微积分
学习指导教程

（第2版）

电子科技大学数学科学学院
傅英定　高建　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

微积分学习指导教程

Weijifen Xuexi Zhidao Jiaocheng

（第2版）

电子科技大学数学科学学院

傅英定　高建　主编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材、四川省“十二五”普通高等教育本科规划教材《微积分（第2版）》的配套教材，也是电子科技大学“国家工科数学教学基地”系列教材之一。全书在第一版的基础上，根据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和科技人才对数学素质的要求，本着当今深化课程体系与教学内容改革的精神以及为满足培养创新型人才的需要，吸收国内外相关教材的精华，遵循全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，参考近年来各重点院校的优秀考研复习资料修订而成。本书的主要特色是：对书中一些重要概念问题及典型例题在解题前都进行了解题思路分析，解题后都给出了恰当的评注，以期培养学生分析问题的能力；以育人为本、学生为本、质量为本；注重内容与体系的整体优化；重视数学思想与方法，适当淡化运算技巧；重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。

本书共八章，每章分为五部分：知识结构框图、内容提要、典型例题、单元检测题、单元检测题答案与提示。每章后面分别介绍了一位在微积分发展史上做出重大贡献的数学家。附录中有电子科技大学最近三年的“微积分”期末考试试题及参考解答，三套电子科技大学高等数学竞赛试题及参考解答，两套全国大学生数学竞赛试题及参考解答。

本书主要供报考研究生者，普通高等学校、成人高等教育、高等教育自学考试等各类本科生读者学习数学时参考。

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导教程/傅英定，高建主编．—2版．—北京：高等教育出版社，2013.8

ISBN 978-7-04-038224-2

Ⅰ．①微… Ⅱ．①傅…②高… Ⅲ．①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第177546号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 李 茜 李晓鹏　封面设计 张志奇　版式设计 马敬茹
插图绘制 邓 超　责任校对 胡晓琪　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京明月印务有限责任公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 32.5
字　　数 590千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2005年6月第1版
　　　　 2013年8月第2版
印　　次 2013年8月第1次印刷
定　　价 43.60元

物 料 号 38224-00

第二版前言

《微积分学习指导教程(第2版)》是普通高等教育“十一五”国家级规划教材、四川省“十二五”普通高等教育本科规划教材《微积分(第2版)》的配套教材,也是电子科技大学“国家工科数学教学基地”系列教材之一。本书第一版自2005年出版以来,受到同行专家的高度赞扬,被全国多所重点大学推荐为学生参考用书,深受各类有志报考硕士研究生的考生的欢迎,对提高我国工科类专业学生的数学素养及培养学生分析及解决实际问题的能力起到了积极的推动作用。经过多年的教学实践,并广泛征求同行专家的宝贵意见,在保持第一版指导思想和风格的基础上,此次再版做了以下几方面的修改:

(1) 对部分内容进行了优化与增删,将第一版每章七部分内容,精简为每章五部分内容,即知识结构框图、内容提要、典型例题、单元检测题、单元检测题答案与提示。增加了“知识结构框图”,使内容之间脉络关系更加清晰、简明。

(2) 对第一版中的例题、单元检测题重新进行了精选,增添了一些具有典型性、综合性的例题;为配合由电子科技大学主编、高等教育出版社于2009年6月出版的《微积分(第2版)》的使用,此次修订也有目的地选解了该教材中部分有一定难度的习题及复习题;增选了近年来全国硕士研究生入学统一考试中数学思想较强的部分题目。

(3) 本次修订对典型例题进行了解前思路分析及解后评注,意在使读者掌握分析问题的思想和方法。

(4) 对文字叙述进行了精加工,使其表达更加简明,便于读者自学。

(5) 对第一版中的少数印刷错误进行了勘误。

本书由傅英定、高建主编,全书由傅英定统稿。各章编者分别是:蒲和平(第一章、第二章),冷劲松(第三章),高建(第四章),傅英定(第五章),谢云荪(第六章、第七章),钟守铭(第八章),傅英定(数学家史),高建(附录)。

