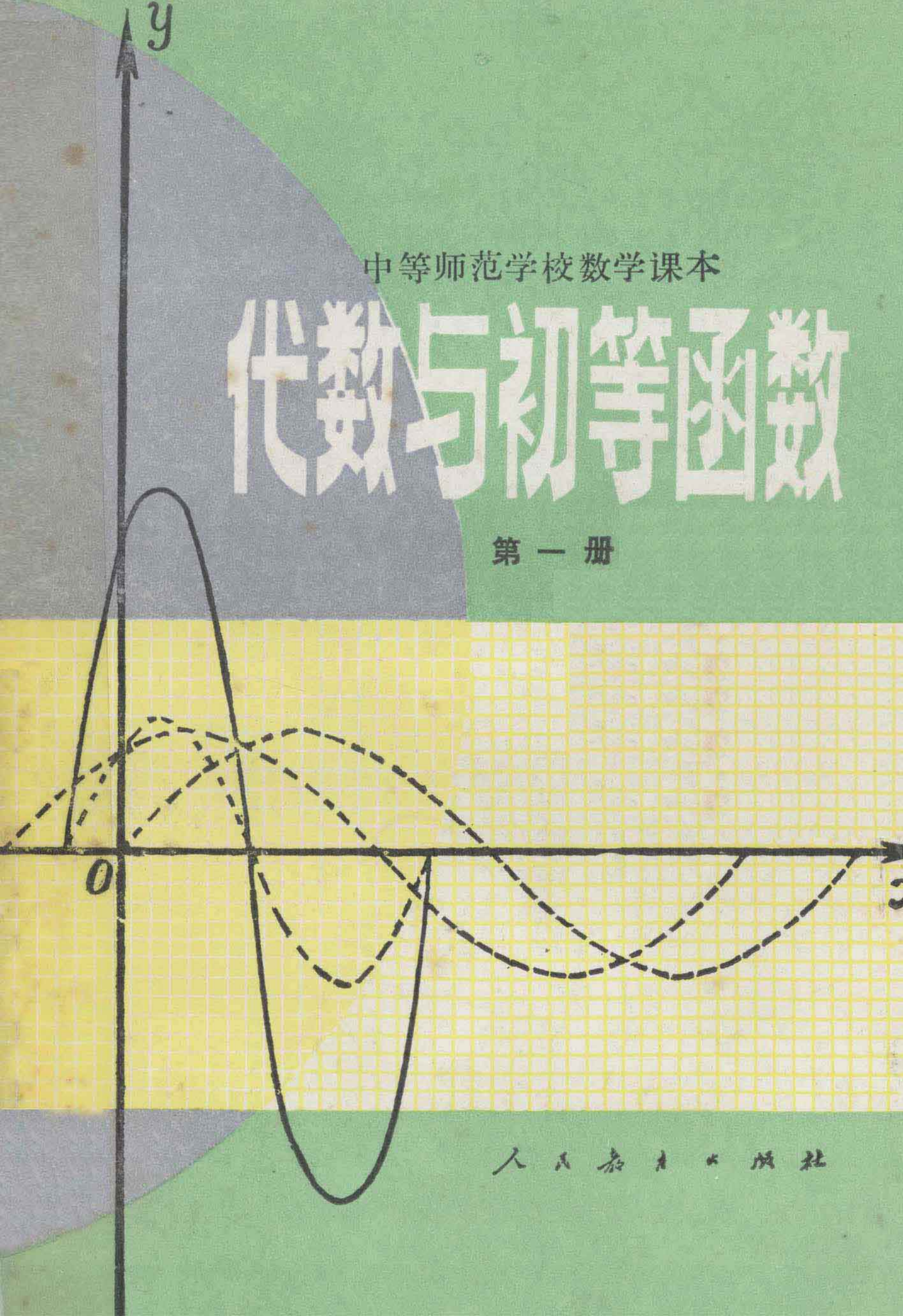
中等师范学校数学课本

代数与初等函数

第一册



人民教育出版社

第一章　集合与对应

一　集　　合

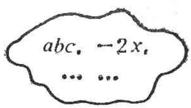
在初中我们已见过一些集合的例子，现在我们来学习集合的一些简单知识.

