学习《核心学案》的基础上再认真研习《命题预测试卷》,既可熟悉题型、了解试卷难易度,又可将其作为自测、练习之用,找出差距,查漏补缺。因此,在《核心学案》的首印首发优惠活动中,为了帮助考生用好的学习方法提高应试过关率,我们特意将《命题预测试卷》作为《核心学案》的赠品送给每个考生。这样,本书即成为真正具有命中率的辅导用书。

总之,面对数千万的自考考生,我们是抱着高度的责任感来完成这项使命的。我们的目的是:减轻考生的学习负担;我们口号是:用最短的时间使考生自考过关!因为工作量的巨大和考期的压力,也许我们遗留了某些不足,欢迎读者批评指正。来函可致:reader@ study-book. com. cn,我们将高度重视,以求完善。

编　者

第一章 随机事件与概率

第二章 随机变量与概率分布

第三章 随机向量

第四章 随机变量的数字特征

第五章 大数定律与中心极限定理

第一章　随机事件与概率

考纲要求提示

1. 了解随机试验与随机事件的概念,理解并掌握事件的关系与运算;

2. 理解概率的定义与基本性质;

3. 了解古典概型的定义,会计算简单的古典概率;

4. 会用概率性质计算古典概率;

5. 理解条件概率的定义,掌握概率乘法公式;

6. 了解全概率公式与贝叶斯公式并会进行简单计算;

7. 理解事件的独立性的概念,熟练掌握相互独立事件的性质及其有关概率计算;

8. 掌握贝努利概型的计算方法.

知识结构图示

- 随机事件与概率
  - 随机事件及随机事件的关系和运算
    - 随机事件的概念
    - 事件之间的关系和运算
    - 事件的运算性质
  - 随机事件的概率
    - 概率的定义与性质
    - 古典概型
  - 条件概率与事件的独立性
    - 条件概率与乘法公式
    - 全概率公式与贝叶斯公式
    - 事件的独立性
    - 贝努利(Bernoulli)概型

核心内容速记

1. 随机事件及随机事件的关系和运算

(1) 随机事件的概念

① 随机试验

随机现象总在一定条件下进行,并进行观察,把一次观察看做一次试验,满足下列条件的试验称为随机试验:

a. 试验可以在相同条件下重复进行;

b. 每次试验的结果不止一个,并能事先明确试验的所有可能结果;

c. 进行一次试验之前不能确定会出现哪一种结果.

这样的试验叫做随机试验,简称试验,记为 E.

② 随机事件

在随机试验中,可能出现也可能不出现的事件,叫做随机事件,简称事件.

③ 基本事件

在随机试验中的最简单的随机事件,叫做基本事件或样本点.

随机试验中,除基本事件外,还有复杂事件,它们是由基本事件构成的随机事件,简称为事件. 一般用大写英文字母 A、B、C 等表示事件.

④ 必然事件和不可能事件

在随机试验中,必然发生的事件,叫做必然事件,记为 Ω.

在随机试验中,不可能发生的事件,叫做不可能事件,记为 ϕ.

⑤ 样本空间

随机试验 E 的所有基本事件组成的集合,叫做 E 的样本空间,记为 Ω.

(2) 事件之间的关系和运算

① 子事件(或事件的包含):若事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称事件 A 为事件 B 的子事件(或称事件 B 包含事件 A),记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

② 事件的相等：若 $B \supset A$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A = B$.

③ 和事件：事件 A 和事件 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A \cup B$.

类似地，表示 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 中至少有一个发生的事件，称为 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 的和事件，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

④ 积事件：事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为 A 与 B 的积事件，记为 $A \cap B$ 或 AB.

类似地，表示 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 同时发生的事件，称为 $A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 的积事件，记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

⑤ 差事件：事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为 A 与 B 的差事件，记为 $A - B$.

⑥ 互不相容事件：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \phi$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的事件（或称互斥事件）.

⑦ 对立事件：若事件 A 与事件 B 至少有一个发生且仅有一个发生，即 $A \cup B = \Omega, AB = \phi$，则称 A 是 B 的对立事件，或 B 是 A 的对立事件，A 的对立事件记为 A.

⑧ 完备事件组：若 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，且 $A_iA_j = \phi (i \neq j)$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组.

（3）事件的运算性质

① 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

② 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$；

③ 分配律：$(A \cup B)C = AC \cup BC, (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

④ 对偶律：$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2. 随机事件的概率

（1）概率的定义与性质

随机事件的概率，是随机事件在试验中出现可能性大小的数值量度，随机事件 A 的概率用 $P(A)$ 表示.

① 频率:在一定条件下,设事件 A 在 n 次重复试验中发生 n_A 次,比值$\frac{n_A}{n}$称为在这 n 次试验中 A 发生的频率.

② 概率:事件 A 的概率,就是事件 A 发生可能性大小的数值量度,当重复试验次数增加时,如果事件 A 的频率围绕一个稳定的数值 p 做微小的摆动,这个数值 p 称为事件 A 的概率,记为 $p = P(A)$.

③ 概率有下列基本性质

a. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1; P(\Omega) = 1; P(\phi) = 0$.

b. 若 $AB = \phi$,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

这一性质可以推广到有限多个互不相容事件的情形,设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个互不相容事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n),$$

即 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

这一性质为概率的有限可加性. 上述公式叫概率加法公式,同样,设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为无穷多个互不相容事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots,$$

即 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

c. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

d. 若 $A \subset B$,则

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(A) \leqslant P(B).$$

e. 设 A, B 为两个事件,则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

(2) 古典概型

① 古典概型的概念

a. 随机试验 E 的样本空间 Ω 中的基本事件只有有限个.

b. 每个基本事件出现的可能性是相等的.