借本书再版的机会,向对我们工作给予关心、支持的教育部高等学校数学与

统计学教学指导委员会数学基础课程教学指导分委员会、高等教育出版社、电子科技大学教务处、电子科技大学数学科学学院全体教师、电子科技大学数学科学学院长黄廷祝教授以及校内外使用本书的同行们致以诚挚的谢意！

由于编者水平所限，尽管作了极大努力，难免有不妥之处，敬请批评指正。

编者

2013 年 3 月于成都

第一版前言

《微积分学习指导教程》是电子科技大学国家工科数学课程教学基地编写的工科数学系列参考书之一。本书是根据教育部颁发的《关于高等工业院校微积分课程的教学基本要求》,在我校《微积分同步学习指导》教材的基础上,遵循全国硕士研究生入学统一考试大纲,参考近年来各重点院校的优秀考研复习资料编写而成。本书由电子科技大学应用数学学院长期从事微积分教学,具有丰富教学经验的教师编写,编写的指导思想是:紧扣大纲,突出重点;加强基础,重视综合;总结题型,启迪思路;注重应用,提高能力。

本书力求突出以下特点:

一、注重教学内容与体系整体优化

本书在内容编写上注重教学内容与体系的整体优化,参考了国内优秀的微积分教材和一些学校在精品课程建设中新开发的多媒体高等数学网上答疑系统,对各章节的知识点及重、难点作了精心编排,若学生能在学习微积分时认真参考本教程,定能在学习上收到很好的效果。

二、注重概念,引导学生研究式的学习

本书特别增加了"概念剖析"部分,将教学过程中发现的困扰学生的一些概念进行了详细深入的分析,其中的一些问题就是学生在讨论课上提出来的,教师对这些概念的剖析,引起了学生对数学的浓厚兴趣。

三、重视数学思想与方法,适当淡化运算技巧

计算机技术的迅速发展及数学软件的广泛应用使得求极限、求导与求积分的运算技巧有必要适当淡化。因此,本书在编写时尽量少举一些计算繁难的例题,多介绍一些基本题,把重点放在介绍数学思想与方法上。

四、充分重视培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力

本书力求将数学建模的思想和方法渗透到教材中去,培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。每一单元都重视了应用题的选择和分析解答。

本书根据教学内容分为八章,每章分为七部分:基本要求、基本内容、概念剖析、典型例题、思考与练习、单元检测题、答案与提示。每一章后面分别介绍了在微积分发展史上做出了重大贡献的中外数学家,希望对读者有所启发和帮助。

为了帮助读者检查自己对知识的掌握情况,除每章附有检测题外,在附录里

还有三套电子科技大学最近三年使用的《微积分》上、下册期末考试试题及参考解答。

电子科技大学每年九月举办的全校高等数学竞赛吸引了不少优秀学生参加。竞赛试题主要考查掌握知识的灵活性及综合应用数学知识解决实际问题的能力。试题有较大的参考价值,所以特在附录里选编了三套电子科技大学最近三年高等数学竞赛试题及参考解答。

本书内容全面、例题典型、分析透彻、叙述清楚、便于自学,可供普通高校、成人教育、高教自考等各类本科学生读者参考,尤其对报考研究生者有较大的参考价值。

本书由傅英定、彭年斌主编。各章撰写者分别是:赵汇渝(第一章)、于泰彬(第二章)、杨春(第三章)、高建(第四章)、冷劲松(第五章)、王晓梅(第六章)、彭年斌(第七章)、贾闽惠(第八章)、谢云荪(附录)。本书由向学勤审稿,黄廷祝、谢云荪教授对本书的编写给予了很大的帮助,在此一并深表感谢。