1.1　集合

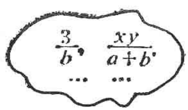
在初中数学课本中讲过一些集合，例如：

(1) “所有的正数组成正数的集合，所有的负数组成负数的集合”；

(2)



整式的集合



分式的集合

(3) “在 AB 的垂直平分线 MN 上的点到 A、B 两点的距离都相等，并且，到 A、B 两点的距离相等的点都在 MN 上，所以直线 MN 就是到 A、B 两点的距离相等的点的集合”(图 1-1)；

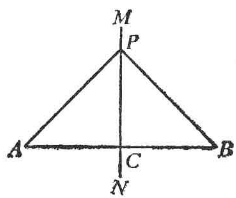


图　1-1

(4)“矩形集合”,“菱形集合”,“平行四边形集合”.

在小学数学课本中,也渗透了集合的一些思想. 例如,有这样的一些插图:把几个人、几个三角形等,用一个圈把它们圈起来. 这些都分别表示集合.

象这样,把具有某种属性的一些对象,看作一个整体,便形成一个**集合**. 集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**. 例如,(3)是由线段 AB 的垂直平分线 MN 上所有的点组成的集合,MN 上的每一个点都是这个集合的元素.

对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的. 这就是说,我们可以判断任意一个对象是或者不是这个集合的元素. 例如,对于由所有的直角三角形组成的集合,边长分别是3cm、4cm、5cm 的三角形是这个集合的元素. 边长分别是 4cm、4cm、5cm 的三角形不是这个集合的元素.

表示集合的方法,常用的有列举法和描述法.

把集合的元素一一列举出来,写在大括号内用来表示集合,这种方法叫做**列举法**.

例如,由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合,可以表示为

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}.$$

又如,由整式 x^2, $3x+2$, $5y-x$, x^2+y^2 组成的集合,可以表示为

$$\{x^2,\ 3x+2,\ 5y-x,\ x^2+y^2\}.$$

由“全体自然数组成的集合”,可以表示为

$$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}.$$

在这里,虽然“全体自然数”不能全部写出来,但是,我们可以按某种规律,比如从小到大的顺序,列举出其中一些有

代表性的元素，使其他任何一个元素都可以根据已列举出的元素所体现的规律写出来.

把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫作**描述法**.

例如:

由所有的直角三角形组成的集合，可以表示为

$$\{\text{直角三角形}\};$$

由某农机站所有的拖拉机组成的集合，可以表示为

$$\{\text{某农机站的拖拉机}\};$$

由15和18的所有的公倍数组成的集合，可以表示为

$$\{15\text{和}18\text{的公倍数}\};$$

由不等式 $x-3>2$ 的所有的解组成的集合，可以表示为

$$\{x:x-3>2\}^*;$$

由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点组成的集合，可以表示为

$$\{(x,y):y=x^2+1\};$$

由所有两位质数组成的集合，用列举法表示是

$$\{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}.$$

用描述法表示是

$$\{\text{两位的质数}\},$$

或是

$$\{x:9<x<100,\ x\text{为质数}\}.$$

---

*有的书上用一短竖线“|”代替“:”，表示为 $\{x|x-3>2\}$.

人们常常用图形来形象地表示集合．比如用一条封闭的曲线围成的图形来表示一个集合；封闭曲线内的点或表示元素的符号，就表示集合的元素(图 1-2)．

图 1-2

在集合里，我们不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，我们就认为是同一个集合．

例如：

$\{-3, 0, 2, 5\}$和$\{0, 2, -3, 5\}$是同一个集合；

{线段 AB 上的点}和{线段 BA 上的点}是同一个集合．

一个元素在一个集合里不能重复出现．

根据集合的元素的个数的情况，集合分为有限集和无限集．由有限个元素组成的集合叫做**有限集**，否则叫做**无限集**．例如，由小于 20 的正整数组成的集合是有限集；由所有的整数组成的集合是无限集．所有有理数的集合、所有无理数的集合、所有实数的集合也都是无限集，线段上所有点的集合，直线上所有点的集合也都是无限集．

注意，a 和$\{a\}$是不同的．a 表示一个元素，$\{a\}$表示只有一个元素 a 的集合．

在研究集合时，为了方便起见，常用大写拉丁字母表示集合，小写拉丁字母表示元素．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，表示为 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于集合 A，表示为 $a \notin A$．例如，设 B 表示集合$\{1, 2, 3, 4,$

5}，则

$$5 \in B,\ 7 \notin B,\ \ \frac{1}{2} \notin B.$$

我们常用N表示自然数的集合，Z表示整数的集合，Q表示有理数的集合，R表示实数的集合.