具有这两种特征的概率模型,称为古典概型.

② 古典概率

如果随机试验 E 构成一个古典概型,E 中随机事件 A 的概率 $P(A)$,叫做古典概率.

其计算公式为

$$P(A)=\frac{M}{N},$$

其中 M 为事件 A 包含的基本事件数,N 为样本空间 Ω 中基本事件总数.

3. 条件概率与事件的独立性

(1) 条件概率与乘法公式

① 条件概率:如果 A、B 是随机试验的两个事件,且 $P(B)>0$,则称事件 B 发生的条件下事件 A 的概率为事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率,记为 $P(A\mid B)$.

条件概率可以通过下列公式计算:

设 $P(B)>0$,则 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

② 乘法公式:若 $P(B)>0$,则有 $P(AB)=P(B)P(A\mid B)$.

对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

(2) 全概率公式与贝叶斯公式

① 全概率公式:若事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任一事件 A,有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

② 贝叶斯公式:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为完备事件组,A 为任一事件,且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,$P(A)>0$,则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

公式中 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是导致事件 A 发生的原因,$P(B_i)(i=1,

$2,\cdots,n)$ 是各种原因发生的概率,称为先验概率. 现在要求 A 发生的条件下 B_i 发生的条件概率 $P(B_i \mid A)(i=1,2,\cdots,n)$,它们称为后验概率. 贝叶斯公式正是反映先验概率和后验概率关系的.

(3) 事件的独立性

① 对于任意两个事件 A、B,若 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立,则称事件 A、B 是相互独立的.

② 对于任意三个事件 A、B、C,若有

$P(AB)=P(A)P(B)$,

$P(BC)=P(B)P(C)$,

$P(AC)=P(A)P(C)$,

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

四个等式同时成立,则称 A、B、C 相互独立.

③ 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若对于任意整数 $k(1<k\leqslant n)$ 和任意 k 个整数 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik}),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意:a. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个相互独立,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立. 相互独立,一定两两独立,反之不然。

b. 事件的独立性,常常不是根据定义来判断,而是根据实际情况来判断的,如电器元件间的工作、车床间的工作和独立射击等各自试验中的事件之间是相互独立的.

(4) 贝努利(Bernoulli) 概型

① 贝努利概型

在确定条件下进行 n 次重复独立试验,每次试验只有两个相互对立的结果 A 及 $\bar{A}$,称这 n 次重复独立试验为贝努利概型.

② 二项概率公式

如果在独立试验序列中事件 A 的概率为 $p(0<p<1)$,则在 n 次试验中事件 A 恰好发生 m 次的概率

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}\quad(m=0,1,2,\cdots,n),$$

其中 $p+q=1$.

经典例题点拨

例 1　设 A、B、C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A、B、C、表示出来.

(1) 只有 A 发生；

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3) 三个事件都不发生；

(4) 三个事件至少有一个发生；

(5) 三个事件至少有两个发生；

(6) 三个事件恰好有一个发生；

(7) 三个事件恰好有两个发生；

(8) 三个事件不多于一个事件发生；

(9) 三个事件不多于两个事件发生.

解　(1) $A\bar{B}\bar{C}$；

(2) $AB\bar{C}$；

(3) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$；

(4) $A \cup B \cup C$；

(5) $AB \cup BC \cup AC$；

(6) $\bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C}$；

(7) $AB\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C$；

(8) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$；

(9) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 或 $AB\bar{C}$.

例 2　已知 A,B 两个事件满足条件

$$P(AB) = P(\bar{A}\bar{B}), \text{且 } P(A) = p,$$

求 $P(B)$.

解　由事件的运算：

$\bar{A}\bar{B} = (\Omega - A)(\Omega - B) = \Omega + AB - \Omega A - \Omega B = \Omega - (A \cup B)$.

又　$P(\Omega) = 1$,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

$P(A) = p$.

可知 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$

$$=P[\Omega-(A\cup B)]$$
$$=P(\Omega)-P(A\cup B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

因而 $P(B)=1-P(A)=1-p.$

例 3 一袋中有 7 个白球和 5 个红球，从中摸取两次，每次一球，设 A 表示“两次都取到红球”，B 表示“至少一次取到红球”，请在(1) 有放回抽样；(2) 不放回抽样条件下求 $P(A)$，$P(B)$.

解 显然袋中有 12 个球.

(1) 有放回抽样时，样本点总数为 $n=12\times12$，A 中样本点数为 $k=5\times5$，于是 $P(A)=\dfrac{5\times5}{12\times12}=0.1736.$

又设 C 表示“恰有一次取到红球”，则 $B=A\cup C$ 且 A 与 C 不相容，而 C 中样本点数为 $2\times(5\times7)$ 个，从而

$$P(B)=P(A)+P(C)=\frac{5\times5+2\times(5\times7)}{12\times12}=0.6597.$$

显然 $\bar{B}$ 表示“两次都取得白球”，故下面的计算更简单：

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{7\times7}{12\times12}=0.6597.$$

(2) 不放回抽样时，样本点总数为 $P_{12}^2=12\times11$，A 中样本点数为 5×4，故

$$P(A)=\frac{5\times4}{12\times11}=0.1515.$$

又 $\bar{B}$ 中样本点数为 7×6，故

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{7\times6}{12\times11}=0.6818.$$

例 4 设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的一个房间去住($n\leqslant N$)，求下列事件的概率($n\leqslant N$).

(1) 指定的 n 间房间里各有一人住；

(2) 恰有 n 间房间各有一人住；

(3) 某一指定的房间恰有 m 个人($m\leqslant n$).