限于编者水平,难免有不妥之处,敬请批评指正。

编　者

2005 年元月于成都

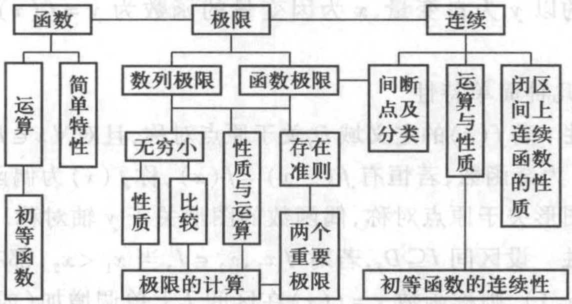
目　录

第一章　函数　极限与连续 …… 1
一、知识结构框图 …… 1
二、内容提要 …… 1
三、典型例题 …… 8
四、单元检测题 …… 39
五、单元检测题答案与提示 …… 40
数学家刘徽 …… 45
第二章　一元函数微分学 …… 46
一、知识结构框图 …… 46
二、内容提要 …… 46
三、典型例题 …… 57
四、单元检测题 …… 101
五、单元检测题答案与提示 …… 104
数学家拉格朗日 …… 112
第三章　一元函数积分学 …… 114
一、知识结构框图 …… 114
二、内容提要 …… 115
三、典型例题 …… 124
四、单元检测题 …… 173
五、单元检测题答案与提示 …… 175
数学家牛顿 …… 180
第四章　常微分方程 …… 184
一、知识结构框图 …… 184
二、内容提要 …… 184
三、典型例题 …… 190
四、单元检测题 …… 212
五、单元检测题答案与提示 …… 214
数学家莱布尼茨 …… 218

第五章　多元函数微分学 …… 222
一、知识结构框图 …… 222
二、内容提要 …… 222
三、典型例题 …… 230
四、单元检测题 …… 283
五、单元检测题答案与提示 …… 285
数学家欧拉 …… 290
第六章　多元数量值函数积分学 …… 292
一、知识结构框图 …… 292
二、内容提要 …… 292
三、典型例题 …… 300
四、单元检测题 …… 343
五、单元检测题答案与提示 …… 345
数学家柯西 …… 349
第七章　多元向量值函数积分学 …… 351
一、知识结构框图 …… 351
二、内容提要 …… 351
三、典型例题 …… 360
四、单元检测题 …… 402
五、单元检测题答案与提示 …… 404
数学家高斯 …… 409
第八章　无穷级数 …… 411
一、知识结构框图 …… 411
二、内容提要 …… 412
三、典型例题 …… 420
四、单元检测题 …… 445
五、单元检测题答案与提示 …… 447
数学家达朗贝尔 …… 452
附录 …… 455
参考文献 …… 510

第一章　函数　极限与连续

一、知识结构框图



二、内　容　提　要

（一）函数

1．函数的概念

定义　设 X 和 Y 为两个非空实数集，若存在某一对应规律（或法则）f，使得对于 X 中任意一个数 x，Y 中都有唯一确定的实数 y 与它对应，则称 f 为定义在 X 上的函数，记为 $f:X\to Y$ 或简记为 $y=f(x)$．其中称 x 为自变量，y 为因变量，X 为函数的定义域，记为 D_f，$Z_f=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}\subseteq Y$ 为函数的值域．

注：(1) 函数定义中，定义域和对应法则是函数的两个基本要素，两个函数相等的充分必要条件是这两个基本要素相同．因此，函数与自变量、因变量用什么字母表示无关．

(2) 在函数记号 $y=f(x)$ 中，f 不限于表示某一个数学表达式，也可以是几个数学表达式分段表示，甚至还可以用一个几何图形或一张数据表格来表示．

2. 函数的运算

(1) 复合函数

定义 设有函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，若 $Z_\varphi\subseteq D_f$，则对 $\forall x\in D_\varphi$，通过中间变量 u，都有唯一确定的 $y\in Z_f$ 与之对应，由此确定的函数称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，记为 $y=f\circ\varphi(x)=f[\varphi(x)]$.

注：复合函数也可以不要求 $Z_\varphi\subseteq D_f$，只需 $Z_\varphi\cap D_f\neq\varnothing$，此时 $f\circ\varphi(x)$ 的定义域不再是 D_φ，而是 D_φ 的某个子集.