练　习

1. 举出三个集合的实例.
2. （口答）说出下面集合里的元素：
   (1) {与2的差的绝对值等于3的数}；
   (2) {平方等于1的数}；
   (3) {12的约数}；
   (4) {一年中有31天的月份}；
   (5) {京广铁路经过的省(市)}.
3. 用适当的方法表示下列集合：
   (1) 大于10小于20的质数的集合；
   (2) 大于3小于15的偶数的集合；
   (3) 由1, 3, 5, 7, 9组成的集合；
   (4) 由太阳系的九大行星，即水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星组成的集合；
   (5) 由长江、黄河、珠江和黑龙江组成的集合；
   (6) 周长等于20厘米的三角形的集合；
   (7) 大于2的奇数的集合；
   (8) 不等式$x^2+5x+6>0$的解的集合.
4. 在__处填上符号$\in$或$\notin$：

1_N, 0_N, -3_N, $\frac{2}{3}\_N$, $\sqrt{2}\_N$;

1_Z, 0_Z, -3_Z, $\frac{2}{3}\_Z$, $\sqrt{2}\_Z$;

1_Q, 0_Q, -3_Q, $\frac{2}{3}\_Q$, $\sqrt{2}\_Q$;

1_R, 0_R, -3_R, $\frac{2}{3}\_R$, $\sqrt{2}\_R$.

1.2 子集

1. 子集 对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 就叫做集合 B 的**子集**，表示为

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A,$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”。

例如 $N \subseteq Z$, $N \subseteq R$, $Z \subseteq R$.

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于它本身，所以

$$A \subseteq A.$$

也就是说，任何一个集合都是它本身的子集.

如果 A 是 B 的子集，并且在 B 中至少有一个元素不属于 A，那么，集合 A 就叫做集合 B 的**真子集**，表示为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

例如，自然数集是 N 的子集，但不是 N 的真子集；N 是 R 的子集，也是 R 的真子集.

集合 B 和集合 B 的真子集 A 之间的关系，可以用图 1-3

中 B 和 A 的关系来说明.

容易知道，对于集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$, 那么 $A\subseteq C$.

事实上，设 x 是 A 的任意一个元素. 因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$. 又因为 $B\subseteq C$, 所以 $x\in C$, 故知 $A\subseteq C$.

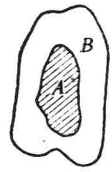


图 1-3

同样可知，对于集合 A、B、C，如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$.

为了方便起见，我们引进空集这个概念: 不含任何元素的集合叫做**空集**，用符号 $\varnothing$ 表示.

例如，集合 $\{x:x+1=x+3\}$、{小于零的正整数}、{两边之和小于第三边的三角形}等都是空集.

我们规定空集是任何集合的子集. 也就是说，对于任何集合 A，都有

$$\varnothing\subseteq A.$$

例 1 写出集合 $\{a, b\}$ 的所有的子集.

解: $\{a, b\}$ 的所有的子集是: $\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$ 和 $\{a, b\}$.

2. 集合的相等 对于两个集合 A、B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$, 那么，集合 A 和集合 B 就叫做**相等**，表示为

$$A=B.$$

读作“集合 A 等于集合 B”.

集合 A 等于集合 B，也就是集合 A 与集合 B 的元素完全相同.

例如，A 是方程 $x^2+3x+2=0$ 的根的集合，$B=\{-1, -2\}$, 则 $A=B$.

例 2 写出不等式 $3x-2>x+6$ 的解的集合。

解： 不等式 $3x-2>x+6$ 的解的集合是

$$\{x:3x-2>x+6\}=\{x:2x>8\}=\{x:x>4\}.$$

例 3 写出方程 $2x^2-4x+1=0$ 的根的集合。

解： 方程 $2x^2-4x+1=0$ 的根的集合是

$$\{x:2x^2-4x+1=0\}=\left\{x:x=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2}),\ \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\right\}.$$

例 4 设 $A=\{$直角三角形$\}$，$B=\{$三角形：三条边的长为 a、b、c 且 $a^2+b^2=c^2\}$。证明 $A=B$。

证明： 设 $x\in A$，即 x 为一直角三角形．根据勾股定理知道，若 a、b 为它的直角边，c 为斜边，则 $a^2+b^2=c^2$，所以 $x\in B$，即

$$A\subseteq B.$$

反之，设 $x\in B$，即一个三角形的三条边的长 a、b、c 满足关系 $a^2+b^2=c^2$．根据勾股定理的逆定理知道，这个三角形是直角三角形，所以 $x\in A$，即

$$B\subseteq A.$$

由集合相等的定义可知 $A=B$。

练 习

1\. 在下面各题中的__处填上适当的符号（$\in$、$\notin$、$=$、$\subset$、$\supset$）：

(1) a__$\{a\}$； (2) a__$\{a, b, c\}$；

(3) d__$\{a, b, c\}$； (4) $\{a\}$__$\{a, b, c\}$；

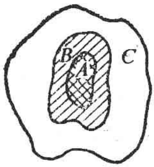
(5) $\{a, b\}$__$\{b, a\}$；

(6) $\{3, 5\}$__$\{1, 3, 5, 7\}$;

(7) $\{2, 4, 6, 8\}$__$\{2, 8\}$;

(8) $\varnothing$__$\{0, 1, 2\}$.

2. 图中 A、B、C 表示集合，说明集合 A、B、C 有什么关系.



(第 2 题)

3. 写出$\{a, b, c\}$的所有的子集.

4. 写出方程 $x+3=\dfrac{x}{2}-5$ 的解的集合.

5. 写出不等式 $3x+2<4x+1$ 的解的集合.

6. 写出方程 $3x^2-6x+2=0$ 的根的集合.

7. 写出方程组$\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=3\end{cases}$的解的集合.

8. 设 $A=\{$线段 A_1B_1 的垂直平分线上的点$\}$，$B=\{$与A_1、B_1两点距离相等的点$\}$，证明 $A=B$.

1.3 交集和并集

1. 交集 看下面两个集合：

$$A=\{a, b, c, d\}, \quad B=\{d, r, s, b\}.$$

容易看出，集合$\{b, d\}$是由同时属于A和B的一切元素所组成的，这时，我们就说集合$\{b, d\}$是集合A与B的交集，表示为

$$\{a, b, c, d\}\cap\{d, r, s, b\}=\{b, d\}.$$

一般地，对于给定的集合 A、B，由同时属于A和B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的**交集**，表示为

$$A \cap B.$$

读作“A交B”.

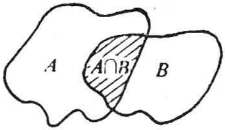


图 1-4

图 1-4 中的阴影部分，表示集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$.

同样地，对于给定的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，由同时属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一切元素所组成的集合，叫做集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集，表示为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

由交集定义容易知道：

(1) 对于任意两个集合 A、B，都有

$$A\cap B\subseteq A,\ A\cap B\subseteq B;$$

(2) 如果 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

例 1 设 $A=\{x:x>-2\}$, $B=\{x:x<3\}$，求 $A\cap B$.

解:
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x:x>-2\}\cap\{x:x<3\}\\&=\{x:-2<x<3\}.\end{aligned}$$

例 2 设 $A=\{(x, y):4x+y=6\}$, $B=\{(x, y):3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.

解:
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x, y):4x+y=6\}\cap\{(x, y):3x+2y=7\}\\&=\left\{(x, y):\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}=\{(1, 2)\}.\end{aligned}$$

例 3 设 $A=$ {等腰三角形}, $B=$ {直角三角形}，求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=$ {等腰三角形} $\cap$ {直角三角形}

$=\{$等腰直角三角形$\}$.

由交集的定义知道，两个任意的集合 A, B 所确定的交集是唯一的. 实际上，求两个集合的交集，就是规定了一种集与集之间的运算“$\cap$”，这个运算叫做**交运算**，简称为**交**. 集合 A、B 进行交运算的结果就是交集 $A\cap B$.