(2) 反函数

定义 设函数 $y=f(x)$，若对 $\forall y\in Z_f$，都有唯一确定的 $x\in D_f$ 适合 $y=f(x)$，则称由此构成的以 y 为自变量、x 为因变量的函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

3. 函数的几种简单特性

(1) **奇偶性** 若 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，且对 $\forall x\in D_f$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数；若恒有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

(2) **单调性** 设区间 $I\subseteq D_f$，若对 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

(3) **周期性** 对函数 $f(x)$，若存在常数 $T\neq 0$，使得 $\forall x\in D_f$，都有 $x+T\in D_f$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 函数的周期通常是指最小的正周期.

(4) **有界性** 若存在正数 M，对 $\forall x\in X\subset D_f$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$ 在数集 X 上有界.

4. 初等函数

(1) **基本初等函数** 常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

(2) **初等函数** 由基本初等函数通过有限次四则运算和有限次复合得到的，能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

(二) 极限

1. 极限的概念

(1) 数列极限

定义 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$（正整数集），当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

几何意义：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow A$ 的任一 ε 邻域内都含有 $\{x_n\}$ 的几乎所有项，即除至多有限项外的所有项都在该邻域内.

(2) 函数极限

1° 自变量趋于无穷的情况

定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

显然，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

2° 自变量趋有限值的情况

定义 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

单侧极限：

左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 又记 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 为 $f(x_0-0)$.

右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 又记 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 为 $f(x_0+0)$.

显然，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(3) 数列极限与函数极限的关系

定理(Heine 定理) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\Leftrightarrow\forall x_n\to a(n\to\infty)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=c$.

(其中 a 可以是 x_0,x_0^+ 或 x_0^-，也可以是 $\infty,+\infty$ 或 $-\infty$).

2. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小与无穷大的概念

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，简称为无穷小.

可类似定义 $x\to x_0^+,x_0^-$ 与 $x\to\infty,+\infty,-\infty$ 时的无穷小.

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，即 $\forall M>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，简称为无穷大.

可类似定义 $x\to x_0^+,x_0^-$ 与 $x\to\infty,+\infty,-\infty$ 时的无穷大，以及正、负无穷大.

(2) 无穷小与无穷大的关系

定理 在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

(3) 无穷小的运算

定理 有限个无穷小的代数和仍是无穷小,有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

由此可以推出:常数与无穷小的乘积为无穷小,有限个无穷小的乘积为无穷小.

(4) 函数、极限与无穷小的关系

定理 $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$(其中 A 为常数,$\lim\alpha(x)=0$).

3. 极限的性质与运算

(1) 极限的性质

1°**唯一性** 若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限存在,则极限唯一.

2°**局部保号性** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$(或 $A<0$),则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,若 $A<B$,则存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)<g(x)$;

若在 x_0 的某个空心邻域内有 $f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则 $A\leqslant B$.

3°**有界性** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在 $\delta>0$ 及 $M>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

特别地,收敛数列必有界.即若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则存在 $M>0$,使对一切正整数 n,都有 $|x_n|\leqslant M$.

(2) 极限的运算

1°四则运算

定理 若 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim f(x)g(x)=A\cdot B,\quad \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

2°复合运算

定理 设函数 $u=\varphi(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,但在点 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq u_0$,又 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 $x\to x_0$ 时的极限也存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

4. 极限存在准则及两个重要极限

(1) 夹逼准则

定理 如果在点 x_0(x_0 可为无穷大)的某个空心邻域内,有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant$

$h(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

特别地,若数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$,满足$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

(2) 单调有界准则

定理 若数列$\{x_n\}$单调且有界,则数列$\{x_n\}$必有极限.

特别地,单增上有界数列必有极限,单减下有界数列必有极限.

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\text{ 或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

推广:$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$,$\lim\limits_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$;

$\lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]}$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$.

5. 无穷小的比较与替换

(1) 无穷小的比较

定义 设$\lim\alpha(x)=0$,$\lim\beta(x)=0$ $(\beta(x)\neq 0)$.