交的性质 设 A、B、C 为任意三个集合，那么

(1) $A\cap B=B\cap A$(**交换律**)；

(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (**结合律**)；

(3) $A\cap A=A$(**等幂律**)；

(4) $A\cap\varnothing=\varnothing$.

由图 1-5 容易看出性质(1)、(2)是成立的.

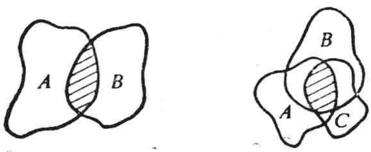


图 1-5

现在，我们来证明这些性质成立.

证明：(1) 设 $x\in A\cap B$，根据定义知 $x\in A$ 同时 $x\in B$，也就是 $x\in B$ 同时 $x\in A$，所以 $x\in B\cap A$. 即

$$A\cap B\subseteq B\cap A.$$

同样可证 $B\cap A\subseteq A\cap B$.

所以 $A\cap B=B\cap A$.

(2) 设 $x\in(A\cap B)\cap C$，根据定义知 $x\in A\cap B$，且 $x\in C$. 由 $x\in A\cap B$，得

$$x\in A \text{ 且 } x\in B,$$

由此可知，$x\in B\cap C$.

所以 $x\in A\cap(B\cap C)$

即 $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$.

同样可证 $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$.

根据集合相等的定义，得 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 设 $x\in A\cap A$，根据定义知 $x\in A$ 同时 $x\in A$，所以 $x\in A$，即 $A\cap A\subseteq A$，

同样可证 $A\subseteq A\cap A$，

所以 $A\cap A=A$.

(4) 用反证法. 设 $A\cap\varnothing\neq\varnothing$，则至少存在一个元素 $x\in A\cap\varnothing$，即 $x\in A$ 同时 $x\in\varnothing$，这个结论与空集 $\varnothing$ 的定义矛盾. 所以

$$A\cap\varnothing=\varnothing.$$

2. 并集 看下面两个集合:

$$A=\{a,b,c,d\},\quad B=\{d,r,s,b\}.$$

容易看出，$\{a,b,c,d,r,s\}$ 是属于 A 或者属于 B 的一切元素所组成的集合. 这时，我们就说 $\{a,b,c,d,r,s\}$ 是集合 A 与 B 的并集，表示为

$$\{a,b,c,d\}\cup\{d,r,s,b\}=\{a,b,c,d,r,s\}.$$

一般地，由属于 A 或者属于 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的**并集**，表示为

$$A\cup B.$$

读作"A 并 B".

图 1-6 中的阴影部分，表示集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$.

同样地，对于给定的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，由一切至少属于

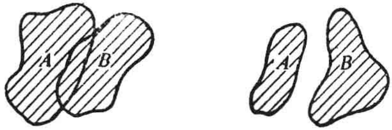


图 1-6

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中一个集合的元素所组成的集合，叫做集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集，表示为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad 或 \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

由并集的定义容易知道：

(1) 对于任意两个集合 A、B，都有

$$A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B;$$

(2) 如果 $A \subseteq B$，则 $A \cup B = B$.

例 4 设 $A = \{x: -1 < x < 2\}$，$B = \{x: 1 < x < 3\}$，求 $A \cup B$.

解： $A \cup B = \{x: -1 < x < 2\} \cup \{x: 1 < x < 3\}$
$= \{x: -1 < x < 3\}$.

例 5 写出不等式 $x^2 + x - 6 \geqslant 0$ 的解的集合.

解： 不等式 $x^2 + x - 6 \geqslant 0$ 的解的集合是

$$\{x: x^2 + x - 6 \geqslant 0\} = \{x: x \leqslant -3\} \cup \{x: x \geqslant 2\}.$$

例 6 设 $A = \{$锐角三角形$\}$，$B = \{$钝角三角形$\}$，求 $A \cup B$.

解： $A \cup B = \{$锐角三角形$\} \cup \{$钝角三角形$\}$
$= \{$斜三角形$\}$.