1°如果$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称在该趋势下,$\alpha(x)$是$\beta(x)$的高阶无穷小(或称$\beta(x)$是$\alpha(x)$的低阶无穷小),记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$;

2°如果$\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0(k>0)$,则称在该趋势下,$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小;

3°如果$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$,则称在该趋势下,$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小.

特别地,若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小,记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(2) 几个常见的等价无穷小

当$x\to 0$时,有

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^x-1,$$

$$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1),\quad \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}(a>0,a\neq 1),$$

$$(1+x)^a-1\sim ax,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

(3) 等价无穷小的替换

定理 设$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$,$\beta(x)\sim\beta_1(x)$,若$\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$(或$\infty$),则

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = A(\text{或}\infty).$$

（三）函数的连续性

1. 连续的概念

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

等价定义：$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$.

$\varepsilon-\delta$ 语言：$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，记为 $f(x)\in C(a,b)$；若 $f(x)\in C(a,b)$，且在端点 a 和 b 处分别右连续和左连续，即 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，记为 $f(x)\in C[a,b]$.

2. 间断点及其分类

定义 若 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

间断点的分类如下：

$$\text{间断点 } x_0 \begin{cases} \begin{array}{c}\text{第一类间断点}\\ f(x_0-0), f(x_0+0)\\ \text{均存在}\end{array} \begin{cases} \begin{array}{l}\text{可去型间断点}\\ f(x_0-0) = f(x_0+0)\\ \text{即} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{ 存在}\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{跳跃型间断点}\\ f(x_0-0) \neq f(x_0+0)\end{array} \end{cases} \\ \begin{array}{c}\text{第二类间断点}\\ \text{(非第一类)}\end{array} \begin{cases} \begin{array}{l}\text{无穷型间断点}\\ f(x_0-0) = \infty \text{ 或 } f(x_0+0) = \infty\end{array} \\ \begin{array}{l}\text{振荡型间断点}\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{ 不存在} (\neq \infty)\end{array} \end{cases} \end{cases}$$

3. 连续函数的性质与运算

（1）连续函数的性质

1°局部有界性 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则一定存在 x_0 的某邻域，在该邻域内 $f(x)$ 有界.

2°局部保号性 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且 $f(x_0)\neq 0$，则一定存在 x_0 的某邻域，在该邻域内 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 具有相同的符号.

(2) 连续函数的运算

1°四则运算

定理 若$f(x)$与$g(x)$都在点x_0连续,则$f(x)\pm g(x)$,$f(x)g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$($g(x_0)\neq 0$)在点x_0也连续.

2°复合运算

定理 若$u=\varphi(x)$在点x_0连续,$\varphi(x_0)=u_0$,$f(u)$在点u_0连续,则复合函数$f[\varphi(x)]$在点x_0也连续.

推论 设$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,$f(u)$在点$a$连续,则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)\text{或}\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

3°反函数运算

定理 若$f(x)$在点x_0连续,且在点x_0附近有反函数,则反函数$f^{-1}(y)$在点$y_0=f(x_0)$也连续.

(3) 初等函数的连续性

定理 基本初等函数在其定义域内是连续的,初等函数在其定义区间内是连续的.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) **最值定理** 若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则必存在$\xi_1,\xi_2\in[a,b]$,使对一切$x\in[a,b]$都有

$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2),$$

即$f(x)$在$[a,b]$存在最小值$f(\xi_1)$和最大值$f(\xi_2)$.

(2) **有界性定理** 若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$有界,即存在正数M,使对$\forall x\in[a,b]$,有$|f(x)|\leqslant M$.

(3) **介值定理** 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)\neq f(b)$,若μ是$f(a)$与$f(b)$之间任何一个数,则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得$f(\xi)=\mu$.

推论1 若$f(x)$在区间$[a,b]$连续,m、M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值($m<M$),则对任意$\mu\in(m,M)$,至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=\mu$.

推论2 (零点定理)若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$.

推论3 若单调函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)\cdot f(b)<0$,则存在唯一的$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$.