由并集的定义知道，两个任意的集合 A、B 所确定的并集

是唯一的．实际上，求两个集合的并集，就是规定了一种集与集之间的运算"$\cup$"，这个运算叫做**并运算**，简称为**并**．集合 A、B 进行并运算的结果就是并集 $A\cup B$．

并的性质　设 A、B、C 为任意三个集合，那么

(1) $A\cup B=B\cup A$(**交换律**)；

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$(**结合律**)；

(3) $A\cup A=A$(**等幂律**)；

(4) $A\cup\varnothing=A$．

由图 1-7 容易看出性质(1)、(2)是成立的．

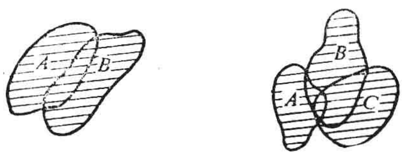


图 1-7

现在，我们来证明性质(2)成立．

证明： 设 $x\in(A\cup B)\cup C$，根据定义知 $x\in A\cup B$ 或 $x\in C$．

1．如果 $x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$．

如果 $x\in A$，则 $x\in A\cup(B\cup C)$．

如果 $x\in B$，则 $x\in B\cup C$，所以 $x\in A\cup(B\cup C)$．

因此，如果 $x\in A\cup B$，则 $x\in A\cup(B\cup C)$．

2．如果 $x\in C$，则 $x\in B\cup C$，所以 $x\in A\cup(B\cup C)$．

由此可知　$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$．

同样可证　$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$．

所以　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$．

同学们自己证明性质(1)、(3)、(4).

上面我们分别研究了交运算和并运算以及它们的基本运算性质. 现在我们来研究交、并之间的性质:

设 A, B, C 为任意的三个集合,那么

(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (**交对并的分配律**);

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (**并对交的分配律**);

(3) $A\cap(A\cup B)=A$(**吸收律**);

(4) $(A\cap B)\cup B=B$(**吸收律**).

证明: (1)设$x\in A\cap(B\cup C)$. 根据定义知$x\in A$且$x\in B\cup C$. 根据并集定义, $x\in B\cup C$ 就是 $x\in B$ 或 $x\in C$. 现分两种情况讨论:

1. 如果 $x\in B$, 又因为 $x\in A$, 则 $x\in A\cap B$.

∴ $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

2. 如果 $x\in C$, 又因为 $x\in A$, 则 $x\in A\cap C$.

∴ $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

由 1, 2 可得 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

反之, 设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 根据定义知 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$. 分两种情况讨论:

1. 如果 $x\in A\cap B$. 即 $x\in A$ 且 $x\in B$, 则 $x\in B\cup C$,

∴ $x\in A\cap(B\cup C)$.

2. 如果 $x\in A\cap C$. 即 $x\in A$ 且 $x\in C$, 则 $x\in B\cup C$,

∴ $x\in A\cap(B\cup C)$.

根据 1, 2 可知

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C).$$

所以 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

同学们自己证明(2)。

(3) $\because\ A\subseteq A\cup B$,

$\therefore\ A\cap(A\cup B)=A$.

同学们自己证明(4)。

练　习

1. 设 $A=\{x:x<5\}$, $B=\{x:x\geqslant 0\}$, 求 $A\cap B$.
2. 设 $A=\{(x,y):3x+2y=1\}$, $B=\{(x,y):x-y=2\}$, $C=\{(x,y):2x-2y=3\}$, $D=\{(x,y):6x+4y=2\}$. 求 $A\cap B$, $B\cap C$, $A\cap D$.
3. 设 $A=\{$锐角三角形$\}$, $B=\{$钝角三角形$\}$, 求 $A\cap B$.
4. 设 $A=\{$能被 2 整除的数$\}$, $B=\{$能被 3 整除的数$\}$, 求 $A\cap B$.
5. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{-5,-4,-2,2,4,5\}$, $C=\{-2,2,4,6\}$.

   (1) 求 $A\cap B$, 再求 $(A\cap B)\cap C$;

   (2) 求 $B\cap C$, 再求 $A\cap(B\cap C)$;

   (3) 由(1)和(2)可得什么结论?
6. 用表示集合的图形来说明交的性质(1)和(2)。
7. 设 $A=\{x:-2<x<1\}$, $B=\{x:0\leqslant x\leqslant 2\}$, 求 $A\cup B$.
8. 设 $A=\{x:x>-2\}$, $B=\{x:x\geqslant 3\}$, 求 $A\cup B$.
9. 写出不等式 $|a+3|>1$ 的解的集合。
10. 写出不等式 $x^2-x-2<0$ 的解的集合。